Управление большими системами. Выпуск 28

УДК 519.82
ББК 22.18

ВОЗМУЩЕНИЕ И КОРРЕКЦИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Муравьева О. В. [1]

Рассматривается устойчивость свойств совместности и несовместности систем линейных неравенств при коррекции/возмущении всех параметров.

Ключевые слова: матричная коррекция, несовместная система линейных неравенств, устойчивость совместной системы линейных неравенств.

Введение

При изучении математических моделей важную роль играет изучение робастности, или «грубости» модели — сохранения некоторого свойства модели при малых возмущениях параметров. В модели выделяем некоторое свойство и рассматриваем сохранение этого свойства у возмущенной модели. Если у исходной модели свойство выполнялось, то определяем минимальное изменение параметров модели, при котором свойство не выполняется — радиус устойчивости. Если у исходной модели свойство не выполнялось, получаем задачу минимальной коррекции.

В [5] для фиксированного свойства математической модели ω и подсистемы исходных данных S вводится понятие (S, ω)-устойчивости. Математическая модель называется (S, ω)-устойчивой, если свойство ω сохраняется при малых вариациях параметров S.

---

[1] *Ольга Викторовна Муравьева, кандидат физико-математических наук, доцент (muraveva@mail.ru).*

Для (S,ω)-устойчивых моделей зададим на S критерий $\Phi\colon S \to \mathbb{R}_+$. Получим задачу определения радиуса (S,ω)-устойчивости: минимального по критерию Φ изменения параметров S, при котором свойство ω нарушается.

Для системы линейных неравенств $Ax \leqslant b$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$, рассмотрим свойство совместности/несовместности. Считаем, что все параметры модели могут подвергаться случайной или целенаправленной модификации либо быть неточно заданными.

Параметры модели образуют расширенную матрицу ограничений системы $\bar{A} = [-b, A]$. Здесь квадратными скобками $[-b, A]$ обозначена матрица размерности $(m+1)\times n$, полученная приписыванием слева к матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ вектор-столбца $b \in \mathbb{R}^m$ (со знаком минус).

В качестве критерия величины изменения параметров будем рассматривать одну из матричных норм

$$\|\Delta\bar{A}\|_\infty = \max_{i,j} |\Delta\bar{a}_{ij}|,$$

$$\|\Delta\bar{A}\|_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \Delta\bar{a}_{ij}^2},$$

$$\|\Delta\bar{A}\|_2 = \max_{\|e\|_2=1} \|\Delta\bar{A}e\|_2.$$

Понятие устойчивой системы линейных неравенств введено С. Н. Черниковым [10, 11].

Неравенство совместной системы линейных неравенств $Ax \leqslant b$ называется устойчивым, если хотя бы одно из решений системы удовлетворяет строгому неравенству. Неравенство системы называется неустойчивым, если все решения системы удовлетворяют равенству.

Система линейных неравенств называется устойчиво совместной, если совместна соответствующая система со строгими неравенствами. Система $Ax \leqslant b$ устойчиво совместна тогда и только тогда, когда все входящие в нее неравенства устойчивы. Вводится также понятие устойчивого решения и меры несовместности системы линейных линейных неравенств, допускающей изменение правой части системы ограничений b [6, 11]. В [5] получены необходимые и достаточные условия устойчивости системы линейных неравенств.

Если исследуется свойство несовместности системы, соответствующая задача (S, ω)-устойчивости формулируется в терминах методов коррекции. Для задачи оптимальной коррекции всех параметров несовместной системы линейных неравенств по ряду линейных и кусочно-линейных критериев оптимальности предлагаются методы решения (сведения к задачам оптимизации с линейными ограничениями) [1, 2, 3, 7].

Большое количество работ, опубликованных за рубежом, посвящено методам определения максимальной совместной подсистемы несовместной системы линейных неравенств [12, 14, 15, 16, 18]. Совместность интервальной системы линейных неравенств рассматривается в [20].

Для исследования совместности и несовместности систем линейных уравнений широко используется обобщенный метод наименьших квадратов [17, 21]. Применение обобщенного метода наименьших квадратов к несовместной системе неравенств рассматривается в [19]. В работе [13] предлагается метод минимальной коррекции всех коэффициентов несовместной системы линейных неравенств, основанный на сингулярном разложении Ланцоша матрицы.

В настоящей статье в п. 1 рассматривается радиус устойчивости решения системы линейных неравенств по квадратичному и минимаксному критерию, в п. 2 — радиус несовместности системы линейных неравенств.

В задачах управления линейные неравенства встречаются как ограничения на управление или состояние. В п. 3 статьи рассматривается дискретный динамический процесс с линейным уравнением движения $x^{(k+1)} = Ax^{(k)}$ и множеством достижимости, заданным линейным неравенством $(c, x^{(N)}) \geqslant c_0$ при условии противоречивости. Задача коррекции такого вида характерна также для управляемого процесса с управлением в форме обратной связи по состоянию $x^{(k+1)} = Ax^{(k)} + Bu^{(k)}$, $u^{(k)} = Kx^{(k)}$. К совместности системы линейных неравенств сводится, например, проверка обобщенной сверхустойчивости матрицы и сверхстабилизируемости по состоянию и выходу линейной стационарной системы управления с обратной связью [8, 9].

1. Радиус устойчивости решения системы линейных неравенств

Дана совместная система линейных неравенств

$$Ax \leqslant b,\ x \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^m,\ A \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

вектор x^0 — решение этой системы

$$x^0 \in X,\ X = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \leqslant b\}.$$

Определим меру устойчивости решения x^0 как величину минимального возмущения параметров, в результате которого x^0 не является решением системы

$$\Phi(x^0) = \inf_{\Delta A, \Delta b} \{\|[-\Delta b, \Delta A]\| \colon$$

$$x^0 \text{ не является решением } (A + \Delta A)x \leqslant b + \Delta b\}.$$

Рассмотрим сначала критерий в виде евклидовой нормы матрицы

$$\Phi(x^0) = \|[-\Delta b, \Delta A]\|_e^2 = \sum_{i=1}^{m} \|(-\Delta b_i, \Delta a_i)\|_2^2.$$

Нетрудно видеть, что для граничных точек допустимого множества (т. е. неустойчивых решений) $\Phi(x) = 0$, а для внутренних точек (устойчивых решений) минимум реализуется при коррекции одного из ограничений $(a_i, x) \leqslant b_i$:

$$\Phi(x) = \min_i \Phi_i(x),$$

$$\Phi_i(x) = \min_{\Delta a, \Delta b} \{\|(-\Delta b, \Delta a)\|^2 \colon (a_i + \Delta a, x) = b_i + \Delta b\}.$$

Лемма 1.

$$\Phi_i(x) = \frac{(b_i - (a_i, x))^2}{\|x\|^2 + 1} = \frac{(\bar{a}_i, y)^2}{\|y\|^2} = \| \operatorname{Pr}_y \bar{a}_i\|^2,$$

где $y = (1, x)$, $\bar{a}_i = (-b_i, a_i)$, $\operatorname{Pr}_y \bar{a}_i$ *– проекция* $\bar{a}_i$ *на* y.

Доказательство. Обозначим $h = (-\Delta b_i, \Delta a_i)$, учитывая $\|y\| \neq 0$, получим

$$\Phi_i(x) = \min_h \{\|h\|^2 \colon$$

$$(a_i + \Delta a)x = b_i + \Delta b\} = \min_h \{\|h\|^2 \colon (h, y) = (\bar{a}_i, y)\}.$$

Откуда очевидным образом следует утверждение леммы.

Предположим, что множество X ограничено, и рассмотрим задачу определения самого устойчивого решения

(1) $$x^* = \arg\max_{x \in X} \Phi(x), \ \Phi^* = \Phi(x^*).$$

Теорема 1.

$$\Phi^* = \max_{x \in X} \inf_{\Delta A, \Delta b} \{\|[-\Delta b, \Delta A]\|_e^2 \colon (A + \Delta A)x \nleqslant b + \Delta b\} =$$

$$= \max_{e \colon \bar{A}e \geqslant 0, e_0 > 0, \|e\| = 1} \min_i (\bar{a}_i, e)^2, \text{ где } \bar{A} = [-b, A].$$

Доказательство. Из леммы

$$\Phi^* = \max_{x \in X} \min_i \frac{(b_i - (a_i, x))^2}{\|x\|^2 + 1} = \max_{y\colon \bar{A}y \geqslant 0, y_0 = 1} \min_i \frac{(\bar{a}_i, y)^2}{\|y\|^2} =$$

$$\max_{y\colon \bar{A}y \geqslant 0, y_0 > 0} \min_i \|Pr_y \bar{a}_i\|^2.$$

Обозначим $e = y/\|y\|$, получим утверждение теоремы.

Таким образом, требуется найти направление y, для которого минимальная из проекций векторов $\{\bar{a}_i\}$ максимальна. Эту задачу можно также интерпретировать как задачу проектирования на многогранную область. Дискретные минимаксные задачи такого типа рассматриваются, например, в [4], в частности

$$\max_{\|e\|=1} \min_i (a_i, e) = \|z^*\|,$$

где z^* — ближайшая к началу координат точка множества $L = \{z\colon z = \sum\limits_i \alpha_i a_i, \alpha_i \geqslant 0, \sum\limits_i \alpha_i = 1\}$. Таким образом, устойчивое по параметрам решение однородной системы линейных неравенств — это ближайшая к началу координат точка выпуклой оболочки строк матрицы ограничений.

Для критерия

$$\|[-\Delta b, \Delta A]\|_\infty = \max_{i,j} |\Delta \bar{a}_{ij}| = \max_i \|\Delta \bar{a}_i\|_\infty$$

также очевидным образом выполняется декомпозиция по строкам матрицы ограничений:

$$\Phi(x) = \min_i \Phi_i(x),$$

$$\Phi_i(x) = \min_{\Delta a, \Delta b} \{\|[-\Delta b, \Delta a]\|_\infty \colon (a_i + \Delta a)x = b_i + \Delta b\}.$$

Лемма 2.

$$\min_{\Delta a,\Delta b}\{\|[-\Delta b,\Delta a]\|_\infty\colon (a+\Delta a)x=b+\Delta b\}=\frac{|b_i-(a_i,x)|}{\sum\limits_j |x_j|+1}.$$

Доказательство. Обозначим $y=(1,x)$, $h=(-b,a)$. Получим задачу $\|h\|_\infty\to\min$ при условии $(h,y)=b-(a,x)$. Минимум достигается на векторе h^*, где $|h_j^*|=\frac{|b-(a,x)|}{\sum\limits_j |y_j|}$ и $\operatorname{sgn} h_j=\operatorname{sgn}(b-(a,x))\operatorname{sgn} y_j$. Действительно, условие $(h^*,y)=b-(a,x)$ выполняется, $\|h^*\|_\infty=\frac{|b-(a,x)|}{\sum\limits_j |y_j|}=\frac{|b-(a,x)|}{\|y\|_1}$. Оптимальность h^* следует из неравенства Гельдера для векторных норм $\|h\|_\infty\cdot\|y\|_1\geqslant(h,y)$.

Задача определения устойчивого решения принимает вид

$$\Phi(x^*)=\max_{x\in X}\min_i\frac{b_i-(a_i,x)}{\sum\limits_j |x_j|+1}.$$

Последняя максиминная задача стандартным образом сводится к задаче линейного программирования. Введем новые переменные: $t_j=|x_j|$, $j=1,\ldots,n$ с соответствующими ограничениями $-t_j\leqslant x_j\leqslant t_j$. Равенство $y=\frac{1}{\sum\limits_j t_j+1}$ влечет $y(\sum\limits_j t_j+1)=1$, что после введения еще n переменных $z=(z_1,\ldots,z_n)$, $z=yt$ дает $\sum\limits_j z_j+y=1$. Обозначим $s=yx\in\mathbb{R}^n$, целевая функция $\frac{b_i-(a_i,x)}{\sum\limits_j |x_j|+1}$ примет вид $yb_i-(a_i,s)$. Осталось ввести скалярную переменную

$u = \min_i (yb_i - (a_i, s))$. В результате получим задачу линейного программирования

(2)
$$\begin{gathered} \max u, \\ u \leqslant yb_i - (a_i, s), \quad i = 1, \ldots, m, \\ -z_j \leqslant s_j \leqslant z_j, \quad j = 1, \ldots, n, \\ \sum_j z_j + y = 1, \\ As \leqslant by, \quad y \geqslant 0 \end{gathered}$$

относительно переменных $u, y \in \mathbb{R}$, $s, z \in \mathbb{R}^n$. Для этой задачи выполняется теорема.

Теорема 2. *Если* u^*, y^*, s^*, z^* *– решение задачи* (2)*, то* $x^* = \frac{1}{y^*} s^*$ *— решение задачи* (1) *по критерию* $\| \cdot \|_\infty$.

2. Радиус несовместности системы линейных неравенств

Пусть дана несовместная система линейных неравенств

$$Ax \leqslant b,\ x \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^m,\ A \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Определим радиус несовместности этой системы для спектральной $\|[-\Delta b, \Delta A]\|_2$ и евклидовой $\|[-\Delta b, \Delta A]\|_e$ матричных норм.

Лемма 3 (Лемма Тихонова)**.** *Система* $Hx = d$ *при заданных* $x \in \mathbb{R}^n$*,* $x \neq 0$*,* $d \in \mathbb{R}^m$ *имеет решение с минимальной матричной нормой (евклидовой или спектральной)*

$$H^* = \frac{dx^{\mathrm{T}}}{\|x\|^2},\ \|H^*\|_2 = \|H^*\|_e = \frac{\|d\|}{\|x\|} = \|H^* e^*\|,\ \textit{где}\ e^* = \frac{x}{\|x\|}.$$

Теорема 3.

$$R = \inf_{\Delta b, \Delta A, x} \{\|[-\Delta b, \Delta A]\|^2 : (A+\Delta A)x \leqslant b+\Delta b\} = \min_{\hat{B}e^i<0} \{\lambda_i(\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{B})\},$$

где $\bar{B} \in R^{m_1 \times n}$, $\hat{B} \in R^{(m-m_1)\times n}$ — матрицы, составленные из различных строк матрицы $B = [-b, A]$ так, что каждая строка включается в одну из матриц, $\lambda_i(\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{B})$, e^i — минимальное собственное число и соответствующий единичный собственный вектор $\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{B}$, минимум берется по всем подматрицам $\bar{B}$, $\hat{B}$, для которых выполняется $\hat{B}e^i < 0$.

Доказательство. Используя дополнительные переменные y, выполняя замену $z = (1, x)$, $B = [-b, A]$ и используя лемму 3 для минимизации по матрице $[-\Delta b, \Delta A]$, можно записать следующие равенства:

$$\inf_{\Delta b, \Delta A, x} \{\|[-\Delta b, \Delta A]\|^2 \colon (A + \Delta A)x \leqslant b + \Delta b\} =$$

$$= \inf_{\Delta b, \Delta A, x, y} \{\|[-\Delta b, \Delta A]\|^2 \colon (A + \Delta A)x + y = b + \Delta b,\ y \geqslant 0\} =$$

$$= \inf_{\Delta b, \Delta A, z, y} \{\|[-\Delta b, \Delta A]\|^2 \colon [-\Delta b, \Delta A]z = -Bz - y,\ y \geqslant 0\} =$$

$$= \inf_{z,y} \left\{ \frac{\| -Bz - y\|^2}{\|z\|^2} : y \geqslant 0 \right\} =$$

$$= \inf_{z,y} \left\{ \frac{\|Bz + y\|^2}{\|z\|^2} : y \geqslant 0 \right\}.$$

Обозначим $\beta = \frac{1}{\|z\|}$, $e = \beta z$ и получим задачу

$$\inf_{e,\beta,y} \left\{ \|Be + \beta y\|^2 \colon y \geqslant 0,\ \beta > 0,\ \|e\| = 1 \right\}. \tag{3}$$

Найдем минимум по переменным e, y, используя функцию Лагранжа:

$$L(e, y, \lambda) = \|Be + \beta y\|^2 - \lambda \|e\|^2.$$

Условия экстремума имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial e^i}(e, y, \lambda) = 0, \quad i = 1, \dots, n+1, \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial y_i}(e, y, \lambda) \geqslant 0, \quad i = 1, \dots, m, \\[2ex] y_i \dfrac{\partial L}{\partial y_i}(e, y, \lambda) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Или, в данном случае,

$$\begin{cases} B^{\mathrm{T}} Be + \beta B^{\mathrm{T}} y - \lambda e = 0, \\ Be + \beta y \geqslant 0, \\ y_i (Be + \beta y)_i = 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Обозначим $I = \{1, \dots, m\}$, $I' = \{i \in I \colon y_i = 0\}$ или, как видно из второго неравенства, I' — это множество индексов, для которых $(Be)_i \geqslant 0$. При этом матрица B разбивается (по строкам) на две подматрицы: $\bar{B}$ — подматрица, состоящая из строк с номерами, принадлежащими I', $\hat{B}$, состоящая из остальных строк. Согласованное обозначение для разбиения вектора y: $\bar{y} \in \mathbb{R}^{|I'|}$, $\bar{y}_i = 0$, $\hat{y} \in \mathbb{R}^{m - |I'|}$, $\hat{y}_i > 0$.

Из третьего уравнения

$$\hat{B} e + \beta \hat{y} = 0,$$

$$\hat{B} e = -\beta \hat{y}.$$

Заметим, что $(Be)_i \geqslant 0$ при $i \notin I$, и подставим выражение для $\beta\hat{y}$ в первое уравнение:

$$B^{\mathrm{T}}Be + \beta\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{y} + \beta\hat{B}^{\mathrm{T}}\hat{y} - \lambda e = 0,$$

$$B^{\mathrm{T}}Be - \hat{B}^{\mathrm{T}}\hat{B}e - \lambda e = 0,$$

$$(B^{\mathrm{T}}B - \hat{B}^{\mathrm{T}}\hat{B})e = \lambda e.$$

Или, что то же самое,

$$\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{B}e = \lambda e.$$

Действительно, элемент матрицы $B^{\mathrm{T}}B - \hat{B}^{\mathrm{T}}\hat{B}$, стоящий на пересечении i-ой строки и j-го столбца, равен соответствующему элементу матрицы $\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{B}$:

$$(B^{\mathrm{T}}B - \hat{B}^{\mathrm{T}}\hat{B})_{ij} = (b^i, b^j) - (\hat{b}^i, \hat{b}^j) = \sum_{k \in I} b_{ki}b_{kj} - \sum_{k \in I \setminus I'} b_{ki}b_{kj} =$$

$$= \sum_{k \in I'} b_{ki}b_{kj} = (\bar{b}^i, \bar{b}^j) = (\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{B})_{ij},$$

где b^i, $\hat{b}^i$, $\bar{b}^i$ — столбец соответствующей матрицы B, $\hat{B}$, $\bar{B}$.

Итак, из условия минимума функции Лагранжа по вектору e следует, что e является собственным вектором некоторой подматрицы $\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{B}$, при этом выполняется $\bar{B}e \geqslant 0$, $\hat{B}e < 0$.

Имеем

$$\|Be + \beta y\|^2 = \|\bar{B}e\|^2 = (\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{B}e, e) = (\lambda e, e) = \lambda,$$

т. е. значение минимизируемой функции задачи (3) равно λ, следовательно, требуется найти минимальное собственное значение матрицы $\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{B}$, удовлетворяющее условиям $\bar{B}e \geqslant 0$, $\hat{B}e < 0$.

Условие $\bar{B}e \geqslant 0$ является условием оптимальности, и если его не проверять, то соответствующее собственное значение не будет минимальным значением функции. Условие $\hat{B}e < 0$ обеспечивает допустимость решения, если $(\hat{B}e)_i > 0$, то $\hat{y}_i < 0$, так как $\|Be + \beta y\|^2 = \lambda_{min}(\bar{B})$ при известных $\bar{B}$, $\hat{B}$, e влечет $\hat{B}e = -\beta y$.

Геометрически задача (3) минимизации по $y \geqslant 0$ представляет собой задачу проектирования на неположительный ортант пространства R^m:

$$\inf_{y \geqslant 0} \|Be - (-y)\|^2 = \|Be - P_{\mathbb{R}^m_-}(Be)\|^2 =$$

$$= \|Be - \hat{B}'e\|^2 = \|\bar{B}'e\|^2 = \|\bar{B}'e\|^2.$$

Здесь, в отличие от $\bar{B}$, ($\hat{B}$), имеющих, возможно, меньшую размерность, чем B, матрицы $\bar{B}'$ ($\hat{B}'$) получены из матрицы B обнулением строк, для которых скалярное произведение на вектор e отрицательное (неотрицательное), т. е. с номерами из множества $I \setminus I'$ (множества I) в соответствии с обозначением, введенным в доказательстве теоремы. Тогда, очевидно, $(\hat{B}e)_i = \min\{0, (Be_i)\}$, $\hat{B}'e = -P_{\mathbb{R}^m_-}(Be)$ и $\|\bar{B}'e\|^2 = \|\bar{B}'e\|^2$.

3. Коррекция линейного динамического процесса с заданным множеством достижимости

Рассмотрим применение методов коррекции системы линейных неравенств к исследованию дискретного динамического процесса.

Пусть динамический процесс в пространстве $\mathbb{R}^n$ определяется уравнением $x^{(k+1)} = Ax^{(k)}$, $k = 0, \ldots, N-1$. Условие достижимости в конце процесса заданного множества имеет вид линейного неравенства $(c, x^{(N)}) \geqslant c_0$.

Предположим, что для данной начальной точки $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ при заданном количестве шагов N, матрице $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, коэффициентах ограничения $c \in \mathbb{R}^n$, $c_0 \in \mathbb{R}$, условие достижимости не выполняется. Рассмотрим задачу минимальной коррекции уравнения движения

$$\text{(4)}\quad \min_{\Delta A}\{\|\Delta A\|\colon x^{(k+1)} = (A+\Delta A)x^{(k)},$$

$$k = 0,\dots,N-1,\ (c, x^{(N)}) \geqslant c_0\}.$$

Перепишем задачу в виде:

$$\min\{\|\Delta A\|\colon (c, (A+\Delta A)^N x^{(0)}) \geqslant c_0\}.$$

Для критерия в виде обобщенной матричной l_∞–нормы $\|\Delta A\|_\infty$ рассмотрим задачу минимальной коррекции траектории в $\mathbb{R}^n_+$, т. е. дополнительно предположим, что все элементы матрицы A и векторов x^0 и c неотрицательны.

Из неотрицательности всех параметров задачи следует, что минимальная матрица коррекции состоит из одинаковых элементов $\Delta a^*_{ij} = h^*$, $i, j = 1,\dots,n$. Отметим также, что решение находится на границе допустимой области, т. е. ограничение выполняется как равенство. Обозначим I квадратную матрицу порядка n, все элементы которой равны 1. Получим задачу одномерной оптимизации с одним ограничением-равенством

$$\min\{h\colon (c, (A+hI)^N x^{(0)}) = c_0\}.$$

Ограничение представляет собой уравнение степени N относительно переменной h и может быть решено различными численными методами.

При малых значениях корректирующей матрицы можно найти приближенное значение решения, отбросив слагаемые, содержащие h во второй и более степени.

$$(c, (A^N + h\sum_{k=0}^{N-1} A^k I A^{N-1-k})x^{(0)}) = c_0,$$

$$h^* = \frac{c_0 - (c, A^N x^{(0)})}{\left(c, \left(\sum\limits_{k=0}^{N-1} A^k I A^{N-1-k}\right) x^{(0)}\right)}.$$

Решение можно уточнять итеративно, решая на следующем шаге задачу коррекции матрицы $\tilde{A} = A + h^* I$, пока не будет выполняться с достаточной точностью $(c, \tilde{A}^N x^{(0)}) = c_0$.

Найдем корректирующую матрицу с минимальной евклидовой нормой $\|\Delta A\|_e$.

Лемма 4. *Минимальной по евклидовой норме матрицей ΔA, коэффициенты которой удовлетворяют уравнению*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \Delta a_{ij} b_{ij} = c,$$

является матрица

$$\Delta A^* = \frac{c}{\|B\|_e^2} B, \ \|\Delta A^*\|_e = \frac{|c|}{\|B\|_e},$$

где $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$.

Это утверждение следует, например, из свойств скалярного произведения, если представить левую часть уравнения как скалярное произведение двух n^2-мерных векторов.

Рассмотрим линейное (относительно элементов матрицы ΔA) приближение левой части ограничения $(c, (A + H)^N x^{(0)}) = c_0$.

$$(c, (A + \Delta A)^N x^{(0)}) \approx$$

$$\approx (c, (A^N + A^{N-1}\Delta A + A^{N-2}\Delta A \cdot A + \cdots + \Delta A \cdot A^{N-1}) x^{(0)}) =$$

$$= (c, A^N x^{(0)}) + \sum_{k=0}^{N-1} (c, A^{N-k-1} \Delta A \cdot A^k x^{(0)}) =$$

$$= (c, x^{(N)}) + \sum_{k=0}^{N-1} (y^{(k)}, \Delta A x^{(k)}) = (c, x^{(N)}) + \sum_{i,j=1}^{n} \Delta a_{ij} \sum_{k=0}^{N-1} y_i^{(k)} x_j^{(k)},$$

где $y^{(k)} = \left(A^{N-k-1}\right)^{\mathrm{T}} c$, $k = 0, \ldots, N-1$.

Удовлетворяющая ограничению

$$(c, x^{(N)}) + \sum_{i,j=1}^{n} \Delta a_{ij} \sum_{k=0}^{N-1} y_i^{(k)} x_j^{(k)} = c_0$$

матрица коррекции ΔA с минимальной евклидовой нормой имеет вид

$$\Delta A^* = \frac{c_0 - (c, x^{(N)})}{\|B\|_e^2} B, \quad B = \left(\sum_{k=0}^{N-1} y_i^{(k)} x_j^{(k)} \right)_{i,j=1}^{n}.$$

Обозначим через Y матрицу размера $n \times N$, столбцами которой являются вектора $y^{(0)}, \ldots, y^{(N-1)}$, через X матрицу такой же размерности, составленную из столбцов $x^{(0)}, \ldots, x^{(N-1)}$, т. е.

$$Y = [y^{(0)}, \ldots, y^{(N-1)}] = [(A^{N-1})^{\mathrm{T}} c, (A^{N-2})^{\mathrm{T}} c, \ldots, Ac, c],$$

$$X = [x^{(0)}, \ldots, x^{(N-1)}].$$

Тогда

$$\Delta A^* = \frac{c_0 - (c, x^{(N)})}{\|YX^{\mathrm{T}}\|_e^2} YX^{\mathrm{T}}, \quad \|\Delta A^*\|_e = \frac{c_0 - (c, x^{(N)})}{\|YX^{\mathrm{T}}\|_e}.$$

Матрица ΔA^* является приближенным решением задачи (4), для уточнения решения выполняется коррекция матрицы $A + \Delta A^*$.

Пусть теперь задана управляемая система

$$x^{(k+1)} = Ax^{(k)} + Bu^{(k)},$$

где u — управление в форме обратной связи по состоянию: $u^{(k)} = Kx^{(k)}$. Замкнутая система принимает вид

$$x^{(k+1)} = (A + BK)x^{(k)}.$$

В случае невыполнения условия достижимости рассмотренным выше способом можно выполнить оптимальную коррекцию матрицы $D = A + BK$.

Заключение

Для решения совместной системы линейных неравенств найдена мера устойчивости по критерию в виде евклидовой и l_∞–нормы возмущения параметров. Задача определения решения с наибольшей мерой устойчивости в случае l_∞–нормы сведена к задаче линейного программирования.

Задача определения радиуса несовместности системы линейных неравенств сведена к задачам вычисления собственных значений подматриц расширенной матрицы системы. Предложен метод коррекции матрицы для противоречивой модели дискретного динамического процесса, в том числе управляемого.

Литература

1. ВАТОЛИН А. А. *Аппроксимация несобственных задач линейного программирования по критерию евклидовой нормы* // ЖВМиМФ. – 1984. – Т. 24, №12. – С. 1907–1908.
2. ВАТОЛИН А. А. *Коррекция расширенной матрицы несовместной системы линейных неравенств и уравнений* // Математические методы оптимизации в экономико-математическом моделировании. – М.: Наука, 1991. – С. 240–249.
3. ГОРЕЛИК В. А., МУРАВЬЁВА О. В. *Матричная коррекция данных в задачах оптимизации и классификации* // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. – М.: ВЦ РАН, 2004. – С. 21–32.

4. ДЕМЬЯНОВ В. Ф., МАЛОЗЕМОВ В. Н. *Введение в минимакс.* – М: Наука, 1972.
5. ЕРЕМИН И. И. *Общая теория устойчивости в линейном программировании* // Изв. вузов. Матем. – 1999. – №12. – С. 43–52.
6. ЕРЕМИН И. И. *О несовместных системах линейных неравенств* // ДАН ССР. – 1961. – Т. 138, №6. – С. 1280–1283.
7. ЕРЕМИН И. И., МАЗУРОВ В. Д., АСТАФЬЕВ Н. Н. *Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования.* – М.: Наука, 1983.
8. ПОЛЯК Б. Т., ЩЕРБАКОВ П. С. *Робастная устойчивость и управление.* – М.: Наука, 2002.
9. ПОЛЯК Б. Т. *Обобщенная сверхустойчивость в теории управления* // Автоматика и телемеханика. – 2004. – №4. – С. 70–80.
10. ЧЕРНИКОВ С. Н. *Системы линейных неравенств* // УМН. – 1953. – Т. 8(54), №2. – С. 7–73.
11. ЧЕРНИКОВ С. Н. *Линейные неравенства.* – М.: Наука, 1968.
12. AMALDI E., PFETSCH M. E., TROTTER L. E. *On the maximum feasible subsystem problem, IISs, and IIS-hypergraphs* // Math.Program. – 2003. – Vol. 95, №3. – P. 533–554.
13. AMARAL P., BARAHONA P. *Connections between the total least squares and the correction of an infeasible system of linear inequalities* // Linear Algebra and its Applications. – 2005. – Vol. 395. – P. 191–210.
14. CHAKRAVARTI N. *Some results concerning post-infeasibility analysis* // EJOR. – 1994. – Vol. 73. – P. 139–143.
15. CHINNECK J. W. *Finding a Useful Subset of Constraints for Analysis in an Infeasible Linear Program* // INFORMS Journal on Computing. – Spring, 1997. – Vol. 9, №2. – P. 164–174.
16. GLEESON J., RYAN J. *Identifying minimally infeasible subsystems of inequalities* // ORSA JOURNAL ON COMPUTING – Winter, 1990. – Vol. 2, №1. – P. 61–63.

17. GOLUB G. H., VAN LOAN C. F. *An analysis of the total least squares problem* // SIAM J.Numer. Anal. – 1980. – Vol. 17. – P. 883–893.
18. GREENBERG H. J. *How to Analyse the Results of Linear Programs* // Part 3: Infeasibility Diagnoses, Interfaces. – 1993. – Vol. 23, №6. – P. 120–139.
19. DE MOOR B. L. R. *Total linear least squares with inequality constraints*. – 1990
20. NOURA A. A., SALJOOGHI F. H. *Determining feasible solution in imprecise linear inequality systems* // Applied Mathematical Sciences. – 2008. – Vol.2, №36. – P. 1789–1797.
21. VAN HUFFEL S., VANDEWALLE J. *The total least squares problem: computational aspects and analysis.* – Philadelphia: SIAM, 1991.

CORRECTION AND PERTURBATION OF SYSTEMS OF LINEAR INEQUALITIES

Olga Muravyova, Moscow Pedagogical State University , Moscow, Cand.Sc., assistant professor (muraveva@mail.ru).

Abstract: The correction of incompatible systems of linear inequalities and the perturbation of compatible systems of linear inequalities are considered.

Keywords: matrix correction, incompatible system of linear inequalities, stability of compatible system of linear inequalities.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А. П. Курдюковым.