УДК 519.8
ББК 22.18

О ЯВНЫХ И СКРЫТЫХ КОАЛИЦИЯХ В РЕФЛЕКСИВНЫХ ИГРАХ

Гонтарев А. В.[1]
(Московский физико-технический институт, Москва)
Чхартишвили А. Г.[2]
*(Учреждение Российской академии наук
Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН, Москва)*

Рассмотрена модель рыночной олигополии, в которой участники рынка могут заключать союз – явный или неявный (тайный). При наличии союза (коалиции) все его участники преследуют цель максимизации суммарного выигрыша, в то время как остальные участники рынка максимизируют свои собственные выигрыши. Для моделирования взаимодействия в случае неявного союза была применена концепция информационного равновесия рефлексивной игры.

Ключевые слова: олигополия, явная коалиция, тайная коалиция, рефлексивные игры, информационное равновесие.

1. Введение

Олигополия – это такая рыночная структура, при которой доминирует небольшое число продавцов, а вход в отрасль новых производителей ограничен высокими барьерами.

[1] *Гонтарев Александр Владимирович, студент (alexander.gontarev@gmail.com).*
[2] *Чхартишвили Александр Гедеванович, доктор физико-математических наук (sandro_ch@mail.ru).*

Олигополия возникает в том случае, если число фирм в отрасли настолько мало, что каждая из них при формировании своей экономической политики вынуждена принимать во внимание реакцию со стороны конкурентов. Подобно тому, как шахматист должен учитывать возможные ходы противника, олигополист должен быть готов к различным (нередко альтернативным) вариантам развития ситуации на рынке в результате различного поведения конкурентов.

Всеобщая взаимозависимость проявляется и в условиях обострения конкурентной борьбы, и в условиях, когда достигается договоренность с другими олигополистами и возникает тенденция превращения отрасли в чисто монопольную.

Возможны две основные формы поведения фирм в условиях олигополистических структур [3]: некооперативное и кооперативное. В случае некооперативного поведения каждый продавец самостоятельно решает проблему определения цены и объема выпуска продукции. В случае кооперативного поведения все фирмы-участники кооперации договариваются о цене и объеме выпускаемой продукции.

В условиях высокой степени неопределенности олигополисты ведут себя по-разному. Одни пытаются игнорировать конкурентов и действовать, как будто в отрасли господствует совершенная конкуренция. Другие, наоборот, пытаются предвидеть поведение соперников и внимательно следят за каждым их шагом. Наконец, некоторые из них считают наиболее выгодным тайный сговор с фирмами-противниками.

В данной работе мы рассмотрим олигополию, в которой несколько производителей объединяются в коалицию. При этом будет рассмотрено две ситуации. В первой участники коалиции прямо заявляют о своем союзе остальным участникам олигополии. Во второй ситуации несколько производителей совершают тайный сговор, при этом всем остальным участникам рынка приходится строить догадки о том, был ли заключен союз или нет.

2. Модель без коалиций

Рассмотрим систему, которая состоит из n однотипных игроков-олигополистов. Пусть каждый из этих игроков может выбрать некоторое действие x_i, при этом целевые функции игроков имеют вид

$$(1) \quad f_i = (1 - x_1 - \ldots - x_n)x_i - \frac{x_i^2}{2r}.$$

Содержательно первое слагаемое в (1) означает доход i-го игрока, второе – его затраты на производство x_i единиц продукции.

Наиболее распространенной концепцией решения некооперативной игры является равновесие Нэша (см., напр., [1, 2]). Равновесие Нэша – это ситуация, в которой каждый игрок выбрал наилучшее для себя действие (максимизирующее целевую функцию) при фиксированных действиях остальных игроков. Иначе говоря, каждому игроку невыгодно в одиночку отклоняться от равновесного состояния.

Стандартным способом нахождения равновесных состояний является нахождение максимума целевой функции каждого игрока по его действию и решение получившейся системы n уравнений. В данном случае в равновесном состоянии все игроки выбирают одинаковое действие, равное

$$(2) \quad \frac{1}{n + 1 + \frac{1}{r}}.$$

При этом их выигрыши будут

$$(3) \quad \frac{1}{2}\frac{r(2r+1)}{(nr + r + 1)^2}.$$

3. Явная коалиция

Пусть первые m игроков заключили союз. То есть, выбирая свои действия, они будут максимизировать не каждый свою целевую функцию, а агрегированную функцию

$$F = \sum_{k=1}^{m} f_k \,. \tag{4}$$

Рассмотрим случай, когда все игроки системы осведомлены о том, что союз заключен. Тогда целевые функции имеют следующий вид:

$$\begin{cases} F_i = (1 - x_1 - \ldots - x_n)x_1 - \dfrac{x_1^2}{2r} + \ldots + (1 - x_1 - \ldots - x_n)x_m - \dfrac{x_m^2}{2r}, \ i \le m, \\ F_i = (1 - x_1 - \ldots - x_n)x_i - \dfrac{x_i^2}{2r}, \ i > m. \end{cases} \tag{5}$$

Находя равновесие Нэша стандартным способом, приходим к системе уравнений вида

$$\begin{cases} 1 - \sum\limits_{k=1}^{n} x_k - \sum\limits_{k=1}^{m} x_k - \dfrac{x_i}{r} = 0, \ i \le m, \\ 1 - \sum\limits_{k=1}^{n} x_k - x_i - \dfrac{x_i}{r} = 0, \ i > m. \end{cases} \tag{6}$$

Первая группа уравнений описывает действия игроков, заключивших союз, вторая группа уравнений – действия игроков, оказавшихся вне коалиции.

Вычитая последовательно уравнения внутри каждой группы, систему можно привести к следующему равносильному виду:

$$(7)\quad \begin{cases} 1-\sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{m} x_k - \dfrac{x_1}{r} = 0, \\ \dfrac{1}{r} x_i - \dfrac{1}{r} x_{i+1} = 0,\ i \le m-1, \\ 1-\sum_{k=1}^{n} x_k - x_{m+1} - \dfrac{x_{m+1}}{r} = 0, \\ \left(1+\dfrac{1}{r}\right) x_i - \left(1+\dfrac{1}{r}\right) x_{i+1} = 0,\ m+1 \le i \le n-1. \end{cases}$$

Таким образом, легко видеть, что действия всех игроков в коалиции окажутся одинаковыми. Одинаковыми будут и действия игроков, не вошедших в этот союз. Обозначим тогда $y = x_i$, $i = 1, \ldots, m$ и $z = x_i$, $i = m + 1, \ldots, n$. Тогда систему можно записать в следующем виде:

$$(8)\quad \begin{cases} 1-2my-(n-m)z-\dfrac{y}{r} = 0, \\ 1-my-(n-m)z-z-\dfrac{z}{r} = 0. \end{cases}$$

Решение данной системы имеет вид:

$$(9)\quad \begin{cases} y = \dfrac{(r+1)r}{mr^2n - m^2r^2 + 2mr^2 + mr + nr + r + 1}, \\ x = \dfrac{(mr+1)r}{mr^2n - m^2r^2 + 2mr^2 + mr + nr + r + 1}. \end{cases}$$

Выпишем выигрыши игроков в равновесии. Игроки, вошедшие в коалицию, получают выигрыши по

$$(10)\quad \frac{1}{2}\frac{(r+1)r(2mr^2+2mr+r+1)}{(mr^2n - m^2r^2 + 2mr^2 + mr + nr + r + 1)^2}\,.$$

Здесь мы считаем, что суммарный выигрыш коалиции делится поровну между ее участниками.

Игроки, не вошедшие в коалицию, получают выигрыши по

$$(11)\quad \frac{1}{2}\frac{(mr+1)r(2mr^2+2mr+2r+1)}{(mr^2n - m^2r^2 + 2mr^2 + mr + nr + r + 1)^2}\,.$$

Для первых m игроков найдем разницу в выигрышах (в случае, когда заключен союз, и в случае, когда союза нет). Эта разница записывается выражением

$$
\begin{aligned}
(12)\quad & -\frac{1}{2}\frac{r^3(-1+8m^2r^3n+2nmr-4mr^3n-2r-2mr^3n^2+m)}{(mr^2n-m^2r^2+2mr^2+mr+nr+1)^2(nr+r+1)^2}-\\
& -\frac{1}{2}\frac{r^3(8m^2r^2+4mr-2nr-2m^3r^2n+m^2r^2n^2+4m^2r^2n)}{(mr^2n-m^2r^2+2mr^2+mr+nr+1)^2(nr+r+1)^2}-\\
& -\frac{1}{2}\frac{r^3(2m^2r^3n^2-2mr^3-n^2r^2-2nr^2-8m^3r^3+8m^2r^3)}{(mr^2n-m^2r^2+2mr^2+mr+nr+1)^2(nr+r+1)^2}-\\
& -\frac{1}{2}\frac{r^3(8m^3r^2-2m^3r+2m^4r^3-r^2-4m^3r^3n+m^4r^2)}{(mr^2n-m^2r^2+2mr^2+mr+nr+1)^2(nr+r+1)^2}.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим частный случай $n = 30$ и построим график этой разницы в плоскости параметров $<r, m>$ (см. рис. 1).

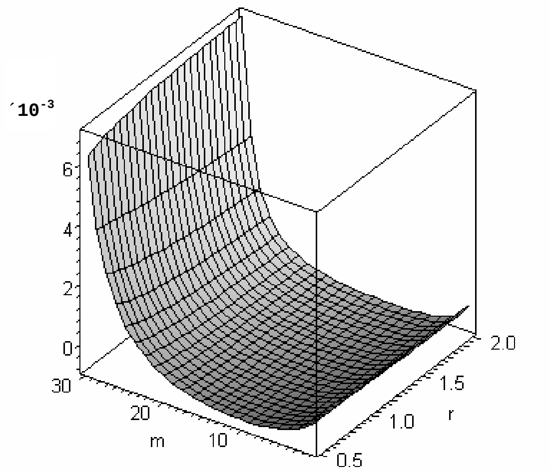

Рис. 1. Разница выигрышей для участников коалиции при размере системы n = 30

На графике (рис. 1) видно, что эта разница оказывается положительной только при достаточно больших значениях числа участников коалиции. При этом участники максимально выигрывают в коалиции, когда никто не остается вне союза, т. е. все участники рынка действуют совместно.

Таким образом, не всегда коалиция оказывается выгодной, т. е. не всегда участники коалиции увеличивают свой выигрыш по сравнению с выигрышем в случае отсутствия коалиции.

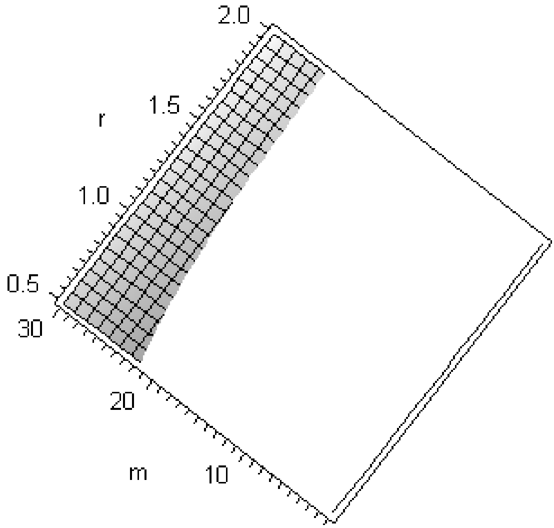

Рис. 2. Область коалиций, выгодных для их участников, при размере системы $n = 30$

Интересно отметить, что «выгодное» число участников коалиции зависит от эффективности работы игроков. На рис. 2 отмечена область таких значений параметров r и m, при которых игроки получают больший выигрыш, заключив союз, нежели работая по отдельности.

Рассмотрим другой частный случай – положим эффективность всех игроков постоянной и равной $r = 1$. Посмотрим, как будет зависеть разница в выигрышах игроков в случае наличия коалиции и в случае ее отсутствия (рис. 3).

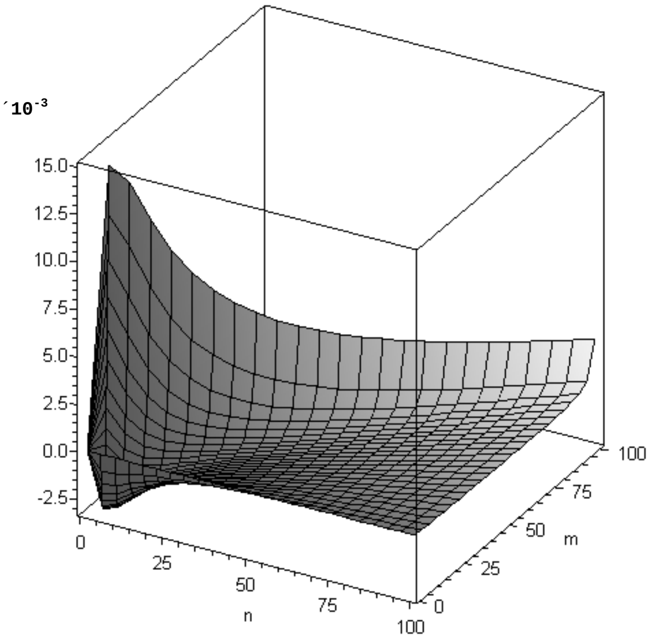

Рис. 3. Разница выигрышей участников коалиции при эффективности r = 1

Как видно из рис. 3, коалиции становятся выгодными только при достаточно большом числе игроков (когда m сравнимо с n). При этом при фиксированном числе игроков в системе коалиция сначала становится убыточной, и только с ростом размера коалиции начинает приносить прибыль. Продемонстрируем это для случая n = 25 (см. рис. 4).

Найдем точку минимума разницы выигрышей участников коалиции при r = 1. Эта разница записывается выражением

$$
\Delta = -\frac{1}{2}\frac{-4-4n-n^2-2nm+3m^4-18m^3+4m+15m^2)}{(nm-m^2+3m+n+2)^2(n+2)^2}+
$$
(13)
$$
+\frac{1}{2}\frac{12m^2n+3m^2n^2-6m^3n-2mn^2}{(nm-m^2+3m+n+2)^2(n+2)^2}.
$$

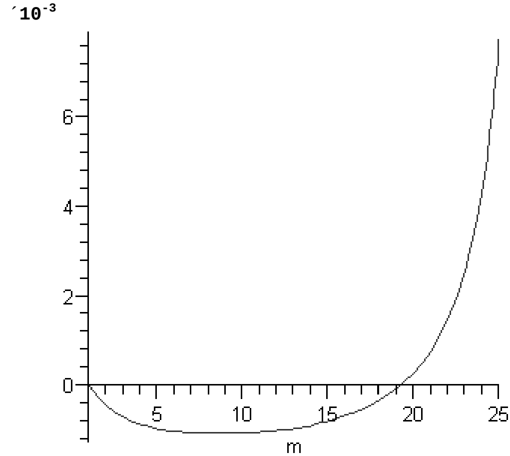

Рис. 4. Разница выигрышей участников коалиции при эффективности r = 1 *и размере системы* n = 25

Рассмотрим разницу выигрышей Δ как функцию переменной m с параметром n. Найдя производную функции по ее аргументу и приравняв ее к нулю, стандартным способом получаем, что функция (13) достигает своего экстремума (в данном случае – минимума) в точке

(14) $$m = \frac{1}{6}n + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{n^2+2n+13}.$$

График этой зависимости изображен на рис. 5.

Отметим, что при $n = 25$ получим $m_{min} \approx 8.7$, что согласуется с рис. 4.

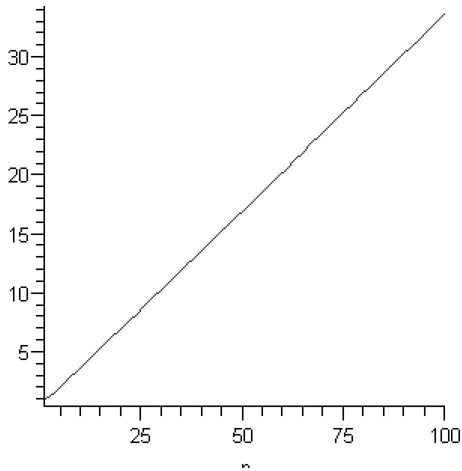

Рис. 5. Наименее выгодный размер коалиции

4. Скрытая коалиция

В предыдущем разделе был рассмотрен случай явного союза игроков – наличие коалиции и ее состав были общеизвестны. Однако возможен и иной случай – когда о коалиции известно лишь ее участникам, а остальные игроки ни о чем не подозревают.

Итак, пусть первые m игроков заключили коалицию и действуют совместно, а остальные $(n – m)$ игроков не знают о коалиции. Адекватным описанием такой ситуация является рефлексивная игра (см. [2, 4]), где наряду с n реальными игроками в системе появляются m фантомных игроков. Фантомные игроки в данном случае – это первые m игроков в представлении остальных. Действительно, реально первые m игроков образуют коалицию, а в представлении остальные $(n – m)$ игроков они действуют независимо.

Целевые функции в действительности и в представлении игроков имеют следующий вид:

$$(15)\begin{cases} f_i = (1 - x_1 - \ldots - x_n)x_1 - \dfrac{x_1^2}{2r} + \ldots + (1 - x_1 - \ldots - x_n)x_m - \dfrac{x_m^2}{2r}, \ i \le m, \\ f_i = (1 - x_{i1} - \ldots - x_{in})x_i - \dfrac{x_i^2}{2r}, \ i > m, \\ f_{ji} = (1 - x_{j1} - \ldots - x_{jn})x_{ji} - \dfrac{x_{ji}^2}{2r}, \ \ j > m, i \le n, \\ x_{ii} = x_i, i \le n. \end{cases}$$

Здесь за x_{ij} обозначено действие j-го игрока в представлении i-го. При этом величины x_{ii} и x_i считаем совпадающими – каждый игрок имеет верные представления о своих действиях.

Концепцией решения рефлексивной игры является обобщение равновесие Нэша – информационное равновесие [2, 4], которое является, по сути, равновесием Нэша игры реальных и фантомных игроков. Находя информационное равновесие в этой игре, приходим к системе уравнений

$$(16)\begin{cases} 1 - \sum\limits_{k=1}^{m} x_k - \sum\limits_{k=1}^{n} x_k - \dfrac{x_i}{r} = 0, i \le m, \\ 1 - \sum\limits_{k=1}^{n} x_{ik} - x_i - \dfrac{x_i}{r} = 0, i > m, \\ 1 - \sum\limits_{k=1}^{n} x_{jk} - x_{ji} - \dfrac{x_{ji}}{r} = 0, \ j > m, i \le n, \\ x_{ii} = x_i, i \le n. \end{cases}$$

Как и в случае явной коалиции (раздел 3), попарно вычтем уравнения внутри каждой группы. Приходим к следующей системе:

$$
(17)\quad \begin{cases}
1-\sum\limits_{k=1}^{n}x_k-\sum\limits_{k=1}^{m}x_k-\dfrac{x_1}{r}=0,\\
\dfrac{1}{r}x_i-\dfrac{1}{r}x_{i+1}=0,\ i\le m-1,\\
1-\sum\limits_{k=1}^{n}x_{ik}-x_{m+1}-\dfrac{x_{m+1}}{r}=0,\\
\left(1+\dfrac{1}{r}\right)x_i-\left(1+\dfrac{1}{r}\right)x_{i+1}=0,\ m+1\le i\le n-1,\\
1-\sum\limits_{k=1}^{n}x_{jk}-x_{j1}-\dfrac{x_{j1}}{r}=0,\ j>m,\\
\left(\left(2+\dfrac{1}{r}\right)x_{j1}+\sum\limits_{k=2}^{n}x_{jk}\right)-\left(\left(2+\dfrac{1}{r}\right)x_{j+1,1}+\sum\limits_{k=2}^{n}x_{j+1,k}\right)=0,\ \ j>m,\\
\left(1+\dfrac{1}{r}\right)x_{ji}-\left(1+\dfrac{1}{r}\right)x_{j,i+1}=0,\ \ j>m, i<n,\\
x_{ii}=x_i,\, i\le n.
\end{cases}
$$

Аналогично случаю явной коалиции получаем равенство действий для игроков, находящихся внутри одной группы (т. е. игроков, вошедших в коалицию, не вошедших в нее и действия в представлении игроков, не вошедших в коалицию).

Таким образом, можно ввести обозначения для действий игроков по группам:

- реальные действия игроков, вошедших в коалицию, обозначим через x;
- реальные действия игроков, не вошедших в коалицию, обозначим через y;
- действия фантомных игроков – игроков, вошедших в коалицию, в представлении не вошедших в коалицию игроков обозначим через z.

Тогда систему (17) можно записать в следующем виде:

$$(18)\quad \begin{cases} \left(2m+\dfrac{1}{r}\right)x+(n-m)y=1, \\ \dfrac{y}{x}+(n+1)z=1, \\ \left(n+1+\dfrac{1}{r}\right)z=1, \\ z=y. \end{cases}$$

Действия игроков в таком случае примут следующий вид:

$$(19)\quad \begin{cases} x=\dfrac{r}{2mr+1}\dfrac{mr+r+1}{nr+r+1}, \\ y=\dfrac{r}{nr+r+1}. \end{cases}$$

Можно заметить, что при $m = 1$ (т. е. в случае, когда коалиция не образуется), действия игроков полностью совпадают с действиями в случае отсутствия союза в системе.

Выигрыш игроков, вошедших в коалицию таким образом составит

$$(20)\quad f=\frac{1}{2}\frac{r(mr+r+1)^2}{(nr+r+1)^2(2mr+1)},$$

а разница в выигрышах в случае заключения союза и в случае его отсутствия составит

$$(21)\quad \Delta f=\frac{1}{2}\frac{r^3(m^2-2m+1)}{(nr+r+1)^2(2mr+1)}.$$

Как и прежде, зафиксируем эффективности всех игроков на уровне $r = 1$ и построим график зависимости разности выигрышей при разном числе игроков в системе (см. рис. 6).

Легко видеть, что в случае «тайного сговора» максимальный выигрыш от создания коалиции игроки получают, как и в случае явной коалиции, при максимально возможном числе коалиционеров. Очевидное отличие от явного союза состоит в том, что тайный сговор всегда выгоден (повышает выигрыш участников).

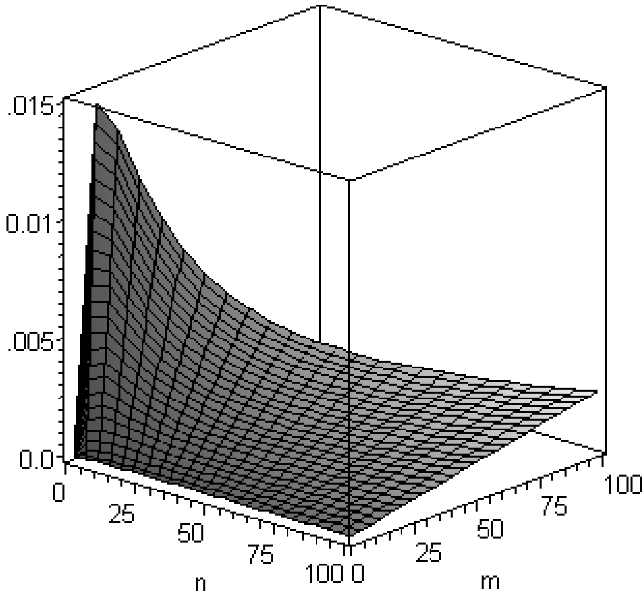

Рис. 6. Разница выигрышей участников коалиции при эффективности r = 1

Рассмотрим выигрыши и разницу в выигрышах (по сравнению с отсутствием коалиции) игроков, не попавших в союз. Для них эти значения записываются выражениями

(22) $$g = -\frac{1}{2}\frac{2mn - 8m + 4n - 3 - 4m^2}{(2m+1)(n+2)^2}.$$

и

(23) $$\Delta g = -\frac{mn - m + 2n - 2m^2}{(2m+1)(n+2)^2}.$$

Проследим зависимость разницы выигрышей при различном числе игроков в системе и числе игроков, заключивших союз (см. рис. 7).

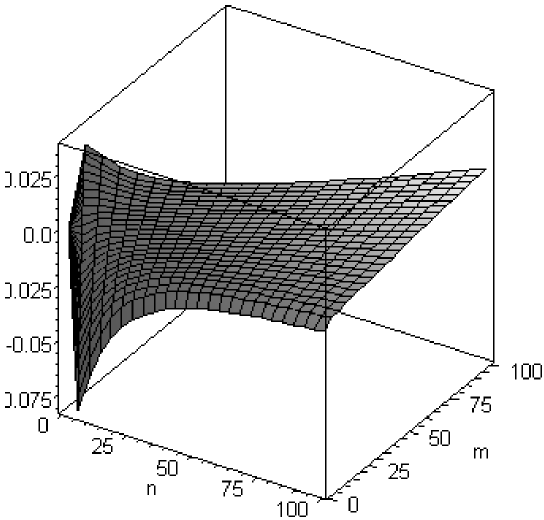

Рис. 7. Разница выигрышей игроков, не вошедших в коалицию, при эффективности $r = 1$

Можно заметить, что, как правило, игроки вне союза теряют в выигрыше. Однако если в союз вступило достаточно большое число игроков, игрокам вне коалиции это также выгодно.

Найдем, при каком размере тайной коалиции оставшиеся вне ее игроки оказываются в выигрыше. Из соотношения (23) легко видеть, что находящиеся вне коалиции игроки оказываются в выигрыше (по сравнению с отсутствием коалиции) при достаточно больших m – начиная с

(24) $m = \frac{1}{4}n - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{n^2 + 14n + 1}$

или, для неограниченно возрастающего n, – при $m \approx n/2$.

Завершая рассмотрение случая скрытых коалиций, отметим, что возникающее при этом информационное равновесие не является стабильным (см. [4]) – результат игры будет неожиданным для не вошедших в коалицию агентов. Для описания динамики представлений агентов в рефлексивных играх требуется более сложная конструкция (см. [5]), однако этот вопрос выходит за рамки данной работы.

5. Заключение

В работе рассмотрена модель олигополии с явно или тайно существующей коалицией. При рассмотрении этой модели удалось выявить следующее:

- явно заключенный союз не всегда приносит дополнительную выгоду его участникам;
- явный союз, затрагивающий всех (или почти всех) участников рынка (монополия) приносит наибольший прирост в прибыли для всех участников коалиции;
- неявно заключенный союз всегда приносит дополнительные прибыли его участникам;
- тайный союз может быть полезен и не участвующим в нем игрокам.

Перспективным представляется исследование вопросов формирования явных и тайных коалиций (в том числе – нескольких коалиций) в других типах игр, а также выявление общих закономерностей взаимодействия в условиях неполной информации о существовании коалиций.

Литература

1. ГУБКО М. В., НОВИКОВ Д. А. *Теория игр в управлении организационными системами*. – М.: СИНТЕГ, 2002.
2. НОВИКОВ Д. А., ЧХАРТИШВИЛИ А. Г. *Рефлексивные игры*. – М.: СИНТЕГ, 2003.
3. НУРЕЕВ Р. М. *Курс микроэкономики. Учебник для вузов*. – М.: ИНФРА-М, 1999.
4. ЧХАРТИШВИЛИ А. Г. *Теоретико-игровые модели информационного управления*. – М.: ЗАО «ПМСОФТ», 2004.

5. ЧХАРТИШВИЛИ А. Г. *Рефлексивные игры: трансформация структур информированности* // Проблемы управления. – 2008. – № 5. – С. 43-48.

IMPLICIT AND EXPLICIT COALITIONS IN REFLEXIVE GAMES

Alexander Chkhartishvili, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, D.Sc., (sandro_ch@mail.ru).
Alexander Gontarev, Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, student (alexander.gontarev@gmail.com).

Abstract: A model of the oligopolistic market is considered. Market participants can conclude an agreement to maximize their aggregate profit (they can conclude this agreement implicitly or explicitly). Each member of the union maximizes the profit of coalition while all other market participants maximize their own profit. The case of implicit union is modeled with the concept of informational equilibrium of reflexive game.

Keywords: oligopoly, implicit coalition, explicit coalition, reflexive game.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии П. Ю. Чеботаревым.