УДК 519
ББК 22.18

НЕПРЕРЫВНАЯ ИГРА НИМ [1]

Винниченко С. В. [2]
(Учреждение Российской академии наук Читинский институт природных ресурсов СО РАН, Чита)

В работе рассматривается непрерывный вариант игры НИМ, в которой два игрока по очереди зачерпывают воду из какой-то емкости. Выигрывает игрок, сделавший это последним. Находятся оптимальные стратегии и значение игры.

Ключевые слова: игра НИМ, ограничения на выбор, непрерывный вариант, оптимальные стратегии.

Введение

Epp и Ferguson рассмотрели в [1] следующую игру двух лиц и нашли ее решение. В данной игре два игрока достают из кучи камней какое-то число камней. При этом заданы некоторое положительное число m и неубывающая функция $f(n)$. Вначале первый игрок достает из кучи положительное число камней n_1, которое не превышает m. На следующем шаге другой игрок достает из кучи какое-то положительное число камней n_2, которое не превышает $f(n_1)$, и так далее. Игрок, доставший последний камень из кучи, выигрывает в данной игре. Эта игра является вариантом игры НИМ (см., например, [2]). В данной работе рассматривается непрерывная версия данной игры.

---

[1] *Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2009. – Т. 1. №3».*

[2] *Сергей Викторович Винниченко, кандидат физико-математических наук.*

1. Непрерывная игра НИМ

Рассмотрим игру двух лиц. Пусть m, b положительные действительные числа такие, что $m \leqslant b$, и пусть g неубывающая функция определенная на $[m, +\infty[$, которая удовлетворяет условиям:

$$g(m) \geqslant m, \tag{1}$$

$$g(x) < M \quad x \in [m, M[, \tag{2}$$

где $M = g(m) + m$.

Пусть в некотором бассейне налито X литров воды. На первом шаге первый игрок зачерпывает из бассейна некоторый объем воды x_1, который удовлетворяет условиям:

$$min(m, X) \leqslant x_1 \leqslant min(b, X).$$

На следующем шаге второй игрок зачерпывает из бассейна объем воды x_2, который удовлетворяет неравенствам:

$$min(m, X) \leqslant x_2 \leqslant min(g(x_1), X),$$

и так далее. Игрок, зачерпнувший воду последним, выигрывает в данной игре.

2. Оптимальная стратегия

Для $X > 0$ определим $V(X)$ как множество таких $x \geqslant \min(m, X)$, что игрок может зачерпнуть x литров воды и обязательно выиграет. Тогда для X, не превышающего M, множество $V(X)$ состоит из одного элемента X.

Положим $v(X) = \inf V(x)$. Для всех положительных X и всех $x \in [m, X[$, очевидно, выполняются следующие условия:
Если $g(x) < v(X - x)$, то $x \in V(X)$.
Если $g(x) > v(X - x)$, то $x \notin V(X)$.
Если $g(x) = v(X - x)$ и $v(X - x) \in V(X - x)$, то $x \notin V(X)$.

Предположим, что $v(X) \in V(X)$. Тогда, первый игрок выигрывает, если $b \geqslant v(X)$, а второй выигрывает, если $b < v(X)$.

Таким образом, для решения игры достаточно доказать, что для всех X выполняется $v(X) \in V(X)$ и найти способ определения $v(X)$.

<u>**Лемма 1.**</u> *Пусть $X \geqslant m$ можно записать в виде $X = nM + h$, где n целое число, и $0 < h \leqslant M$. Тогда $v(X) \geqslant \max(m, h)$, и для $h < M$ имеет место $v(X) \in V(X)$, и $v(X) = \max(m, h)$.*

<u>**Доказательство.**</u> Утверждение справедливо для $m \leqslant X \leqslant M$. Предположим оно справедливо для $X \leqslant K$ аи докажем его для $X \leqslant K + m$.

Для $y \in [m, max(m, h)[$ имеем

$$X - y = nM + h - y, \;\; h \geqslant m, \;\; 0 < h - y < M, \;\; X - y \leqslant K.$$

По индуктивному предположению, $v(X - y) \in V(X - y)$, и $v(X - y) = \max(m, h - y)$. Кроме того, имеем $v(X - y) \leqslant M - m = g(m) \leqslant g(y)$, и $y \notin v(X)$. Отсюда следует, что $v(X) \geqslant max(m, h)$. С другой стороны, для $h < M$, и $y = \max(m, h)$ имеет место

$$X - y = (n - 1)M + M + h - y, \;\; 0 < M + h - y \leqslant M.$$

По индуктивному предположению, $v(X - y) \geqslant M + h - y$. Если $h \geqslant m$, то $y = h$, и $g(y) < M = M + h - y$. Если $h < m$, то $y = m$, и $g(y) = M - m < M + h - y$. В обоих случаях $g(y) < v(X - y)$. Таким образом, $y \in V(X)$, и $v(X) = y$. Это доказывает лемму.

Остается найти $v(X)$ и доказать, что $v(X) \in V(X)$ для X вида nM. Рассмотрим два случая.

Первый случай $g(M) < M$. Из леммы следует $g(M) < M \leqslant v((n - 1)M)$. Тогда $M \in V(nM)$. Еще раз применяя лемму, получим $v(nM) \geqslant M$, и $v(nM) = M$.

Второй случай $g(M) \geqslant M$. Определим функцию f от натурального аргумента по формуле

$$f(n) = [g(nM)/M]$$

(Скобки означают целую часть числа). Эта функция определяет дискретную игру НИМ. Коротко опишем решение этой игры (детали см. в [1]). Для кучи из n камней пусть $L(n)$ минимальное число камней, которое игрок должен достать из кучи и быть победителем. Тогда функция f и L обладают следующими свойствами:

$$f(k) \geqslant L(n-k) \quad \text{для} \quad 1 \leqslant k < L(n),$$

$$f(k) < L(n-k) \quad \text{для} \quad k = L(n).$$

Для построения решения остается доказать теорему.

Теорема 1. *$v(nM) = L(nM)$, и $v(nM) \in V(nM)$.*

Доказательство. Докажем теорему по индукции по n. Очевидна база индукции. По лемме имеет место неравенство $v(nM) \geqslant M$. Для $x \in [M, L(n)M]$ возможны два варианта.

1) $x = kM + h$, где k целое число, и $0 < h < M$. Тогда $nM - x = (n-k-1)M + M - h$, и $0 < M - h < M$. Согласно лемме, $v(nM - x) = M - h < g(x)$, и $x \notin V(nM)$.

2) $x = kM, \quad 1 \leqslant k \leqslant L(n)$. По индукции $v((n-k)M) = L((n-k)M)$, и $v((n-k)M) \in V((n-k)M)$. Согласно определению функции f, имеем

$$(f(k)+1)M > g(x) \geqslant f(k)M.$$

Следовательно, если $k < L(n)$, то

$$f(k) \geqslant L(n-k), \ g(x) \geqslant L(n-k)M, \ \text{и } x \notin V(nM).$$

Если же $k = L(n)$, то

$$f(k) < L(n-k), \ f(k)+1 \leqslant L(n-k), \ g(x) < L(n-k)M, \ \text{и } x \in V(nM).$$

3. Непрерывная игра НИМ без условия (2)

Теперь предположим, что, как и выше, два игрока вычитают по очереди числа, удовлетворяющие прежним условиям, из положительного вещественного числа X. Но если раньше игра заканчивалась, когда разница становилась неположительной, и игрок, сделавший это, становился победителем, то теперь рассмотрим случай, когда игра заканчивается при отрицательной разнице. В этом случае ограничение (2) на функцию g не требуется.

4. Выигрывющее представление

Предположим, что $g(i) = g(m)$ при $1 \leqslant i \leqslant m$. Обозначим $V(X)$ набор таких $x \geqslant m$, что игрок может вычесть x из X и обязательно выиграет. Пусть $v(n) = \inf V(n)$. Предположим также, что $v(X) = \infty$ при $X \leqslant 0$. Определим

$$\tilde{v}(X) = (v(X), 0) \text{ если } v(X) \in V(X),$$

$$\tilde{v}(X) = (v(X), 1) \text{ если } v(X) \notin V(X),$$

$$\tilde{g}(x) = (g(x), 0).$$

Считаем, что $R \times \{0, 1\}$ линейно упорядочено в лексикографическом порядке, т.е.

$$(x, s) \leqslant (x', s') \text{ эквивалентно } \quad x < x' \text{ или } (x = x' \text{ и } s \leqslant s').$$

Легко видеть, что $x \in V(X)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{g}(x) < \tilde{v}(X - x)$. Заметим, что $m \leqslant v(X) \leqslant X$ и $\tilde{v}(X) = \max((m, 0), (X, 1))$ для $0 \leqslant X < m + g(m)$. Введем следующие обозначения

$$\tilde{v}_{-}(X) = \inf_{\varepsilon > 0} \sup\{\tilde{v}(x) |\, X - \varepsilon < x < X\},$$

$$v_{-}(X) = pr_1 \tilde{v}_{-}(X),$$

$$g_{+}(X) = \inf_{\varepsilon > 0} \{\tilde{g}(X + \varepsilon)\},$$

$$g_{-}(X) = \sup_{\varepsilon > 0} \{\tilde{g}(X - \varepsilon)\}.$$

Пусть

$$A = \{X \geqslant 0 |\, v(X) = \max\{(X, 1), (m, 0)\}\},$$

$$B = \{X \geqslant 0 |\, v(X) < v_-(X)\},$$
$$C = \{X \geqslant 0 |\, v(X) < X \text{ и } v_-(X) = X\}.$$

Считаем, что $(x_1, s) + x_2 = (x_1 + x_2, s)$.

Заметим, что

$$X \in A, \qquad 0 \leqslant X < m + g(m),$$
$$X \notin B, \qquad 0 < X < m + g(m),$$
$$0 \in B, \quad m + g(m) \in C.$$

Лемма 2. *Пусть* $0 \leqslant Y < X$, $t \in V(X)$, $t - (X - Y) \in V(Y)$. *Тогда* $t - (X - Y) \in V(Y)$.

Доказательство. Имеем

$$\tilde{g}(t) < \tilde{v}(X - t),$$
$$\tilde{g}(t - (X - Y)) \leqslant \tilde{g}(t) < \tilde{v}(X - t) = \tilde{v}(Y - (t - (X - Y))),$$
$$t - (X - Y) \in V(Y).$$

Лемма 3. *Пусть* $\leqslant Y < X \leqslant Y + m$, $\tilde{v}(Y) > (m, 0)$, $\tilde{v}(X) < \tilde{v}(Y) + X - Y$. *Тогда* $\tilde{v}(x) = (m, 0)$ *для* $X \leqslant x \leqslant Y + m$.

Доказательство. Пусть $[(X + Y)/m] = k$. ($[z]$ обозначает целую часть числа z.) Докажем это утверждение индукцией по k. Очевидно, это верно для $k \leqslant 1$. Предположим, что это верно для $k \leqslant K$ и докажем выполнение для $k = K + 1$. Выберем $t \in V(X)$ такое, что $(t, 0) < \tilde{v}(Y) + X - Y$. Если $t \geqslant m + X - Y$,, то по Лемме 2 $t - (X - Y) \in V(Y)$ и $(t - (X - Y), 0) \geqslant \tilde{v}(Y)$. Это противоречие показывает что $t < m + X - Y$. Пусть $X - t < s \leqslant Y$. Тогда $[(X - t + s)/m] \leqslant k$. Если $\tilde{v}(s) < \tilde{v}(X - t)$, то $\tilde{v}(Y) = (m, 0)$ по индукционному предположению. Это противоречит условию леммы . Следовательно $\tilde{v}(X - t) \leqslant \tilde{v}(s)$, и имеем $\tilde{g}(m) \leqslant g(t) < \tilde{v}(X - t) \leqslant \tilde{v}(x - m)$ и $\tilde{v}(x) = (m, 0)$ for $X \leqslant x \leqslant Y + m$. Это доказывает лемму.

Следствие 1. *Если* $v(X) = (v(X), 1)$, *то существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что* $]v(X), v(X) + \varepsilon[\subset V(X)$.

Доказательство. Выберем $0 < \varepsilon_1 < m$ такое, что $v(X) + \varepsilon_1 \in V(X)$. Тогда

$$\tilde{v}(X - (v(X) + \varepsilon_1)) > \tilde{g}(v(X) + \varepsilon_1) \geqslant (m, 0).$$

Если $\tilde{v}(x) < \tilde{v}(X - (v(X) + \varepsilon_1))$ для $X - (v(X) + \varepsilon_1) < x < X - v(X)$, то по Лемме 3 $\tilde{v}(t) = (m, 0)$ для $x \leqslant t \leqslant X - v(X)$, и $s \notin V(X)$ for $v(X) < s < X - x$. Это противоречие показывает, что для такого x неравенство $\tilde{v}(x) \geqslant \tilde{v}(X - (v(X) + \varepsilon))$ выполняется. Следовательно $]v(X), v(X) + \varepsilon[\subset V(X)$.

Лемма 4. *Пусть* $X \in B$. *Тогда* $\tilde{v}(X) = (m, 0)$ *для* $X \leqslant x < X + m$.

Доказательство. Пусть $0 < \varepsilon < m$. Выберем Y так, что $X - \varepsilon < Y < X$ и $\tilde{v}(Y) > \tilde{v}(X)$. Тогда для $X \leqslant x \leqslant Y + m$ имеем $\tilde{v}(x) = (m, 0)$ по Лемме 2. Необходимое заключение следует из произвольности ε.

Лемма 5. *Пусть* $X \geqslant 0$. *Если* $\tilde{v}(X) > (m, 0)$, *то* $\tilde{v}(X) = (v(X), 1)$ *и существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что* $\tilde{v}(x) = \tilde{v}(X) + x - X$ *для* $X \leqslant x < X + \varepsilon$. *Если* $\tilde{v}(X) = (m, 0)$, *то существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что* $\tilde{v}(X) = (m, 0)$ *для* $X \leqslant x < X + \varepsilon$.

Доказательство. Пусть $[X/m] = k$. Утверждение очевидно верно при $k \leqslant 1$. Предположим, что оно верно для $k \leqslant K$ и докажем для $k = K + 1$.

Случай $\tilde{v}(X) > (m, 0)$.

Пусть $t \in V(X)$. Тогда $t > m$, $\tilde{g}(x) < \tilde{v}(X - t)$, $\tilde{v}(X - t) > (m, 0)$. По индуктивному предположению существует $\varepsilon > 0$ такой, что $\tilde{v}(x) = \tilde{v}(X - t) + x - (X - t)$ для $X - t \leqslant x < (X - t) + \varepsilon$. Тогда $\tilde{g}(t - \varepsilon/2) < \tilde{v}(X - (t - \varepsilon/2))$ и $t - \varepsilon/2 \in V(X)$. Следовательно $\tilde{v}(X) = (v(X), 1)$. Выберем $t \in V(X)$ такое, что $t - v(X) < m$. Тогда $\tilde{v}(X - t) > (m, 0)$. Из Леммы 2 получим, что $\tilde{v}(y) \geqslant \tilde{v}(X - t)$ для $X - t \leqslant y < X - v(X)$. Пусть $X \leqslant x < X + (t - v(X))$. Тогда для $v(X) + x - X < s \leqslant t$ имеем $\tilde{g}(s) < \tilde{v}(x - s)$, $s \in V(X)$, и следовательно $\tilde{v}(x) \leqslant \tilde{v}(X) + x - X$.

Аналогичными рассуждениями, можно доказать, что существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что $m \notin V(x)$ для $X \leqslant x < X + \varepsilon_1$. Обозначая $\varepsilon = min(t - v(X), \varepsilon_1)$ и используя Лемму 3, получим $\tilde{v}(x) = \tilde{v}(X) + x - X$ для $X \leqslant x < X + \varepsilon$.

Случай $\tilde{v}(X) = (m, 0)$ может быть доказан таким же образом.

Лемма 6. *Пусть* $0 \leqslant Y < X$, $\tilde{v}(Y) > (m, 0)$, $\tilde{v}(Y) + X - Y \leqslant \tilde{v}(X) < \tilde{v}(Y) + X - Y + m$. *Тогда* $\tilde{v}(X) = \tilde{v}(Y) + X - Y$.

Доказательство. Предположим, что $\tilde{v}(X) > \tilde{v}(Y) + X - Y$. Тогда $0 < (Y - v(Y)) - (X - v(X)) < m$. Выберем $x \in V(X)$ и $y \in V(Y)$ так, что $X - x < Y - v(Y)$ и $(Y - y) - (X - x) < m$. Тогда $\tilde{v}(Y - y)$, $\tilde{v}(X - x) > (m, 0)$. По Лемме 3 $\tilde{v}(Y - y) \geqslant \tilde{v}(X - x)$. Следовательно $\tilde{g}(X - Y + y) < \tilde{v}(Y - y)$, $\quad X - Y + y \in V(X)$. Переходя к пределу $y \to v(Y)$, имеем $v(X) = v(Y) + X - Y$. Поэтому, по Лемме 5, $\tilde{v}(X) = (v(X), 1)$, $\quad \tilde{v}(Y) = (v(Y), 1)$ и $\tilde{v}(X) = \tilde{v}(Y) + X - Y$.

Лемма 7. *Пусть* $v_{-}(X) > (m, 0)$. *Тогда существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что* $\tilde{v}(x) = (v_{-}(X) + x - X, 1)$ *для* $X - \varepsilon < x < X$.

Доказательство. Выберем $\varepsilon_1 < m$ так, что $v(t) - v_{-}(X) < m/2$ for $X - \varepsilon_1 \leqslant t < X$. Выберем $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ так, что $v(X - \varepsilon) - v_{-}(X) > -m/2$. По Лемме 6 имеем $\tilde{v}(x) = \tilde{v}(X - \varepsilon) + x - (X - \varepsilon)$ и $\tilde{v}(x) = (v_{-}(X) + x - X, 1)$.

Следствие 2. *Если* $X \in C$, *тогда существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что* $x \in A$ *для* $X - \varepsilon < x < X$.

Лемма 8. *Пусть*

$$m \leqslant Y \leqslant X,\ m \leqslant y \leqslant Y,\ g_{+}(Y - y) < v_{-}(X - Y),\ x - Y \in B.$$

Тогда $y \in V(Y)$ *эквивалентно* $y \in V(X)$.

Доказательство. Пусть $y \in V(Y)$. Тогда первый игрок вычитает y из X и выигрывает игру с начальным значением X. На последнем шаге он вычитает y_1 из $X - Y + y_2$, $0 \leqslant y_2 \leqslant Y - y$, $y_1 > y_2$. Существует $\varepsilon > 0$ такое, что $g(Y - y + \varepsilon) < v(X - Y - \varepsilon)$. Если $y_2 \geqslant m$, то первый игрок вычитает $y_2 + \varepsilon$ вместо y_1 выигрывает игру с начальным значением X. Если $y_2 < m$, то он вычитает m вместо y_1 и также выигрывает игру с начальным значением X. Следовательно $y \in V(Y)$.

Пусть теперь $y \notin V(Y)$. Аналогичными рассуждениями получим, что первый игрок, вычитающий y из X проигрывает. Следовательно $y \notin V(X)$.

Лемма 9. *Пусть $m \leqslant Y \leqslant X$. Тогда $(Y, 1) = \tilde{v}(X)$ эквивалентно $g_+(Y) < v_-(X - Y)$, $Y \in A$, и $X - Y \in B$.*

Доказательство. Пусть $(Y, 1) = \tilde{v}(X)$. По следствию 2 существует $\varepsilon > 0$ такое, что $]Y, Y + \varepsilon[\subset V(X)$. Из этого имеем $g_+(Y) < v_-(X - Y)$. Поскольку $Y \notin V(X)$, то $v(X - Y) < v_-(X - Y)$ и $X - Y \in B$. Let $m \leqslant y \leqslant Y$. Предположим, что $y \in V(Y)$. По Лемме 7 имеем $y \in V(X)$. Это противоречие показывает, что $Y \in A$.

Пусть, наоборот, $g_+(Y) < v_-(X - Y)$, $Y \in A$, $X - y \in B$, и $m \leqslant y \leqslant Y$. Тогда $y \in V(Y)$. Из Леммы 7 получим, что $y \notin V(X)$. Из Леммы 7 следует существование $\varepsilon > 0$ токого, что $]Y, y + \varepsilon[\subset V(X)$. Следовательно $\tilde{v}(X) = (Y, 1)$.

Лемма 10. *Пусть $X > 0$. Тогда $X \in B$ эквивалентно $v_-(X) \in C$.*

Доказательство. По Лемме 7 существует $\varepsilon > 0$ такое, что $v(x) = v_-(X) + x - X$ для $X - \varepsilon < x < X$. Пусть $Y = v(x)$. По Лемме 9 имеем $g_+(Y) < V_-(X - Y)$, $Y \in A$, и $x - Y = X = v_-(X) \in B$. Легко видеть, что $g_+(v_-(X) - m) < v_-(X - v_-(X))$. По Лемме 8 $m \in V(X)$ эквивалентно $m \in V(v_-(X))$. Следовательно $X \in B$ эквивалентно $v_-(X) \in C$.

Лемма 11. *Пусть $\tilde{v}(X) = (m, 0)$. Тогда существует $0 \leqslant a < m$ такое, что $X - a \in B$.*

Доказательство. Имеем $(m, 0) \leqslant \tilde{g}(m) < \tilde{v}(X - m)$. По Лемме 4 существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\tilde{v}(x) = \tilde{v}(X - m) + x - (X - m)$ для $X - m \leqslant x < X - m + \varepsilon$. Пусть $a = sup\{0 \leqslant x < m | \, \tilde{v}(X - x) = (m, 0)\}$. Тогда $0 \leqslant a < m$. Из Леммы 5 следует, что $\tilde{v}(X - a) = (m, 0)$ и $X - a \in B$.

Пусть X представлено как сумма:

$$X = a + h_1 + \ldots + h_t, \tag{3}$$

$$h_i \in C, \quad \tilde{g}_-(h_{i-1}) < (h_i, 1), \quad 2 \leqslant i \leqslant t,$$

$$a \in A,\ g_+(a) < h_1. \tag{4}$$

Как и в [1], сумму (3) будем называть *выигрывающее представление* числа X.

Теорема 2. *Пусть X имеем выигрывающее представление (3). Тогда*

1) $\tilde{v}(X) = \max((m,0),(a,1))$*;*

2) $v_-(X-a) = h_1$*;*

3) $X \in B$ *эквивалентно* $a = 0$.

Доказательство. Докажем теорему индукцией по t. База индукции при $t = 0$ очевидна. Выберем $\varepsilon > 0$ так, что $x \in A$ для $h_1 - \varepsilon < x < h_1$. Тогда

$$Y = x + h_2 + \ldots + h_t$$

выигрывающее представление для такого x. По индуктивному предположению $\tilde{v}(Y) = \max((m,0),(a,1))$. Следовательно $v_-(X-a) = h_1 \in C$. По Лемме 10 $X - a \in B$. Из Лемм 3 и 7 следует $\tilde{v}(X) = \max((m,0),(a,1))$. Окончательно, если $X \in B$, то $\tilde{v}(X) = (m,0)$, $v_-(X) > m$, $m > a$. Если $a > 0$, то $v_-(X) = m$. Это противоречие доказывает, что $a = 0$.

Теорема 3. *Каждое* $X \geqslant 0$ *имеет единственное выигрывающее представление.*

Доказательство. Пусть $[X/m] = k$. Докажем теорему индукцией по k. Утверждение, очевидно, верно при $k \leqslant 1$. Предположим, что оно верно при $k \leqslant K$ и докажем для $k = K + 1$.

Случай $\tilde{v}(X) = (a,1)$.

В этом случае $g_+(a) < v_-(X-a)$, $a \in A$, $X - a \in B$, и $[(X-a)/m] \leqslant K$. По индуктивному предположению $X - a$ имеет выигрывающее представление

$$X - a = a' + h_1 + \ldots + h_t,$$

и $a' = 0$ по Теореме 2. Следовательно

$$x = a + h_1 + \ldots + h_t$$

выигрывающее представление.

Случай $\tilde{v}(X) = (m, 0)$.

По Лемме 11 существует $0 \leqslant a < m$ такое, что $X - a \in B$. По Лемме 7 можно выбрать $\varepsilon > 0$ такое, что $\tilde{v}(x) = (v_-(X) + x - X, 1)$ для $X - \varepsilon < x < X$. Аналогично предыдущему случаю x имеет выигрывающее представление

$$x = a' + h_2 + \ldots + h_t,$$

$$a' = v_-(X) + x - X.$$

Пусть $h_1 = v_-(X)$. Тогда $\tilde{g}_-(h_1) < (h_2, 1)$. По Лемме 10 $h_1 \in C$. Следовательно $g_(a) < v_-(X)$, и

$$x = a + h_1 + \ldots + h_t$$

выигрывающее представление.

Единственность выигрывающего представления можно доказать простой индукцией.

5. Вычисление a и h_i

Определим последовательности a_i, c_i. Пусть $a_1 = 1$, $c_1 = m + f(m)$. Предположим, что a_i, c_i были уже определены для $i \leqslant r$ и выполнены следующие неравенства:

$$a_1 < c_1 < a_2 < c_2 < \ldots < a_r < c_r.$$

Если $\tilde{g}_-(c_r) < (c_r, 1)$, то последовательности a_i, c_i конечны и каждая из них состоит из r членов.

В другом случае, пусть p наименьшее число такое, что $p \leqslant r$ и $g_-(c_p) \geqslant (c_r, 1)$. Пусть $q = \inf\{a_p \leqslant t < c_p | \, g(t) \geqslant c_r\}$. Тогда $g_+(q) \geqslant c_r$.

Определим a_{r+1}, c_{r+1} неравенствами:

$$a_{r+1} = c_r + q, \; c_{r+1} = a_{r+1} + \min(m, c_p - q)$$

Теорема 4. *Пусть* $X \geqslant 0$. *Если* $a_i \leqslant X < c_i$ *для некоторого* i, *то* $X \in A$,. *Если* $c_i \leqslant X < a_{i+1}$, *то* $X \notin A$. *Если* c_s – *наибольшее число последовательности* c_i, *то* $X \notin A$ *для* $X \geqslant c_s$. *Числа* c_r *формируют набор* C.

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по i. База индукции очевидна. Предположим, что утверждение доказано для $i \leqslant r$ и докажем для $i = r + 1$. Пусть $a_{r+1} \leqslant X < c_{r+1}$. Тогда $X - c_r \in A$. Если $m \leqslant x \leqslant X - c_r$ и

$$X - c_r - x = a + h_1 + \ldots + h_t$$

выигрывающее представление, то $h_t < c_p$ и $\tilde{g}_-(h_t) < (c_r, 1)$ по выбору p. Также имеем, что $\tilde{g}(x) < (a, 1)$. Следовательно

$$X - x = a + h_1 + \ldots + h_t + c_r$$

выигрывающее представление, и $x \notin V(X)$. Если $X - c_r < x \leqslant X$, то $x > q$, $g(x) \geqslant c_r > X - x$, $x \notin V(X)$. Тогда $X \in A$. Пусть теперь $c_{r+1} \leqslant X < a_{r+2}$ и

$$X - c_{r+1} = a + h_1 + \cdots + h_t$$

выигрывающее представление. Как и выше имеем

$$x = a + h_1 + \ldots + h_t + c_{r+1}$$

выигрывающее представление с более чем одним слагаемым. Следовательно $X \notin A$. В частности $c_{r+1} \notin A$. Поскольку $v_-(c_{r+1}) = c_{r+1}$, то $c_{r+1} \in C$. Легко видеть, что $X \notin C$ для $a_{r+1} \leqslant X < c{-}_{r+1}$ и $c_{r+1} < X < a_{r+2}$.

Наконец, рассмотрим случай, когда последовательность c_i имеет наибольший элемент c_s. Тогда $\tilde{g}_-(c_s) < (c_s, 1)$. Запишем $x \geqslant c_s$ в форме $X = nc_s + X'$ где $0 \leqslant X' < c_s$, $n \geqslant 1$. Пусть

$$X' = a + h_1 + \cdots + h_t$$

выигрывающее представление. Тогда $\tilde{g}(h_t) \leqslant \tilde{g}_-(c_s) < (c_s, 1)$, и

$$X = a + h_1 + \ldots + h_t + \underbrace{c_s + \ldots + c_s}_{n \text{ слагаемых}}$$

также выигрывающее представление, состоящее более чем из одного слагаемого. Следовательно, $X \notin A$. Очевидно $X \notin C$.

Легко доказать следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть X имеет выигрывающее представление (3), $a \geqslant m$, $t \geqslant 1$, $h_1 = c_i$, $x > a$, и $g(x) < h_1$. Тогда $]a, L] \subset V(X)$, где $L = \min(x,\ a + h_1 - g(x),\ a + c_i - a_i)$.*

Поэтому имеем следующую выигрывающую стратегию. Если есть неотрицательное число X и верхнее ограничение b, то игрок должен найти выигрывающее представление

$$X = a + h_1 + \cdots + h_t.$$

Если $a < m$, тогда он должен вычесть m. Если $a \geqslant m$, то он должен вычесть любое число x, удовлетворяющее ограничениям $a < x \leqslant \min(b, L)$. ($L$ определено в Теореме 5.) Если $a \leqslant b$, то выиграть невозможно.

Если игрок, который делает отрицательную разницу, проигрывает, необходимо использовать ту же самую стратегию для числа $X - m$.

Литература

1. EPP R. J., FERGUSON T. S. *A note on take-away games* // The Fibonacci Quarterly. – 1980. – V. 44. – №18. – P. 39-53.
2. MOULIN H. *Theorie des jeux pour l'economie et la politique*. – Hermann, Paris, 1981.
3. SCHWENK A. J. *Take-Away Games* // The Fibonacci Quarterly. – 1970. – V. 8. – P. 225-234.

CONTINUOUS NIM GAME

Sergey V. Vinnichenko, Chita Institute of Natural Resources, Siberian Branch of RAS, Novosibirsk, Cand. Sc.

Abstract: A continuous version of NIM game is considered. Two players take water from the tank one by one. The player wins the game if she makes the last turn. Optimal strategies and the value of the game are calculated.

Keywords: NIM game, choice restrictions, continuous version, optimal strategies.