УДК 35.073.5
ББК 22.18

ВОПРОСЫ СОГЛАСОВАНИЯ ИНТЕРЕСОВ В РЕГИОНАЛЬНОЙ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СОХРАНЕНИЯ ПРИРОДНЫХ РЕСУРСОВ

Золотова Т. В.[1]
(Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, Комсомольск-на-Амуре)

Рассмотрена двухуровневая иерархическая система с одним элементом верхнего уровня и n *элементами нижнего уровня. Получены необходимые и достаточные условия экстремума для верхнего уровня (центра). На примере региональной модели рационального использования природных ресурсов показано, когда необходимые условия экстремума для регионального центра являются необходимыми и достаточными условиями. Представлены различные механизмы назначения цен на ресурсы, квот, штрафа, регулирования финансовых средств для предприятий, с помощью которых в иерархической системе можно достичь идеальной согласованности.*

Ключевые слова: иерархическая система, региональный центр, производственные единицы, идеальная согласуемость, условия оптимальности, цены на ресурсы, квоты, штраф.

1. Введение

В основе изучения любой иерархической системы управления лежит анализ взаимодействия между двумя элементами, один из которых находится в непосредственном подчинении у другого. Первый называют подсистемой, второй – центром.

[1] *Золотова Татьяна Валерьяновна, кандидат физико-математических наук, доцент (tgold11@mail.ru).*

Вопросы исследования иерархических систем освещались, например, в [1, 2, 3, 6].

Описание функционирования иерархической системы управления подразумевает задание порядка принятия решений (выбора управляющих параметров) и информированности всех элементов в моменты принятия решений, а также принципов выбора при всех возможных видах информированности (с точки зрения центра). Выбирая управляющие параметры и передавая информацию подсистемам, центр стремится к тому, чтобы в процессе функционирования системы добиться выполнения необходимых глобальных ограничений на параметры системы (в широком смысле устойчивости или гомеостазиса системы) и в пределах области допустимости (гомеостазиса) оптимизировать значение своего критерия эффективности.

Основным условием устойчивости и эффективности функционирования в иерархической системе является согласованность интересов всех ее элементов. Интересы элементов согласуемы, если центр может обеспечить устойчивое функционирование системы. Если при этом центр может достичь абсолютного максимума своего критерия эффективности, то интересы элементов системы идеально согласуемы.

Таким образом, задачи управления в иерархических системах имеют смысл, если выполняется условие согласуемости. При этом условие идеальной согласуемости в общем случае может и не выполняться, а на практике выполняется достаточно редко. Поэтому будем ставить и решать задачи в общем случае, и, анализируя их, показывать, когда можно рассчитывать на идеальную согласованность.

К одной такой общей постановке задачи управления в иерархических системах мы и переходим.

2. Необходимые и достаточные условия оптимальности для центра

Рассмотрим двухуровневую иерархическую систему с одним элементом верхнего уровня (центром) и n элементами нижнего уровня (подсистемами). Обозначим управление центра через u, считая его точкой некоторого пространства U. Управление подсистем обозначим v_i, $i = 1, \ldots, n$, а управление нижнего уровня в целом через $v = (v_1, \ldots, v_n)$, также считая его точкой некоторого пространства V. При выборе центром управления и передаче некоторой фиксированной информации об этом выборе множество возможных управлений нижнего уровня есть $R(u) \subseteq V$.

Если фазовое состояние системы x однозначно определяется управлениями u, v, то условие устойчивости системы или скоординированности всех управлений может быть записано в виде

(1) $(u, v) \in \Omega$,

где множество $\Omega \subseteq U \times V$ представляет собой совокупность управлений, приводящих к устойчивым состояниям.

Множество допустимых управлений центра, обеспечивающих выполнение условия устойчивости (1), есть

(2) $D = \{u \in U \mid (u, v) \in \Omega \quad \forall v \in R(u)\}$.

Критерии эффективности элементов нижнего уровня являются функционалами от управлений верхнего и нижнего уровней, то есть $G_i(u, v_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Пространства управлений подсистем $V_i(u)$ зависят от управления центра, т. е. центр имеет возможность в определенных пределах регламентировать свободу их действий. Будем считать, что подсистема при выборе управления стремиться максимизировать $G_i(u, v_i)$. Тогда оптимальная стратегия i-ой подсистемы $v_i^0(u)$ определяется из условия

(3) $G_i(u, v_i^0(u)) = \max\limits_{v_i \in V_i(u)} G_i(u, v_i)$.

При этом реакция i-ой подсистемы есть

$$R_i(u) = Arg \max_{v_i \in V_i(u)} G_i(u, v_i) .$$

Множество возможных управлений нижнего уровня имеет вид $R(u) = \prod\limits_{i=1}^{n} R_i(u)$.

Пусть критерий эффективности центра представляет собой функционал $F(u, v)$. Задача центра заключается в нахождении оптимального гарантирующего управления u^0 и результата F^0, удовлетворяющих соотношению

(4) $F^0 = \max\limits_{u \in D} \inf\limits_{v \in R(u)} F(u, v)$.

Если максимум в задаче (3) определяется однозначно или центру известен выбор нижнего уровня, т. е. имеется соотношение $R_i(u) = arg \max\limits_{v_i \in V_i(u)} G_i(u, v_i)$, то

(5) $F^0 = \max\limits_{u \in D} F(u, v^0(u))$.

Пусть пространство управлений нижнего уровня задается системой неравенств:

(6) $V_i(u) = \{v_i \mid g_i(u, v_i) \geq 0\}$,

где u, v_i – точки конечномерных евклидовых пространств; $g_i(u, v_i)$ – вектор-функция размерности m_i.

Множество Ω будем считать заданным в виде

(7) $\Omega = \{(u, v) \mid j(u, v) \geq 0\}$,

где $j(u, v)$ – вектор-функция размерности l.

В [3] сформулированы необходимые условия для центра, а в [4] необходимые условия экстремума получены для конкретной задачи ценообразования. Мы займемся вопросом получения необходимых и достаточных условий экстремума для центра в общем виде, но сначала докажем две леммы.

Будем считать векторную функцию $y(x) = (y_1(x), \ldots, y_i(x), \ldots, y_n(x))$ вогнутой по переменной x, если каждая ее компонента $y_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$ есть вогнутая функция по x.

Лемма 1. Пусть X и Y – выпуклые множества, и для некоторой непрерывно дифференцируемой функции $h(x, y)$ $\forall x \in X$, $y \in Y$ выполнены условия: (а) $\partial h(x, y)/\partial y_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$; (б) функция $h(x, y)$ вогнута по совокупности переменных; (в) $y(x)$ является вогнутой функцией переменной x.

Тогда сложная функция $h(x, y(x))$ вогнута по x.

Доказательство. Покажем, что $\forall x^1, x^2 \in X$, $a \in [0; 1]$ выполняется соотношение

$$
\begin{aligned}
(8)\quad & h(a\,x' + (1-a\,)x'', y(a\,x' + (1-a\,)x'')) \geq \\
& \geq a\,h(x', y(x')) + (1-a\,)h(x'', y(x'')).
\end{aligned}
$$

В силу условия (в) имеем $y(ax¢ + (1 - a)x^2) \geq ay(x^{¢}) + (1 - a)y(x^2)$. Тогда согласно (а) получаем $h(x, y(ax¢ + (1 - a)x^2)) \geq$ $\geq h(x,\ ay(x^{¢}) + (1 - a)y(x^2))$.

Пусть $x = ax^{¢} + (1 - a)x^2$, тогда последнее соотношение равносильно следующему

$$
\begin{aligned}
(9)\quad & h(a\,x' + (1-a\,)x'', y(a\,x' + (1-a\,)x'')) \geq \\
& \geq h(a\,x' + (1-a\,)x'', a\,y(x') + (1-a\,)\,y(x'')).
\end{aligned}
$$

В силу условия (б) имеем

$$
\begin{aligned}
(10)\quad & h(ax' + (1-a\,)x'', ay(x') + (1-a\,)\,y(x'')) \geq \\
& \geq a h(x', y(x')) + (1-a\,)h(x'', y(x'')).
\end{aligned}
$$

Из (9) и(10) следует (8). Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть X и Y – выпуклые множества, и для некоторой непрерывно дифференцируемой функции $h(x, y)$ $\forall x \in X$, $y \in Y$ выполнены условия: (а) $\partial h(x, y)/\partial y_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$; (б) $y(x) = \arg\max\limits_{y \in Y} h(x, y)$.

Тогда $y(x)$ является вогнутой функцией переменной x.

Доказательство. Вогнутость функции $y(x)$ означает, что $\forall x^{¢}, x^{2} \in X, \forall a \in [0; 1]$ выполняется соотношение

$y(ax¢ + (1 - a)x^2) \geq ay(x^{¢}) + (1 - a)y(x^2)$.

Предположим противное, т. е.

$\exists x^{¢}, x^{2}, a, k,\ y_k(ax¢ + (1 - a)x^2) < ay_k(x^{¢}) + (1 - a)y_k(x^2)$.

Согласно (а) $h(x, y_1, \ldots, y_k(ax¢ + (1 - a)x^2), \ldots, y_n) <$ $< h(x, y_1, \ldots, ay_k(x^{¢}) + (1 - a)y_k(x^2), \ldots, y_n)$.

Пусть $x = ax^{¢} + (1 - a)x^2$, $y_i = y_i(ax^{¢} + (1 - a)x^2)$, i ¹ k, тогда в силу (б) имеем

$$
\begin{aligned}
& \max_{y \in Y} h(ax' + (1-a\,)x'', y) < \\
& < h(ax' + (1-a\,)x'', y_1, ..., ay_k(x') + (1-a\,)\,y_k(x''), ..., y_n) \leq \\
& \leq \max_{y \in Y} h(ax' + (1-a\,)x'', y).
\end{aligned}
$$

Получили противоречие. Лемма доказана.

Введем функцию Лагранжа для задачи (3), (6):

(11) $L_i(u, v_i, l_i) = G_i(u, v_i) + \langle l_i, g_i(u, v_i) \rangle$,

где l_i – векторный множитель Лагранжа, $l_i \geq 0$.

Теорема 1. Пусть в задаче (3), (6), (5), (7) выполнены следующие условия:

1^0. Функция $F(u, v)$ и компоненты вектор-функции $j(u, v)$ непрерывно дифференцируемые по всем переменным, вогнутые по совокупности переменных; функции $G_i(u, v_i)$ и компоненты вектор-функций $g_i(u, v_i)$ $i = 1, \ldots, n,$ – дважды непрерывно дифференцируемые, вогнутые по совокупности переменных;

2^0. $\partial j_k(u, v)/\partial v_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, l$;

3^0. $\partial F(u, v)/\partial v_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$;

4^0. Градиенты $\partial g_i(u^0, v^0)/\partial v$, $i \in I = \{i \mid i = 1, \ldots, n, g_i(u^0, v^0) = 0\}$ в точке (u^0, v^0) линейно независимы; v^0 – решение задачи (3), (6) при $u = u^0$;

5^0. $l_i^0 > 0$ (строгая дополняющая нежесткость); l_i^0 – векторный множитель Лагранжа, соответствующий (u^0,v^0);

6^0. $\langle h, (\partial^2 L_i(u^0, v_i^0, l_i^0)/\partial v_i^2)h\rangle < 0$ $\forall h \neq 0$ такого, что $\langle \partial g_i(u^0, v^0)/\partial v, h\rangle = 0$, $i \in I$.

7^0. Для функции $G_i(u, v_i)$, $i = 1, \ldots, n$ выполняются условия $\partial G_i(u, v_i)/\partial v_{ij} > 0$, $j = 1, \ldots, m$.

Тогда для того чтобы u^0 являлась оптимальной стратегией центра для задачи (5), (7) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\frac{\partial F(u^0,v^0)}{\partial u} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(u^0,v^0)}{\partial v_i} \cdot \left[\frac{\partial v_i^0(u^0)}{\partial u}\right]^{\mathrm{T}} +$$

$$(12)\quad + \left\langle m,\ \left[\frac{\partial f(u^0,v^0(u^0))}{\partial u}\right] + \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial f(u^0,v^0(u^0))}{\partial v_i}\right] \cdot \left[\frac{\partial v_i^0(u^0)}{\partial u}\right]^{\mathrm{T}} \right\rangle = 0,$$

$$\langle m, f(u^0,v^0)\rangle = 0,$$

где матрица частных производных функций $v_i^0(u^0)$ определяется из матричного соотношения

$$
\begin{pmatrix} \left[\dfrac{\partial v_i^0(u^0)}{\partial u}\right]^{\mathrm{T}} \\ \left[\dfrac{\partial l_i(u^0)}{\partial u}\right]^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} =
$$

$$
(13)\quad \begin{pmatrix} \left[\dfrac{\partial^2 G_i(u^0,v_i^0(u^0))}{\partial v_i^2}\right] + [\,l_i(u^0)]\left[\dfrac{\partial^2 g_i(u^0,v_i^0(u^0))}{\partial v_i^2}\right]^{\mathrm{T}} & \left[\dfrac{\partial g_i(u^0,v_i^0(u^0))}{\partial v_i}\right] \\ [\,l_i(u^0)]\left[\dfrac{\partial g_i(u^0,v_i^0(u^0))}{\partial v_i}\right]^{\mathrm{T}} & \left[g_i(u^0,v_i^0(u^0))\right] \end{pmatrix}^{-1} \times
$$

$$
\times \begin{pmatrix} -\left[\dfrac{\partial^2 G_i(u^0,v_i^0(u^0))}{\partial v_i \partial u}\right] - [\,l_i(u^0)]\left[\dfrac{\partial^2 g_i(u^0,v_i^0(u^0))}{\partial v_i \partial u}\right]^{\mathrm{T}} \\ -[\,l_i(u^0)]\left[\dfrac{\partial g_i(u^0,v_i^0(u^0))}{\partial u}\right]^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},
$$

$[\cdot]$ – обозначение матрицы, Т – знак транспонирования матрицы.

Доказательство. Согласно условиям 1^0, 4^0, 5^0, 6^0 теоремы функция $G_i(u, v_i)$ имеет единственный глобальный максимум по v_i при фиксированном u, т. е. имеем однозначную функцию $v_i^0(u) = \arg \max\limits_{v_i \in V_i(u)} G_i(u, v_i)$. Поэтому необходимые и достаточные условия оптимальности для нижнего уровня (см., например, [5]) имеют вид

$$
(14)\quad \frac{\partial L_i(u, v_i^0, l_i)}{\partial v_i} = 0, \quad \left\langle l_i, g_i(u, v_i^0) \right\rangle = 0.
$$

Или более подробно

$$
(15)\quad \frac{\partial G_i(u, v_i^0)}{\partial v_i} + [\,l_i]\left[\frac{\partial g_i(u, v_i^0)}{\partial v_i}\right]^{\mathrm{T}} = 0, \quad \left\langle l_i, g_i(u, v_i^0) \right\rangle = 0.
$$

Оптимальный выбор нижнего уровня v_i^0 и множитель Лагранжа l_i зависят от u.

Продифференцируем соотношения (15) по u:

$$\left[\frac{\partial^2 G_i(u,v_i^0(u))}{\partial v_i \partial u}\right]+\left[\frac{\partial^2 G_i(u,v_i^0(u))}{\partial v_i^2}\right]\cdot\left[\frac{\partial v_i^0(u)}{\partial u}\right]^{\mathrm{T}}+$$

$$+\left[\frac{\partial l_i(u)}{\partial u}\right]\cdot\left[\frac{\partial g_i(u,v_i^0(u))}{\partial v_i}\right]^{\mathrm{T}}+[l_i(u)]\left[\frac{\partial^2 g_i(u,v_i^0(u))}{\partial v_i \partial u}\right]^{\mathrm{T}}+$$

$$+[l_i(u)]\left[\frac{\partial^2 g_i(u,v_i^0(u))}{\partial v_i^2}\right]^{\mathrm{T}}\cdot\left[\frac{\partial v_i^0(u)}{\partial u}\right]^{\mathrm{T}})=0, \tag{16}$$

$$\left[\frac{\partial l_i(u)}{\partial u}\right]\cdot(g_i(u,v_i^0(u)))^{\mathrm{T}}+[l_i(u)]\left[\frac{\partial g_i(u,v_i^0(u))}{\partial u}\right]^{\mathrm{T}}+$$

$$+[l_i(u)]\left[\frac{\partial g_i(u,v_i^0(u))}{\partial v_i}\right]^{\mathrm{T}}\cdot\left[\frac{\partial v_i^0(u)}{\partial u}\right]^{\mathrm{T}})=0.$$

Перепишем соотношения (16) в виде

$$\left[\frac{\partial^2 G_i(u,v_i^0(u))}{\partial v_i^2}\right]\cdot\left[\frac{\partial v_i^0(u)}{\partial u}\right]^{\mathrm{T}}+$$

$$+[l_i(u)]\left[\frac{\partial^2 g_i(u,v_i^0(u))}{\partial v_i^2}\right]^{\mathrm{T}}\left[\frac{\partial v_i^0(u)}{\partial u}\right]^{\mathrm{T}}+$$

$$+\left[\frac{\partial g_i(u,v_i^0(u))}{\partial v_i}\right]\cdot\left[\frac{\partial l_i(u)}{\partial u}\right]^{\mathrm{T}}= \tag{17}$$

$$=-\left[\frac{\partial^2 G_i(u,v_i^0(u))}{\partial v_i \partial u}\right]-[l_i(u)]\left[\frac{\partial^2 g_i(u,v_i^0(u))}{\partial v_i \partial u}\right]^{\mathrm{T}},$$

$$[l_i(u)]\left[\frac{\partial g_i(u,v_i^0(u))}{\partial v_i}\right]^{\mathrm{T}}\left[\frac{\partial v_i^0(u)}{\partial u}\right]^{\mathrm{T}}+[g_i(u,v_i^0(u))]\cdot\left[\frac{\partial l_i(u)}{\partial u}\right]^{\mathrm{T}}=$$

$$=-[l_i(u)]\left[\frac{\partial g_i(u,v_i^0(u))}{\partial u}\right]^{\mathrm{T}}.$$

Из условий 4^0, 5^0, 6^0 теоремы следует невырожденность матрицы Якоби

$$\begin{pmatrix} \left[\dfrac{\partial^2 G_i(u,v_i^0(u))}{\partial v_i^2}\right]+[l_i(u)]\left[\dfrac{\partial^2 g_i(u,v_i^0(u))}{\partial v_i^2}\right]^{\mathrm{T}} & \left[\dfrac{\partial g_i(u,v_i^0(u))}{\partial v_i}\right] \\ [l_i(u)]\left[\dfrac{\partial g_i(u,v_i^0(u))}{\partial v_i}\right]^{\mathrm{T}} & \left[g_i(u,v_i^0(u))\right] \end{pmatrix}$$

системы (15) относительно неизвестных v_i и l_i в точке u^0.

Значит, по теореме о неявной функции в некоторой окрестности точки u^0 существуют однозначные непрерывно дифференцируемые вектор-функции $v_i^0(u)$, $l_i(u)$, удовлетворяющие системе (15), при этом система (17) разрешима относительно неизвестных $\partial v_i^0(u)/\partial u$, $\partial l_i(u)/\partial u$, т. е. имеет место соотношение (13). Согласно условию 7^0 теоремы 1 полученные вектор-функции $v_i^0(u)$ являются вогнутыми.

Для задачи центра (5), (2), (7) функция Лагранжа имеет вид

(18) $L_0(u,m)=F(u,v^0(u))+\left\langle m, j(u,v^0(u))\right\rangle,$

где m – векторный множитель Лагранжа, $m \geq 0$.

Так как все условия леммы 1 для функций $F(u, v^0(u))$, $j(u, v^0(u))$, $v^0(u)$ выполнены, то $F(u, v^0(u))$ является вогнутой по u на выпуклом множестве D, определенном (2), (7). Поэтому для оптимальности стратегии центра u^0 необходимо и достаточно выполнения соотношений

(19) $\dfrac{\partial L_0(u^0,m)}{\partial u}=0$, $\left\langle m, j(u^0,v^0(u^0))\right\rangle=0$.

Или более подробно

$$\frac{\partial F(u^0,v^0)}{\partial u}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F(u^0,v^0)}{\partial v_i}\cdot\left[\frac{\partial v_i^0(u^0)}{\partial u}\right]^{\mathrm{T}}\right)+$$

(20) $$+\left\langle m, \left[\frac{\partial f(u^0,v^0(u^0))}{\partial u}\right]+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f(u^0,v^0(u^0))}{\partial v_i}\right]\cdot\left[\frac{\partial v_i^0(u^0)}{\partial u}\right]^{\mathrm{T}}\right\rangle=0,$$

$$\left\langle m, f(u^0,v^0)\right\rangle=0.$$

Теорема доказана.

Полученные необходимые и достаточные условия оптимальности можно конкретизировать для разных видов ограничений, в частности, когда имеются условия неотрицательности $u \geq 0, v \geq 0$.

Оптимальный результат центра может отличаться от глобального максимума его критерия. Рассмотрим это на примере региональной модели рационального использования природных ресурсов.

3. Региональная модель сохранения природных ресурсов без назначения штрафа

Предположим, что региональный центр устанавливает цены $p = (p_1, \ldots, p_m)$ на природные ресурсы (вода, земля, лес) и дефицитные ресурсы (электричество, газ). Такие цены могут рассчитываться с учетом платы за подключение, использование, сбросы и т.п. Центр также имеет возможность выделять финансовые средства K_i, $i = 1, \ldots, n$ предприятиям. Например, центр в рамках федеральной целевой программы участвует в развитии некоторой отрасли промышленности и финансирует инвестиционные проекты в объеме K_i, $i = 1, \ldots, n$. Тогда пространства управлений производственных единиц имеют вид

(21) $X_i(p, K_i) = \{x_i \mid \langle p, x_i \rangle \leq K_i, x_i \geq 0\}$, $i=1, \ldots, n$.

где $x_i=(x_{i1}, \ldots, x_{ij}, \ldots, x_{im})$ - вектор ресурсов, потребляемых i-й производственной единицей (предприятием, объединением).

Выпуск каждого предприятия определяется векторной производственной функцией $f_i(x_i)$, для которой выполняются условия

(22) $$f_i(0) = 0, \frac{\partial f_i(x_i)}{\partial x_{ij}} > 0, \left\langle x \frac{\partial^2 f_{ik}(x_i)}{\partial x_i^2}, x \right\rangle < 0,$$

где $f_{ik}(x_i)$ – k-я компонента векторной функции $f_i(x_i)$.

Если c_i – вектор цен на соответствующие виды продукции i-го предприятия или объединения, то задачу максимизации валового выпуска $M_i(x_i, p, K_i)$ каждого предприятия можно записать в виде

(23) $M_i(x_i, p, K_i) = \langle c_i, f_i(x_i) \rangle \to \max\limits_{x_i | \langle p, x_i \rangle \le K_i}$.

Решение задачи i-го предприятия есть вектор $x_i^0(p, K_i)$.

Пусть центр стремится к увеличению взвешенной суммы валовых выпусков предприятий, тогда целевая функция центра есть

(24) $F_0(x_i, p, K_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i M_i(x_i, p, K_i)$,

где a_i – положительные весовые коэффициенты, которые могут отражать, например, социальные, экологические приоритеты.

При ограничениях, связанных с использованием природных и дефицитных ресурсов получаем задачу для центра

$$F_0(x^0(p, K), p, K) =$$

(25) $= \sum\limits_{i=1}^{n} a_i M_i(x_i^0(p, K_i), p, K_i) \to \max\limits_{(p,K) | \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^0(p, K_i) \le X}$,

где X – ограничение по объемам природных и дефицитных ресурсов, $K = (K_1, \ldots, K_i, \ldots, K_n)$.

3.1. МЕХАНИЗМЫ НАЗНАЧЕНИЯ ЕДИНЫХ ЦЕН НА РЕСУРСЫ

В [4] рассмотрена задача потребления в математической постановке аналогичная рассматриваемой задаче и показано, что, управляя ценами $p = (p_1, \ldots, p_m)$ и финансовыми средствами K_i, $i = 1, \ldots, n$, можно достичь идеальной согласованности интересов всех уровней иерархии. В [4] также показано, что, управляя только ценами $p = (p_1, \ldots, p_m)$ при неизменных финансовых средствах $\overline{K}_i$, центр, вообще говоря, не может достичь идеальной согласованности.

Обратимся к теореме 1, т. е. посмотрим, когда условия оптимальности для центра в задаче (25) будут являться необходимыми и достаточными условиями.

Функция цели задачи (25) удовлетворяет условиям (а) и (б) (в отношении стратегии нижнего уровня x_i, $i = 1, \ldots, n$) леммы 1 ввиду особенностей производственной функции. Если предположить, что функция $x_i^0(p, \bar{K}_i)$ вогнута по p (выполнено свойство (в) леммы 1), то функция цели задачи (24) является вогнутой. Однако вогнутость $x_i^0(p, \bar{K}_i)$ приводит к тому, что функция ограничений задачи (25) $X - \sum_{i=1}^{n} x_i^0(p, \overline{K}_i)$ становится выпуклой и задача (25) не будет являться задачей выпуклого программирования. Значит, условия (12) представляют собой, вообще говоря, необходимые, но не достаточные условия оптимальности центра. Исключение составляет случай, когда $x_i^0(p, \bar{K}_i)$ – линейная функция по p. Тогда согласно теореме 1 условия (12) являются необходимыми и достаточными условиями оптимальности для центра.

3.2. МЕХАНИЗМЫ НАЗНАЧЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ДЛЯ ПРЕДПРИЯТИЙ ЦЕН НА РЕСУРСЫ

Исследуем теперь вопрос, можно ли использовать другой механизм управления ценами на ресурсы, чтобы центр мог достичь при фиксированных объемах средств $\overline{K}_i$ идеальной согласованности. Оказывается, как будет показано ниже, устанавливая для каждого предприятия определенные цены на ресурсы, можно добиться идеальной согласованности.

Задача каждого предприятия имеет вид

(26) $\breve{M}_i(x_i, p_i) = \langle c_i, f_i(x_i)\rangle \to \max\limits_{x_i \in X_i(p_i)}$,

где $X_i(p_i) = \{x_i \mid \langle p_i, x_i\rangle \le \bar{K}_i,\ x_i \ge 0\}$, $i = 1, \ldots, n$, $p_i = (p_{i1}, \ldots, p_{ij}, \ldots, p_{im})$. Решение задачи (26) дает вектор $x_i^0(p_i)$.

Задача центра есть

(27) $\breve{F}_0(x^0(\vec{p}), \vec{p}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \breve{M}_i(x_i^0(p_i), p_i) \to \max\limits_{\vec{p} \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^0(p_i) \le X}$.

Решение для центра есть $\vec{p}^{\,0} = (p_1^0, \ldots, p_i^0, \ldots, p_n^0)$.

Теорема 2. Пусть функции $\breve{M}_i(x_i, p_i)$, $i = 1, \ldots, n$, непрерывны и строго вогнуты по совокупности переменных и имеют непрерывные положительные производные по всем переменным. Тогда при фиксированных объемах средств $\overline{K}_i$, $i = 1, \ldots, n$, выбором различных цен на ресурсы p_i для элементов нижнего уровня в задаче (27) центр достигает глобального максимума, т. е. интересы в такой системе идеально согласованы

Доказательство. При любом i функция $\breve{M}_i(x_i, p_i)$ имеет на компактном выпуклом множестве $X_i(p_i)$ при фиксированном p_i единственный глобальный максимум. Составим для задачи на условный экстремум (26) функцию Лагранжа

$$L_i(x_i, l_i) = \breve{M}_i(x_i, p_i) + l_i(\overline{K}_i - \langle p_i, x_i \rangle),$$

где $l_i \geq 0$ – множитель Лагранжа. Для того чтобы точка $x_i^0 = (x_{i1}^0, \ldots, x_{ij}^0, \ldots, x_{im}^0)$ была точкой максимума, необходимо и достаточно, чтобы для каждой переменной x_{ij}^0 выполнялись условия

$$\frac{\partial L_i(x_i^0, l_i)}{\partial x_{ij}} \leq 0, \quad \frac{\partial L_i(x_i^0, l_i)}{\partial x_{ij}} x_{ij}^0 = 0, \quad l_i \frac{\partial L_i(x_i^0, l_i)}{\partial l_i} = 0,$$

(28)

$$\frac{\partial L_i(x_i^0, l_i)}{\partial l_i} \geq 0, \quad x_{ij}^0 \geq 0,\ l_i \geq 0, i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m.$$

Возьмем производные функции Лагранжа и запишем условия (28) в виде

$$\frac{\partial \langle c_i, f_i(x_i^0) \rangle}{\partial x_{ij}} - l_i p_{ij} \leq 0, \quad \left(\frac{\partial \langle c_i, f_i(x_i^0) \rangle}{\partial x_{ij}} - l_i p_{ij}\right) x_{ij}^0 = 0,$$

(29) $$l_i(\overline{K}_i - \langle p_i, x_i^0 \rangle) = 0, \quad \overline{K}_i - \langle p_i, x_i^0 \rangle \geq 0,$$

$$x_{ij}^0 \geq 0,\ l_i \geq 0, i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m.$$

Функция $\breve{F}_0(x, \vec{p}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \breve{M}_i(x_i, p_i)$ как линейная комбинация непрерывных строго вогнутых и монотонных функций также является непрерывной строго вогнутой и монотонной, поэтому она имеет единственный глобальный максимум на множестве, определяемом ограничением $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq X$. Причем это ограничение в точке максимума выполняется как равенство.

Пусть $x_i^* = (x_{i1}^*, \ldots, x_{ij}^*, \ldots, x_{im}^*)$ доставляют глобальный максимум функции $\breve{F}_0(x, \vec{p}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \breve{M}_i(x_i, p_i)$. Функция Лагранжа есть

$$L(x, m) = \sum_{i=1}^{n} a_i \breve{M}_i(x_i, p_i) + \left\langle m, X - \sum_{i=1}^{n} x_i \right\rangle,$$

где $m = (m_1, \ldots, m_m)$ – вектор множителей Лагранжа.

Тогда необходимые и достаточные условия экстремума таковы:

$$(30)\quad (a_i \frac{\partial \left\langle c_i, f_i(x_i^*) \right\rangle}{\partial x_{ij}} - m_j) x_{ij}^* = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^* = X, \quad x_{ij}^* \geq 0, m_j \geq 0,$$

$$i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m.$$

Для того чтобы доказать утверждение теоремы, достаточно показать, что центр может выбрать такие $\vec{p}$, что для нижнего уровня $x_i^0 = x_i^*$, $i = 1, \ldots, n$.

Так как $X > 0$ и $\sum_{i=1}^{n} x_i^* = X$, то $\forall j$ $\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^* > 0$, т. е. $\forall j\ \exists i$ такое, что $x_{ij}^* > 0$ и из (30) $a_i(\partial\langle c_i, f_i(x_i^*)\rangle/\partial x_{ij}) = m_j$. По условию теоремы $a_i > 0$, $\partial\langle c_i, f_i(x_i^*)\rangle/\partial x_{ij} > 0$ $\forall x_i$, то $m_j > 0$, $j = 1, \ldots, m$.

Определим вектор цен так: $p_{ij} = k_i m_j$, где k_i такие, что имеет место равенство $\bar{K}_i = \langle p_i, x_i^* \rangle$. Тогда из (29) имеем равенство $l_i k_i m_j = m_j / a_i$, из которого получаем $l_i = 1/k_i a_i$.

Значит, x_i^* удовлетворяет условиям (29), т. е. x_i^* является оптимумом для нижнего уровня при заданных дифференцированных ценах на ресурсы p_i, что и требовалось доказать.

Рассмотрим другие постановки задачи сохранения природных ресурсов, в которых при фиксированных объемах финансовых средств $\bar{K}_i$, $i = 1, \ldots, n$, идеальная согласованность может быть достигнута.

4. Региональная модель сохранения природных ресурсов с назначением штрафа

Предположим, что центр при фиксированных объемах финансовых средств $\overline{K}_i$, $i = 1, \ldots, n$, имеет возможность назначать единые цены p, а также штрафовать предприятия за превышение ограничений, установленных для конкретного предприятия и связанных с использованием природных и дефицитных ресурсов. Размер штрафа z_i за единицу превышения назначается центром. В качестве функции штрафа возьмем максимальное превышение по всем ресурсам. Тогда целевые функции предприятий есть

(31) $\hat{\hat{M}}_i(x_i, p, z_i, b_i) = \langle c_i, f_i(x_i) \rangle - z_i \max\limits_{1 \le j \le m} \max(0, x_{ij} - b_i X_j)$,

$i = 1, \ldots, n$.

Квоты b_i удовлетворяют условиям $b_i \ge 0$, $i = 1, \ldots, n$, $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i = 1$ и определяются центром.

Каждое предприятие решает задачу

(32) $\langle c_i, f_i(x_i) \rangle - z_i \max\limits_{1 \le j \le m} \max(0, x_{ij} - b_i X_j) \to \max\limits_{x_i | \langle p, x_i \rangle \le \overline{K}_i}$.

Решение этой задачи есть вектор $\hat{x}_i^0(p, z_i, b_i)$.

В данной модели предполагается, что центр в своей целевой функции не учитывает выплачиваемый предприятиями штраф, т. е. целевая функция для центра имеет вид

(33) $\hat{F}_0(x, p, z, b) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \hat{M}_i(x_i, p, z_i, b_i)$.

где $\hat{M}_i(x_i, p, z_i, b_i) = \langle c_i, f_i(x_i) \rangle$. Задача центра принимает вид

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \hat{M}_i(\hat{x}_i^0(p, z_i, b_i), p, z_i, b_i) \to \max_{p, z, b \in Q}$$

(34) $Q = \{(p, z, b) \mid b \ge 0,$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = 1, p \ge 0, z \ge 0, \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i^0(p, z_i, b_i) \le X\}.$$

Решение для центра есть (p^0, z^0, b^0).

4.1. *МЕХАНИЗМЫ НАЗНАЧЕНИЯ ЕДИНЫХ ЦЕН НА РЕСУРСЫ, ВЕЛИЧИНЫ ШТРАФА И КВОТ*

Исследуем вопрос, при каких условиях в региональной модели с назначением штрафа возможна идеальная согласованность интересов всех уровней иерархии, т. е. может ли центр достичь своего глобального максимума.

Теорема 3. Пусть функции $\hat{M}_i(\hat{x}_i^0(p, z_i, b_i), p, z_i, b_i)$, $i = 1, \ldots, n$ непрерывны и строго вогнуты по совокупности переменных и имеют непрерывные положительные производные по всем переменным. Тогда центр с помощью штрафов z_i, квот b_i и единых цен p достигает идеальной согласованности в системе для любых фиксированных $\overline{K}_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Функция $\hat{F}_0(x, p, z, b) = \sum_{i=1}^{n} a_i \hat{M}_i(x_i, p, z_i, b_i)$ как линейная комбинация непрерывных строго вогнутых и монотонных функций также является непрерывной строго вогнутой и монотонной, поэтому она имеет единственный глобальный максимум на множестве Q. Причем ограничение $\sum_{i=1}^{n} x_i \le X$ в точке максимума выполняется как равенство.

Пусть $x_i^* = (x_{i1}^*, \ldots, x_{ij}^*, \ldots, x_{im}^*)$ доставляют глобальный максимум функции $\hat{F}_0(x, p, z, b) = \sum_{i=1}^{n} a_i \hat{M}_i(x_i, p, z_i, b_i)$. Для того, чтобы доказать утверждение теоремы, достаточно показать, что центр может выбрать такие p, z_i, b_i, что оптимальный выбор для нижнего уровня $x_i^0 = x_i^*$, $i = 1, \ldots, n$.

Пусть цены $p_i = kp$, где p – единый для всех подсистем вектор цен на ресурсы, $k = \min_{1 \le i \le n} k_i$, а k_i такие, что при $p_i = k_i p$ имеем $\overline{K}_i \ge \langle p_i, x_i^* \rangle$; $z_i \ge \partial \langle c_i, f_i(x_i^*) \rangle / \partial x_{ij}$; $b_i = x_{ij}^* / X_j$. Тогда (31) примет вид

$$\hat{\hat{M}}_i(x_i, p, z_i, b_i) = \langle c_i, f_i(x_i) \rangle - z_i \max_{1 \le j \le m} \max(0, x_{ij} - x_{ij}^*), \tag{35}$$

$i = 1, \dots, n$.

Предположим, что имеет место $x_i^0 < x_i^*$. Тогда, увеличивая x_i^0 на величину δ так, что $x_i^0 + \delta < x_i^*$, согласно (22) имеем $\langle c_i, f_i(x_i^0 + \delta)\rangle > \langle c_i, f_i(x_i^0)\rangle$. Значит, x_i^0, для которого $x_i^0 < x_i^*$, не является оптимальной точкой для нижнего уровня.

Если имеет место $x_i^0 > x_i^*$, то

$$(36)\quad \hat{\hat{M}}_i(x_i^0, p, z_i, b_i) = \left\langle c_i, f_i(x_i^0)\right\rangle - z_i(x_{ij}^0 - x_{ij}^*).$$

Дифференцируя (36) по x_{ij}, получаем $\partial\langle c_i, f_i(x_i^0)\rangle/\partial x_{ij} - z_i$. Так как $z_i \ge \partial\langle c_i, f_i(x_i^*)\rangle/\partial x_{ij}$, то получили согласно (22), что производная по x_{ij} функции (36) в оптимальной точке отрицательна. Значит, x_i^0, для которого $x_i^0 > x_i^*$, не является оптимальной точкой для нижнего уровня.

Таким образом, $x_i^0 = x_i^*$ является оптимумом для нижнего уровня при заданных p, z_i, b_i. Теорема доказана.

4.2. МЕХАНИЗМЫ НАЗНАЧЕНИЯ ВЕЛИЧИНЫ ШТРАФА И КВОТ

Предположим, что центр может менять величину штрафа z_i, b_i, $i = 1, \dots, n$, но не может управлять ценами p и финансовыми средствами предприятий K_i, $i = 1, \dots, n$. Из доказательства теоремы 3 вытекает, что идеальная согласованность при фиксированных средствах предприятий $\overline{K}_i$ и ценах $\overline{p}$ может быть достигнута при условии `$K_i \ge \langle \overline{p}, x_i^*\rangle$. В общем случае идеальной согласованности нет.

Задача выбора оптимальных b_i^0 и штрафов z^0 имеет вид

$$(37)\quad \begin{gathered} \sum_{i=1}^{n} a_i \hat{M}_i(\hat{x}_i^0(z_i, b_i), z_i, b_i) \to \max_{z, b \in Q_1} \\ Q_1 = \{z, b \mid z \ge 0, b \ge 0, \sum_{i=1}^{n} b_i = 1, \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i^0(z_i, b_i) \le X\}. \end{gathered}$$

Здесь $\hat{x}_i^0(z_i, b_i)$, $i = 1, \dots, n$, – реакция нижнего уровня.

Функция Лагранжа для задачи (37) имеет вид

$$L_{02}(z, b, m) = \sum_{i=1}^{n} a_i \hat{M}_i(\hat{x}_i^0(z_i, b_i), z_i, b_i) + \left\langle m, X - \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i^0(z_i, b_i), \right\rangle.$$

Исходя из того, что $z_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, решение задачи (37) сводится к системе

$$(38)\quad \begin{gathered} \frac{\partial L_{02}(z^0, b^0, m)}{\partial z_i} = 0, \quad \frac{\partial L_{02}(z^0, b^0, m)}{\partial b_i} \le 0, \\ \frac{\partial L_{02}(z^0, b^0, m)}{\partial b_i} b_i^0 = 0, \quad \frac{\partial L_{02}(z^0, b^0, m)}{\partial m} \ge 0, \\ m \frac{\partial L_{02}(z^0, b^0, m)}{\partial m} = 0, \quad m \ge 0. \end{gathered}$$

Задача нижнего уровня (32) при фиксированных ценах p эквивалентна следующей задаче

$$(39)\quad \begin{gathered} \tilde{M}_i(x_i, w_i, z_i, b_i) = \langle c_i, f_i(x_i) \rangle - z_i w_i \to \max_{(x_i, w_i) \in X_i(z_i, b_i)} \\ X_i(z_i, b_i) = \{(x_i, w_i) \mid x_{ij} - b_i X_j \le w_i, \langle \bar{p}, x_i \rangle \le \bar{K}_i, \\ x_i \ge 0, w_i \ge 0, i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, m\}. \end{gathered}$$

Составим для задачи на условный экстремум (39) функцию Лагранжа

$$\tilde{L}_i(x_i, w_i, l_{i1}, l_{i2}) = \tilde{M}_i(x_i, w_i, p, z_i, b_i) + l_{i1}(\bar{K}_i - \langle p, x_i \rangle) + \\ + l_{i2}(w_i + b_i X_j - x_{ij}),$$

где $l_{i1} \ge 0$, $l_{i2} \ge 0$ – множители Лагранжа. Для того чтобы точка $x_i^0 = (x_{i1}^0, \ldots, x_{ij}^0, \ldots, x_{im}^0)$ была точкой максимума, необходимо и достаточно, чтобы для каждой переменной x_{ij}^0 и w_i^0 выполнялись условия

$$\frac{\partial\tilde{L}_i(x_i^0, w_i^0, l_{i1}, l_{i2})}{\partial x_{ij}} \le 0, \quad \frac{\partial\tilde{L}_i(x_i^0, w_i^0, l_{i1}, l_{i2})}{\partial w_i} \le 0,$$

$$\frac{\partial\tilde{L}_i(x_i^0, w_i^0, l_{i1}, l_{i2})}{\partial x_{ij}} x_{ij}^0 = 0, \quad \frac{\partial\tilde{L}_i(x_i^0, w_i^0, l_{i1}, l_{i2})}{\partial w_i} w_i^0 = 0,$$

$$(40) \quad l_{i1}\frac{\partial\tilde{L}_i(x_i^0, w_i^0, l_{i1}, l_{i2})}{\partial l_{i1}} = 0, \quad l_{i2}\frac{\partial\tilde{L}_i(x_i^0, w_i^0, l_{i1}, l_{i2})}{\partial l_{i2}} = 0,$$

$$\frac{\partial\tilde{L}_i(x_i^0, w_i^0, l_{i1}, l_{i2})}{\partial l_{i1}} \ge 0, \quad \frac{\partial\tilde{L}_i(x_i^0, w_i^0, l_{i1}, l_{i2})}{\partial l_{i2}} \ge 0,$$

$$x_{ij}^0 \ge 0, w_i^0 \ge 0, \; l_{i1} \ge 0, \; l_{i2} \ge 0, i = 1, ..., n, \; j = 1, ..., m.$$

Возьмем производные функции Лагранжа и запишем условия (40) в виде

$$\frac{\partial\left\langle c_i, f_i(x_i^0)\right\rangle}{\partial x_{ij}} - l_{i1}\bar{p}_j - l_{i2} \le 0, \quad -z_i + l_{i2} \le 0,$$

$$(\frac{\partial\left\langle c_i, f_i(x_i^0)\right\rangle}{\partial x_{ij}} - l_{i1}\bar{p}_j - l_{i2})x_{ij}^0 = 0, \quad (-z_i + l_{i2})w_i^0 = 0,$$

$$(41) \qquad l_{i1}(\bar{K}_i - \left\langle \bar{p}, x_i^0\right\rangle) = 0, \quad l_{i2}(w_i^0 + b_i X_j - x_{ij}^0) = 0,$$

$$\bar{K}_i - \left\langle \bar{p}, x_i^0\right\rangle \ge 0, \quad w_i^0 + b_i X_j - x_{ij}^0 \ge 0,$$

$$x_{ij}^0 \ge 0, w_i^0 \ge 0, \; l_{i1} \ge 0, \; l_{i2} \ge 0, i = i = 1, ..., n, \; j = 1, ..., m.$$

Дифференцируя условия оптимальности нижнего уровня (41) и подставляя получающиеся производные функций $\hat{x}_i^0(z_i, b_i)$, $i = 1, \ldots, n$, в (38), получаем условия оптимальности верхнего уровня аналогично теореме 1.

Если центр управляет финансовыми средствами предприятий K_i, $i = 1, \ldots, n$, и может менять размер штрафа z_i и коэффициенты b_i, $i = 1, \ldots, n$, то из теоремы 3 следует, что, выбирая K_i так, что $K_i \ge \langle \bar{p}, x_i^* \rangle$, где $\bar{p}$ – единые цены для всех элементов нижнего уровня, можно добиться идеальной согласованности.

Итак, математические методы исследования позволяют совершенствовать управление в иерархических системах, что в свою очередь способствует повышению эффективности промышленного производства с учетом рационального использования дефицитных и природных ресурсов.

Литература

1. БУРКОВ В. Н., КОНДРАТЬЕВ В. В., ЦЫГАНОВ В. В. *Теория активных систем и совершенствование хозяйственного механизма*. – М.: Наука, 1984. – 272 с.
2. БУРКОВ В. Н., НОВИКОВ Д. А. Т*еория активных систем: состояние и перспективы*. – М.: СИНТЕГ, 2001. – 153 с.
3. ГОРЕЛИК В. А., ГОРЕЛОВ М. А., КОНОНЕНКО А. Ф. *Анализ конфликтных ситуаций в системах управления*. – М.: Радио и связь, 1991. – 286 с.
4. ГОРЕЛИК В. А., КОНОНЕНКО А. Ф. *Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах*. – М.: Радио и связь, 1982. – 144 с.
5. ГОРЕЛИК В. А., ФОМИНА Т. П. *Экстремальные задачи*: Учебное пособие. – М.: Моск. пед. гос. ун-т, 2001. – 146 с.
6. НОВИКОВ Д. А. *Теория управления организационными системами*. – М.: Физматлит, 2007. – 583 с.

ISSUES OF INTERESTS COORDINATION IN REGIONAL HIERARCHICAL MODEL OF NATURAL RESOURCES PRESERVATION

Zolotova Tatiana, Komsomolsk-na-Amure State Technical University, Komsomolsk-na-Amure, Cand.Sc., assistant professor (tgold11@mail.ru).

Abstract: Two-level hierarchical system with the single principal and several agents is examined. Necessary and sufficient optimality conditions for the principal are obtained. An example of regional *model of rational natural resources use is studied; the cases are revealed when necessary optimality conditions for the regional principal become necessary and sufficient. Various ways of achieving the perfect coordination in the hierarchical system by means of resource prices, quotas, penalties assignment, enterprises' finances regulation are presented.*

Keywords: hierarchical system, regional principal, producing units, perfect coordination, optimality conditions, resource price, quotas, penalties.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В.Н. Бурковым.