

УДК 021.8 + 025.1  
ББК 78.34

## МНОГОШАГОВЫЕ СЕТЕВЫЕ ИГРЫ С ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ <sup>1</sup>

Петросян Л. А. <sup>2</sup>, Седаков А. А. <sup>3</sup>

*(Факультет прикладной математики – процессов управления,  
Санкт-Петербургский государственный университет,  
Санкт-Петербург)*

*В статье рассматриваются многошаговые сетевые игры с полной информацией. В каждый момент игры задается текущая сетевая структура, связывающая игроков. Предполагается, что любое ребро сети имеет полезность (полезность одного игрока от связи со вторым), и игроки вправе изменять структуру сети на каждом шаге. Предлагается способ нахождения оптимального поведения игроков в играх такого типа.*

Ключевые слова: сеть, сетевые игры, функция полезности, характеристическая функция, вектор Шепли, равновесие по Нэшу.

### **1. Построение многошаговой сетевой игры с полной информацией**

Пусть  $N = \{1, \dots, n\}$  – множество игроков. Построим дерево игры – конечный древовидный граф  $K = (X, F)$  с начальной вершиной  $x_0$  [2, 6]. Множество  $X$  есть множество вершин графа  $K$ , а  $F : X \mapsto X$  есть точно-множественное отображение,

---

<sup>1</sup> Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2009. – Т. 1. №2».

<sup>2</sup> Леон Аганесович Петросян, доктор физико-математических наук, профессор (spbuoasis7@peterlink.ru).

<sup>3</sup> Артем Александрович Седаков, кандидат физико-математических наук (formail@list.ru).

которое каждому элементу  $x \in X$  ставит в соответствие множество  $F_x$  вершин графа, следующих непосредственно за вершиной  $x$ . Вершины  $x$  древовидного графа  $K$ , для которых  $F_x = \emptyset$  будем называть окончательными (терминальными). Множество  $X$  вершин древовидного графа  $K$  представим стандартным образом в виде объединения  $n + 1$  непересекающихся множеств:  $X = P_1 \cup \dots \cup P_n \cup P_{n+1}$ , где множество  $P_i$  – множество личных позиций игрока  $i$ ,  $i \in N$ , а множество  $P_{n+1}$  – множество окончательных позиций древовидного графа  $K$ . В дальнейшем через  $i(x)$  будем обозначать игрока, который делает ход в вершине  $x$  в игре на древовидном графе  $K$ .

Опишем пошаговое развитие игрового процесса.

### 1.1. ПОСТРОЕНИЕ ДРЕВОВИДНОГО ГРАФА МНОГОШАГОВОЙ СЕТЕВОЙ ИГРЫ

*Начальный шаг.* В начальной вершине  $x_0$  древовидного графа  $K$  определена сеть  $G_{x_0} = (N, \theta(x_0))$ . Через  $g^{x_0}$  обозначим множество ребер сети  $G_{x_0}$ . Множество узлов  $N$  совпадает со множеством игроков (узел сети отождествляем с игроком), и  $\theta(x_0) : g^{x_0} \mapsto R$  – числовая функция, которую мы будем интерпретировать как *функцию полезности*.

*Шаг 1.* Игрок  $i(x_0)$  имеет следующие  $n$  альтернатив в вершине  $x_0$ :

- не предпринимать никаких действий, при этом игровой процесс переходит в вершину  $y_{11} \in F_{x_0}$ ;
- разорвать связь с одним игроком  $j \in N$ ,  $j \neq i(x_0)$ , если ребро  $(i(x_0), j) \in g^{x_0}$ ; при этом игровой процесс переходит в вершину  $y_{1j} \in F_{x_0}$ ;
- предложить игроку  $k$ ,  $k \neq i(x_0)$  установить связь  $(i(x_0), k)$ , если ребро  $(i(x_0), k) \notin g^{x_0}$ ; при этом игровой процесс переходит в вершину  $y_{1k} \in F_{x_0}$ .

Таким образом, каждая из  $n$  вершин  $y_{11}$ ,  $\{y_{1j}\}_j$ ,  $\{y_{1k}\}_k$  принадлежит множеству  $F_{x_0}$ . В зависимости от выбора игроком  $i(x_0)$  альтернативы, в вершинах множества  $F_{x_0}$  начальная сеть изменя-

ется, соответственно множество ребер новой сети имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 g^{y_{11}} &= g^{x_0}, && \text{если игрок } i(x_0) \text{ не предпринимает} \\
 &&& \text{никаких действий;} \\
 g^{y_{1j}} &= g^{x_0} \setminus (i(x_0), j), && \text{если игрок } i(x_0) \text{ разрывает связь} \\
 &&& \text{с игроком } j; \\
 g^{y_{1k}} &= g^{x_0} \cup (i(x_0), k), && \text{если игрок } i(x_0) \text{ устанавливает связь} \\
 &&& \text{с игроком } k.
 \end{aligned}$$

Следовательно, для вершины  $x_1 \in F_{x_0} = \{y_{11}, \{y_{1j}\}_j, \{y_{1k}\}_k\}$  множество ребер  $g^{x_1}$  однозначно определено. Если  $x_1 \notin P_{n+1}$ , то мы переходим к рассмотрению шага 2 для каждой вершины  $x_1 \in F_{x_0}$ . Этот шаг полностью аналогичен шагу 1, поэтому, опуская изложение второго шага игры, рассмотрим некоторый шаг  $t$ .

*Шаг  $t$  ( $1 < t \leq l$ ).* Предположим, мы построили древовидный граф до вершин, которые можно достичь из начальной вершины  $x_0$  не более чем за  $t - 1$  шагов. Пусть  $\{x_0, x_1, \dots, x_{t-1}\}$  – некоторая траектория из  $x_0$  построенного древовидного графа в вершину  $x_{t-1}$ , в которую можно попасть из  $x_0$  за  $t - 1$  шаг. По построению во всех позициях  $x_0, x_1, \dots, x_{t-1}$  соответствующие множества ребер  $g^{x_0}, g^{x_1}, \dots, g^{x_{t-1}}$  однозначно определены. Определим множество  $g^{x_t}$ .

В вершине  $x_{t-1}$  у игрока  $i(x_{t-1})$  имеются следующие  $n$  альтернатив:

- не предпринимать никаких действий, при этом игровой процесс переходит в вершину  $y_{t1} \in F_{x_{t-1}}$ ;
- разорвать связь с одним игроком  $j \in N, j \neq i(x_{t-1})$ , если ребро  $(i(x_{t-1}), j) \in g^{x_{t-1}}$ ; при этом игровой процесс переходит в вершину  $y_{tj} \in F_{x_{t-1}}$ ;
- предложить игроку  $k, k \neq i(x_{t-1})$  установить связь  $(i(x_{t-1}), k)$ , если ребро  $(i(x_{t-1}), k) \notin g^{x_{t-1}}$ ; при этом игровой процесс переходит в вершину  $y_{tk} \in F_{x_{t-1}}$ .

Таким образом, каждая из  $n$  вершин  $y_{t1}$ ,  $\{y_{tj}\}_j$ ,  $\{y_{tk}\}_k$  принадлежит множеству  $F_{x_{t-1}}$ . В зависимости от выбора игроком  $i(x_{t-1})$  альтернативы, в вершинах множества  $F_{x_{t-1}}$  текущая сеть изменяется, соответственно множество ребер новой сети имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 g^{y_{t1}} &= g^{x_{t-1}}, && \text{если игрок } i(x_{t-1}) \text{ не предпринимает никаких действий;} \\
 g^{y_{tj}} &= g^{x_{t-1}} \setminus (i(x_{t-1}), j), && \text{если игрок } i(x_{t-1}) \text{ разрывает связь с игроком } j; \\
 g^{y_{tk}} &= g^{x_{t-1}} \cup (i(x_{t-1}), k), && \text{если игрок } i(x_{t-1}) \text{ устанавливает связь с игроком } k.
 \end{aligned}$$

Следовательно, для вершины  $x_t \in F_{x_{t-1}} = \{y_{t1}, \{y_{tj}\}_j, \{y_{tk}\}_k\}$  множество ребер  $g^{x_t}$  однозначно определено. Если  $x_t \notin P_{n+1}$ , то мы переходим к рассмотрению очередного шага построения древовидного графа для каждой вершины  $x_t \in F_{x_{t-1}}$ . Если в вершине  $x_t$  игровой процесс не заканчивается, т. е., если  $x_t \notin P_{n+1}$ , то мы переходим к рассмотрению следующего шага игры, и построение игры на древовидном графе продолжается аналогичным образом. При  $t = l$  построение древовидного графа  $K$  закончено.

## 1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ВЫПЛАТ ИГРОКАМ

**Определение 1.** Пусть  $S \subseteq N$ . Вещественную функцию

$v : X \times 2^N \mapsto R$ , заданную на декартовом произведении множества  $X$  и множества всех подмножеств множества  $N$  и определенную по правилу

$$(1) \quad v(y, S) = \sum_{(i,j) \in g^y: i,j \in S} \theta_{ij}(y),$$

где  $y \in X$ , будем называть характеристической функцией. Здесь  $\theta_{ij}(y)$  – значение функции полезности  $\theta(y)$ , определенной сетевой

игрой  $G_y = (N, \theta(y))$ , которое представляет собой полезность игрока  $i$  от связи с игроком  $j$  в вершине  $y$ .

Задав конечное множество игроков  $N$  и функцию  $v(y, \cdot)$ , определенную по правилу (1), можно построить игру в форме характеристической функции, в которой для каждого игрока определены лишь полезности связей с другими игроками. Определим выплаты игрокам в сети. С этой целью выбираем некоторый принцип оптимальности теории кооперативных игр. Для простоты в качестве такого принципа оптимальности выберем вектор Шепли [9], и с его помощью определим дележ  $\gamma(y) = (\gamma_1(y), \dots, \gamma_n(y))$ , компоненты которого вычисляются по формуле:

$$(2) \quad \gamma_k(y) = \sum_{\{S: S \subseteq N, k \in S\}} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} [v(y, S) - v(y, S \setminus k)].$$

Здесь  $s$  – число элементов множества  $S$ ,  $v(y, S)$  – характеристическая функция, определенная по правилу (1).

Распишем более подробно выражение, стоящее в квадратных скобках в правой части равенства (2). Подставив значения характеристической функции  $v(y, \cdot)$  из (1) для любого  $y \in X$  и  $k \in N$ , имеем:

$$\begin{aligned} & v(y, S) - v(y, S \setminus k) = \\ &= \sum_{(i,j) \in g^y: i,j \in S} \theta_{ij}(y) - \sum_{(i,j) \in g^y: i,j \in S \setminus k} \theta_{ij}(y) = \\ &= \sum_{(i,k) \in g^y: i \in S \setminus k} \theta_{ik}(y) + \sum_{(k,j) \in g^y: j \in S \setminus k} \theta_{kj}(y). \end{aligned}$$

С учетом полученного компоненты вектора Шепли записы-

ваются в виде:

$$(3) \quad \gamma_k(y) = \sum_{\{S: S \subseteq N, k \in S\}} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} \left[ \sum_{(i,k) \in g^y: i \in S \setminus k} \theta_{ik}(y) + \sum_{(k,j) \in g^y: j \in S \setminus k} \theta_{kj}(y) \right],$$

где  $y \in X, k \in N$ .

Величина  $\sum_{(i,k) \in g^y: i \in S \setminus k} \theta_{ik}(y) + \sum_{(k,j) \in g^y: j \in S \setminus k} \theta_{kj}(y)$  пред-

ставляет собой вклад игрока  $k$ , если тот, присоединившись к коалиции  $S \setminus k$ , приведет к образованию коалиции  $S$ . Здесь первое слагаемое  $\sum_{(i,k) \in g^y: i \in S \setminus k} \theta_{ik}(y)$  представляет собой дополнитель-

ную полезность игроков коалиции  $S \setminus k$ , внесенную игроком  $k$ . Второе слагаемое  $\sum_{(k,j) \in g^y: j \in S \setminus k} \theta_{kj}(y)$  представляет собой допол-

нительную полезность игрока  $k$ , получаемую при присоединении к игрокам коалиции  $S \setminus k$ .

Пусть в игре реализовался путь  $\{x_0, x_1, \dots, x_l\}$ . Тогда выигрыш игрока  $i \in N$  вдоль этого пути определяется следующим образом:

$$\sum_{x \in \{x_0, \dots, x_l\}} \gamma_i(x), \quad i \in N,$$

где  $\gamma_i(x)$  представляет собой  $i$ -ю компоненту вектора Шепли, вычисленного по правилу (3) в сетевой игре  $G_x = (N, \theta(x))$ .

### 1.3. ФОРМАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ МНОГОШАГОВОЙ СЕТЕВОЙ ИГРЫ С ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

**Определение 2.** Многошаговой сетевой игрой  $n$  лиц с полной информацией называется древовидный граф  $K$ , на котором:

- задано разбиение множества вершин  $X$  на  $n + 1$  множество  $P_1, P_2, \dots, P_n, P_{n+1}$ , где  $P_i, i \in N$  есть множество личных позиций игрока  $i$ , множество  $P_{n+1} = \{x : F_x = \emptyset\}$  есть множество окончательных вершин;
- в каждой вершине  $x \in X$  однозначным образом задана сеть  $G_x = (N, \theta(x))$ : множество узлов сети  $N$  (множество игроков) и функция полезности  $\theta : g^x \mapsto R$ .

**Определение 3.** Стратегией  $u_i(\cdot)$  игрока  $i \in N$  назовем отображение, которое каждой вершине  $x \in P_i$  ставит в соответствие вершину  $y \in F_x$  либо вероятностное распределение  $p^x$  на множестве  $F_x$

$$p^x = \{p^x(y)\}, y \in F_x, p^x(y) \geq 0, \sum_{y \in F_x} p^x(y) = 1.$$

Для каждого набора стратегий (ситуации)  $u(\cdot) = (u_1(\cdot), \dots, u_n(\cdot))$  в игре на древовидном графе  $K$  определим функции выигрыша игроков следующим образом. Пусть в ситуации  $u(\cdot) = (u_1(\cdot), \dots, u_n(\cdot))$  реализовался некоторый путь  $\{x_0, x_1, \dots, x_l\}$  из начальной вершины  $x_0$  в окончательную  $x_l$ . Тогда функция выигрыша игрока  $i$ :

$$H_i(u(\cdot)) = \sum_{x \in \{x_0, \dots, x_l\}} \gamma_i(x), \quad i \in N.$$

Здесь  $\gamma_i(x)$  есть выплата игроку  $i$ , которая получена как  $i$ -ая компонента вектора Шепли, рассчитанного по характеристической

функции  $v(x, \cdot)$  для сетевой игры  $G_x = (N, \theta(x))$ , заданной в вершине  $x$  (см. (3)).

**Определение 4.** Набор стратегий  $u^*(\cdot) = (u_1^*(\cdot), \dots, u_i^*(\cdot), \dots, u_n^*(\cdot))$  называется равновесием по Нэшу в многошаговой сетевой игре на древовидном графе  $K$  с начальной вершиной  $x_0$ , если

$$H_i(u^*(\cdot) | u_i(\cdot)) \leq H_i(u^*(\cdot))$$

для любых  $i \in N$  и любых допустимых  $u_i$ .

## 2. Построение ситуации равновесия по Нэшу в многошаговой сетевой игре

Предположим, что длина игры равна  $l + 1$ . Для определения оптимального поведения игроков будем использовать концепцию абсолютного равновесия в конечношаговой игре с полной информацией.

Введем функцию Беллмана [1, 5]  $\varphi_i^t$  как выигрыш игрока  $i$  в ситуации равновесия по Нэшу в игре за  $l - t$  шагов (положим  $\varphi_i^{l+1} = 0$ ). Значения функции Беллмана  $\varphi$  во всех вершинах древовидного графа  $K$  определяются стандартным образом методом обратной индукции (решая уравнение Беллмана от окончательных вершин графа  $K$  к начальной при граничном условии).

В данном случае для любой окончательной вершины  $x_l \in P_{n+1}$  граничное условие выглядит следующим образом:

$$\varphi_i^l(x_l) = \gamma_i(x_l), \quad i \in N.$$

В промежуточной вершине  $x_t$  древовидного графа  $K$  функция Беллмана удовлетворяет следующему рекуррентному соотно-



шению:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{i(x_t)}^t(x_t) &= \max_{y \in F_{x_t}} \left( \gamma_{i(x_t)}(x_t) + \varphi_{i(x_t)}^{t+1}(y) \right) = \\
 (4) \qquad &= \gamma_{i(x_t)}(x_t) + \max_{y \in F_{x_t}} \left( \varphi_{i(x_t)}^{t+1}(y) \right) = \\
 &= \gamma_{i(x_t)}(x_t) + \varphi_{i(x_t)}^{t+1}(\bar{y}).
 \end{aligned}$$

Для игрока  $j \neq i(x_t)$  значения функции Беллмана определяются по правилу:

$$(5) \qquad \varphi_j^t(x_t) = \gamma_j(x_t) + \varphi_j^{t+1}(\bar{y}).$$

Решая уравнение Беллмана, находим значения  $\varphi_i^t$ ,  $t = 0, \dots, l$ ,  $i \in N$ . При  $t = 0$  уравнение решено. Вектор  $(\varphi_1^0(x_0), \dots, \varphi_n^0(x_0))$  назовем значением многошаговой сетевой игры с полной информацией.

Вместе с нахождением значения многошаговой сетевой игры определяются и оптимальные стратегии игроков, которые по построению образуют ситуацию абсолютного равновесия в игре: в каждой вершине  $x \in X$  древовидного графа  $K$  игрок  $i(x)$  выбирает вершину  $y \in F_x$  согласно правилу (4). В ситуации абсолютного равновесия реализуется некоторый путь в графе из начальной вершины в окончательную. Такой путь будем называть оптимальным путем в многошаговой сетевой игре.

На основании приведенного алгоритма имеет место следующее утверждение.

**Теорема 1.** Построенная ситуация  $u^*(\cdot) = (u_1^*(\cdot), \dots, u_n^*(\cdot))$ , в которой для каждой вершины  $x \notin P_{n+1}$ , стратегия  $u_i^*(x)$  игрока  $i$  определяется по правилу

$$u_i^*(x) = \bar{y},$$

где  $\bar{y}$  находится из соотношения (4), образует ситуацию абсолютного равновесия по Нэшу в многошаговой сетевой игре, заданной на древовидном графе  $K$ .

Однако, не всегда гарантируется единственность абсолютно-го равновесия по Нэшу в многошаговой сетевой игре.

**Замечание 1.** Пусть наряду с вершиной  $\bar{y} \in F_{x_t}$ , доставляющей максимум значение функции  $\varphi_{i(x_t)}^{t+1}(y)$  в (4), вершина  $\tilde{y} \in F_{x_t}$  также является точкой максимума этой функции. Тогда с очевидностью выполняется следующее равенство:

$$\varphi_{i(x_t)}^{t+1}(\bar{y}) = \varphi_{i(x_t)}^{t+1}(\tilde{y}),$$

которое, в свою очередь, приводит к одному и тому же значению  $\varphi_{i(x_t)}^t(x_t)$ . Следовательно, игроку, принимающему решение в вер-

шине  $x_t$  (игроку  $i(x_t)$ ), можно выбрать любую вершину  $y \in F_{x_t}$ , доставляющую максимум функции  $\varphi_{i(x_t)}^{t+1}(y)$  в (4).

В тех же вершинах  $\bar{y}$  и  $\tilde{y}$  для отличных от  $i(x_t)$  игроков  $j \in N$ ,  $j \neq i(x_t)$  в общем случае справедливо следующее соотношение:

$$\varphi_j^{t+1}(\bar{y}) \neq \varphi_j^{t+1}(\tilde{y}).$$

Данное обстоятельство означает, что выбор игроком  $i(x_t)$  вершины из множества

$$(6) \quad I(x_t) = \arg \max_{y \in F_{x_t}} \varphi_{i(x_t)}^{t+1}(y)$$

влияет на решения последующих игроков (в силу различия значений функции Беллмана этих игроков в точках множества  $I(x_t)$ ). Таким образом, в общем случае в многошаговой сетевой игре имеет место неединственность оптимального пути с различными значениями функции выигрыша.

Случай неединственности оптимального пути легко обходится введением понятия индифферентного равновесия по Нэшу в многошаговой игре с полной информацией [8]. Поскольку в общем случае  $|I(x_t)| \geq 1$ , предполагается, что игроку  $i(x_t)$  безразличен выбор вершины из множества  $I(x_t)$ . Предпишем  $i(x_t)$  выбирать эти вершины с одинаковыми вероятностями, т. е.  $p^{x_t}(y) = 1/|I(x_t)|$ , для любого  $y \in I(x_t)$ . Тогда в промежуточной

вершине  $x_t$  древовидного графа  $K$  функция  $\varphi_i^t$  удовлетворяет аналогичному (4) рекуррентному соотношению:

$$(7) \quad \varphi_i^t(x_t) = \gamma_{i(x_t)}(x_t) + \frac{1}{|I(x_t)|} \cdot \sum_{y \in I(x_t)} \varphi_{i(x_t)}^{t+1}(y).$$

Для игрока  $j \neq i(x_t)$  значения функции  $\varphi$  определяются по правилу:

$$(8) \quad \varphi_j^t(x_t) = \gamma_j(x_t) + \frac{1}{|I(x_t)|} \cdot \sum_{y \in I(x_t)} \varphi_j^{t+1}(y).$$

Решая уравнение Беллмана, находим значения  $\varphi_i^t$ ,  $t = 0, \dots, l$ ,  $i \in N$ . При  $t = 0$  уравнение решено. Вектор  $(\varphi_1^0(x_0), \dots, \varphi_n^0(x_0))$  также назовем значением многошаговой сетевой игры с полной информацией.

По аналогии с теоремой 1 справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** Построенная ситуация  $u^{IE}(\cdot) =$

$(u_1^{IE}(\cdot), \dots, u_n^{IE}(\cdot))$ , в которой для каждой вершины  $x \notin P_{n+1}$ , стратегия  $u_i^{IE}(x)$  игрока  $i$  определяется по правилу

$$u_i^{IE}(x) = \{p^x(y)\}, y \in I(x), p^x(y) = \frac{1}{|I(x)|},$$

где вершины  $y$  находятся с использованием соотношений (6)-(7), образует ситуацию индифферентного равновесия по Нэшу в многошаговой сетевой игре, заданной на древовидном графе  $K$ .

### 3. Численный пример многошаговой сетевой игры с полной информацией

Для иллюстрации алгоритма построения решения сетевой игры приведем контрольный пример.

Рассмотрим трехшаговую сетевую игру. Пусть  $N = \{1, 2, 3\}$  есть множество игроков. Построим древовидный граф  $K$  с начальной вершиной в  $x_0$ .

Пусть в  $x_0$  задана сеть, представленная на рис. 1.

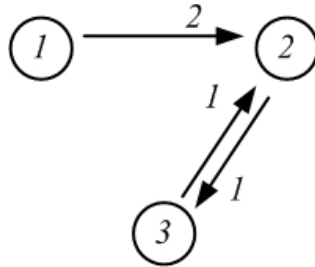


Рис. 1. Сеть  $G_{x_0}$

Множество ребер  $g^{x_0} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2)\}$ . Зададим функцию полезности  $\theta(x_0)$  в виде матрицы  $\Theta(x_0)$ :

$$\Theta(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что в начальной вершине ходит игрок 1, у которого есть три альтернативы: (1) не предпринимать никаких действий (при этом игра переходит в вершину  $x_1$ ), (2) разорвать связь с игроком 2 (при этом игра переходит в вершину  $x_2$ ), (3) наладить связь с игроком 3 (при этом игра переходит в вершину  $x_3$ ). В зависимости от выбора альтернативы игроком 1 имеем:

$$\begin{aligned} g^{x_1} &= g^{x_0}, & \text{если игрок 1 выбирает первую альтернативу} \\ & & \text{в вершине } x_0; \\ g^{x_2} &= g^{x_0} \setminus (1, 2), & \text{если игрок 1 выбирает вторую альтернативу} \\ & & \text{в вершине } x_0; \\ g^{x_3} &= g^{x_0} \cup (1, 3), & \text{если игрок 1 выбирает третью альтернативу} \\ & & \text{в вершине } x_0. \end{aligned}$$

Пусть функции полезностей  $\theta(x_1)$ ,  $\theta(x_2)$  и  $\theta(x_3)$  заданы в виде следующих матриц:

$$\Theta(x_1) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \Theta(x_2) = \Theta(x_3) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что вершины  $x_1$  и  $x_3$  являются окончательными, а вершина  $x_2$  является личной позицией игрока 2. В  $x_2$  второй игрок имеет три альтернативы: (1) не предпринимать никаких действий (при этом игра переходит в вершину  $x_4$ ), (2) наладить связь с игроком 1 (при этом игра переходит в вершину  $x_5$ ), (3) разорвать связь с игроком 3 (при этом игра переходит в вершину  $x_6$ ). В зависимости от выбора альтернативы игроком 2 имеем:

$g^{x_4} = g^{x_2}$ , если игрок 2 выбирает первую альтернативу в вершине  $x_2$ ;

$g^{x_5} = g^{x_2} \cup (2, 1)$ , если игрок 2 выбирает вторую альтернативу в вершине  $x_2$ ;

$g^{x_6} = g^{x_2} \setminus (2, 3)$ , если игрок 2 выбирает третью альтернативу в вершине  $x_2$ .

Пусть функции полезностей  $\theta(x_4)$ ,  $\theta(x_5)$  и  $\theta(x_6)$  заданы в виде следующих матриц:

$$\Theta(x_4) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \Theta(x_5) = \Theta(x_6) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что вершины  $x_4$  и  $x_6$  являются окончательными, а вершина  $x_5$  является личной позицией игрока 3. В  $x_5$  третий игрок имеет три альтернативы: (1) не предпринимать никаких

действий (при этом игра переходит в вершину  $x_7$ ), (2) наладить связь с игроком 1 (при этом игра переходит в вершину  $x_8$ ), (3) разорвать связь с игроком 2 (при этом игра переходит в вершину  $x_9$ ). В зависимости от выбора альтернативы игроком 2 имеем:

$$\begin{aligned}
 g^{x_7} &= g^{x_5}, && \text{если игрок 3 выбирает первую альтернативу} \\
 &&& \text{в вершине } x_5; \\
 g^{x_8} &= g^{x_5} \cup (3, 1), && \text{если игрок 3 выбирает вторую альтернативу} \\
 &&& \text{в вершине } x_5; \\
 g^{x_9} &= g^{x_5} \setminus (3, 2), && \text{если игрок 3 выбирает третью альтернативу} \\
 &&& \text{в вершине } x_5.
 \end{aligned}$$

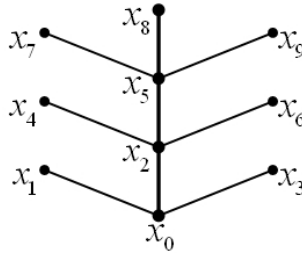
Пусть функции полезностей  $\theta(x_7)$ ,  $\theta(x_8)$  и  $\theta(x_9)$  заданы в виде следующих матриц:

$$\Theta(x_7) = \Theta(x_8) = \Theta(x_9) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что вершины  $x_7$ ,  $x_8$ ,  $x_9$  являются окончательными вершинами. Тогда множества личных позиций игроков  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  и множество окончательных вершин  $P_4$  имеют вид:  $P_1 = \{x_0\}$ ,  $P_2 = \{x_2\}$ ,  $P_3 = \{x_5\}$ ,  $P_4 = \{x_1, x_3, x_4, x_6, x_7, x_8, x_9\}$ , а древовидный граф  $K$  представлен на рис. 2.

Для начала вычислим индивидуальные выплаты игрокам в каждой вершине графа  $K$ . Рассмотрим вершину  $x_0$ . Построим характеристическую функцию по правилу (1):

$$\begin{aligned}
 v(x_0, \{1, 2, 3\}) &= 4, \\
 v(x_0, \{1, 2\}) &= 2, \\
 v(x_0, \{1, 3\}) &= 0, \\
 v(x_0, \{2, 3\}) &= 2, \\
 v(x_0, \{1\}) &= v(x_0, \{2\}) = v(x_0, \{3\}) = 0.
 \end{aligned}$$

Рис. 2. Древоидный граф  $K$ 

Индивидуальные выплаты игрокам в  $x_0$  вычисляются в соответствии с вектором Шепли по правилу (3). Таким образом получаем вектор:

$$\gamma(x_0) = (1, 2, 1).$$

Аналогичным образом вычисляются индивидуальные выплаты игрокам в остальных вершинах древоидного графа  $K$ . Приведем их окончательные значения:

$$\begin{aligned} \gamma(x_1) &= (-1,5, 0, 1,5), & \gamma(x_6) &= (0, 2, 2), \\ \gamma(x_2) &= (0, 1, 1), & \gamma(x_7) &= (1, 2,5, 1,5), \\ \gamma(x_3) &= (0,5, 2,5, 0), & \gamma(x_8) &= (3,5, 2,5, 4), \\ \gamma(x_4) &= (0, 1,5, 1,5), & \gamma(x_9) &= (1, 2, 1), \\ \gamma(x_5) &= (-0,5, 2,5, 3), \end{aligned}$$

После определения выплат игрокам в каждой вершине графа  $K$  построение ситуации абсолютного равновесия в многошаговой сетевой игре не представляет особых трудностей. Данная процедура полностью аналогична задаче отыскания ситуации абсолютного равновесия в многошаговой игре с полной информацией с той лишь разницей, что в классической постановке выигрыши игроков заданы в окончательных вершинах графа игры, а в промежуточных полагаются равными нулю. Искомая ситуация абсолютного равновесия в многошаговой сетевой игре находится с использованием соотношений (4)-(5).

Оптимальные стратегии игроков следующие:

$$u_1^*(x_0) = x_2, \quad u_2^*(x_2) = x_5, \quad u_3^*(x_5) = x_8.$$

В ситуации абсолютного равновесия  $(u_1^*, u_2^*, u_3^*)$  реализуется оптимальный путь  $\{x_0, x_2, x_5, x_8\}$  из начальной вершины  $x_0$  в конечную  $x_8$ . Вдоль оптимального пути игра развивается следующим образом. В начальный момент задана сеть  $G_{x_0}$ , указанная на рис. 1. Далее игрок 1 разрывает связь со вторым игроком, что приводит к сети  $G_{x_2}$ , показанной на рис. 3. После этого делает

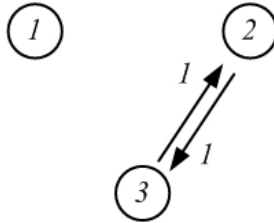


Рис. 3. Сеть  $G_{x_2}$

ход игрок 2, который за свой ход устанавливает связь с игроком 1, что приводит к сети  $G_{x_5}$ , показанной на рис. 4. И, наконец,

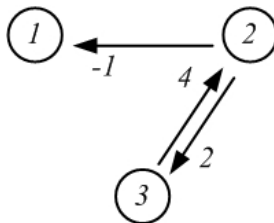
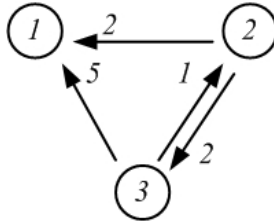


Рис. 4. Сеть  $G_{x_5}$

своим ходом игрок 3 заканчивает игру, установив связь с игроком 1, что приводит к сети  $G_{x_8}$ , показанной на рис. 5.

Значение многошаговой сетевой игры равно  $(4, 8, 9)$ , а пошаговые индивидуальные выплаты следующие:  $\gamma(x_0) =$



Рис. 5. Сеть  $G_{x_8}$ 

$(1, 2, 1)$ ,  $\gamma(x_2) = (0, 1, 1)$ ,  $\gamma(x_5) = (-0,5, 2,5, 3)$ ,  $\gamma(x_8) = (3,5, 2,5, 4)$ .

### Литература

1. БЕЛЛМАН Р. *Динамическое программирование*. – М, 1960.
2. ПЕТРОСЯН Л.А., КУЗЬЮТИН Д.В. *Игры в развернутой форме: оптимальность и устойчивость*. – СПб, 2000.
3. ПЕТРОСЯН Л.А., СЕДАКОВ А.А., СЮРИН А.Н. *Многошаговые игры с коалиционной структурой* // Вестник СПбГУ. – 2006. – Т. 10. – №3. – С. 97-110.
4. ADJERON D., KANDASWAMY V. *Game-Theoretic Analysis of Network Community Structure* // International Journal of Computational Intelligence Res. – 2007. – V. 3. – №4. – P. 313-325.
5. BELLMAN R.E. *On the Theory of Dynamic Programming*. – Proceedings of the National Academy of Sciences, 1952.
6. KUHN H.W. *Extensive Games and Problem Information* // Ann. Math Studies. – 1953. – V. 28. – P. 193-216.
7. NASH J. *Non-cooperative Games* // Ann. of Math. – 1951. – V. 54. – P. 286-295.
8. PETROSJAN L.A., MAMKINA S.I. *Value for the Games with Changing Coalitional Structure* // Games Theory and Applications. – 2005. – V. 10. – P. 141-152.

9. SHAPLEY L.S. *A Value for  $n$ -Person Games*. Contributions to the Theory of Games II, Princeton: Princeton University Press. 1953. – P. 307-317.
10. VIVES X. *Nash equilibrium with strategic complementarities* // Journal of Mathematical Economics. – 1990. – V. 19. – №3. – P. 305-321.
11. VIVES X. *Strategic Complementarities in Multi-Stage Games*. CEPR Discussion Papers 5583. C.E.P.R. Discussion Papers, 2006.

## MULTISTAGE NETWORKING GAMES WITH FULL INFORMATION

**Leon Petrosjan**, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Saint-Peterburg State University, Doctor of Sc., professor (spbuoasis7@peterlink.ru).

**Artem Sedakov**, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Saint-Peterburg State University, Cand.Sc. (formail@list.ru).

*Abstract: Multistage networking games with full information are considered. The network structure which connects the players is defined at every time moment. We assume that each verge has a utility (the player's profit from the connection with another player), and players have a right to change the network structure at every stage. The approach to define optimal players' behavior is proposed.*

**Keywords:** network, networking games, utility, Shapley value, Nash equilibrium.