УДК 519.179.1
ББК 22.176

ПОЛНЫЕ ГИПЕРГРАФЫ. СПЕКТРЫ ЛАПЛАСИАНОВ. МУЛЬТИАГЕНТНЫЕ СИСТЕМЫ [1]

Блюмин С.Л. [2]
(*Липецкий государственный технический университет, Липецк*)

Рассмотрено вычисление спектров лапласианов полных и полных однородных неориентированных и ориентированных гиперграфов, лапласианы которых являются циркулянтами. Используются стандартные методы вычисления спектров циркулянтов. Обсуждаются возможности приложения к проблемам согласия в мультиагентных системах с учетом групповых взаимодействий агентов.

Ключевые слова: полные и полные однородные неориентированные и ориентированные гиперграфы, лапласианы, циркулянты, спектры, мультиагентные системы, проблемы согласия, групповые взаимодействия агентов.

Введение

Лапласианы орграфов, а также их спектры играют важную роль в теории и приложениях (см., например, [1, 5, 6, 8, 10]). В [2] предложено формирование матриц инцидентности, валентности, смежности и лапласианов оргиперграфов с использованием комплексных корней из единицы подходящих степеней. В данной работе рассмотрено вычисление спектров так сформи-

---

[1] *Работа поддержана РФФИ, проект №09-07-00220-а.*

[2] *Семен Львович Блюмин, доктор физико-математических наук, профессор* (*slb@stu.lipetsk.ru*).

рованных лапласианов полных оргиперграфов, лапласианы которых являются циркулянтами [3]. Обсуждены возможности приложения к проблемам согласия в мультиагентных системах с учетом групповых взаимодействий агентов.

1. Циркулянты и их спектры

Циркулянты являются частными случаями теплицевых матриц и занимают особое место в областях математики, связанных с разработкой эффективных алгоритмов [3]. Стандартными общими методами вычисления спектров циркулянтов являются [3] применение дискретного преобразования Фурье или использование представления циркулянта многочленом от матрицы циклического сдвига; в ряде частных случаев применимы и более простые способы. Все они могут быть использованы для вычисления спектров лапласианов гиперграфов в тех случаях, когда лапласианы оказываются циркулянтами, что имеет место для полных гиперграфов.

Для целей данной работы удобно определение циркулянта [3], основанное именно на применении дискретного преобразования Фурье, задаваемого матрицей

$$F_m = \begin{bmatrix} \varepsilon_m^{0\cdot 0} & \varepsilon_m^{0\cdot 1} & \dots & \varepsilon_m^{0\cdot(m-1)} \\ \varepsilon_m^{1\cdot 0} & \varepsilon_m^{1\cdot 1} & & \varepsilon_m^{1\cdot(m-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_m^{(m-1)\cdot 0} & \varepsilon_m^{(m-1)\cdot 1} & \dots & \varepsilon_m^{(m-1)\cdot(m-1)} \end{bmatrix}, \varepsilon_m = \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right).$$

Обратное дискретное преобразование Фурье задается матрицей $F_m^{-1} = m^{-1} \cdot F_m^* = m^{-1} \cdot \overline{F}^{\mathrm{T}}$, где F_m^* – сопряженная матрица.

Для квадратной (вообще говоря, комплексной) матрицы A порядка m через $\Delta(A)$ обозначается диагональная матрица, на диагонали которой расположен спектр матрицы A, т. е. ее собственные значения:

$$\Delta(A)=\begin{bmatrix}\delta_1(A) & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \delta_2(A) & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & \delta_m(A)\end{bmatrix}.$$

Матрица C является циркулянтом тогда и только тогда, когда справедливо соотношение

$$\Delta(C)=F_m\cdot C\cdot F_m^{-1}=m^{-1}\cdot F_m\cdot C\cdot F_m^{*}.$$

Такое определение удобно как для выяснения циркулянтности матрицы (если $F_m{\cdot}A{\cdot}F_m^{-1}$ не диагональна, то A не циркулянтна), так и, в случае ее циркулянтности, для вычисления ее спектра. Впрочем, циркулянтность матрицы может быть выяснена и непосредственно, чисто визуально [3]: каждые ее столбец (строка), кроме первых, получаются из предыдущих путем циклического сдвига вниз (вправо) на одну позицию; в соответствии с этим циркулянт порядка m может быть записан в виде

$$C=\begin{bmatrix}c_0 & c_{m-1} & \ldots & c_1\\ c_1 & c_0 & \ldots & c_2\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ c_{m-1} & c_{m-2} & \ldots & c_0\end{bmatrix}.$$

Наряду с применением дискретного преобразования Фурье спектр циркулянта может быть вычислен следующим способом [3]: каждый циркулянт может быть представлен в виде $C=\sum_{t=0}^{m-1}c_tP^t$, где P – матрица циклического сдвига – основная циркулянтная матрица перестановок с первой строкой (0, …, 1), собственные значения которой равны ε_m^j; тогда

$$\delta_j(C)=\sum_{t=0}^{m-1}c_t(\varepsilon_m^j)^t,\ \ j=1,\ldots,m.$$

Суммы и произведения (в частности, степени) циркулянтов, а также произведения циркулянтов на числа, являются циркулянтами. Поэтому линейная комбинация циркулянтов и многочлен от циркулянта являются циркулянтами. В то же время эти операции над нециркулянтами могут дать циркулянты. Для диагональной матрицы D матрица $F_m \cdot D \cdot F_m^{-1}$ является циркулянтом. Все это используется при вычислении спектров лапласианов полных и полных однородных неориентированных и ориентированных гиперграфов, лапласианы которых являются циркулянтами.

2. Полные и полные однородные гиперграфы: матрицы инцидентности, лапласианы и их спектры

Пусть V – конечное множество, $|V| = m$. Пусть элементы $v \in V$ этого множества каким-либо (произвольным, но фиксированным на протяжении всего рассмотрения) образом помечены, упорядочены, пронумерованы, например, $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$.

Пусть B – булеан этого множества, т. е. полное множество всех его различных подмножеств, состоящих из различных элементов, $|B| = 2^m$. Пусть $B[k] \subset B$ – k-однородный булеан – полное множество всех различных k-элементных подмножеств, состоящих из различных элементов, множества V, так что

$$B[k] \cap B[\ell] = \varnothing,\ k \neq \ell,\ \left|B[k]\right| = C_m^k,\ k = 0, 1, \ldots, m\,,$$

и имеет место разложение

$$B = \cup_{k=0}^{m} B[k],\ 2^m = \sum\nolimits_{k=0}^{m} C_m^k\,.$$

Гиперграф, или система множеств [7], определяется как пара $H = (V, HE)$, где $HE \subseteq B$ – некоторый набор гиперребер – различных подмножеств, состоящих из различных элементов, множества V, $|HE| = n \leq 2^m$. Гиперребра также предполагаются каким-либо (произвольным, но фиксированным на протяжении всего рассмотрения) образом помеченными, упорядоченными, пронумерованными, например, $HE = \{he_1, \ldots, he_n\}$.

Матрица инцидентности $I(H) = I(V, HE)$ определяется как (0, 1)-матрица размера $m \times n$, строки которой помечены вершинами, столбцы – гиперребрами гиперграфа, а на месте (v, he) находится 1 тогда и только тогда, когда $v \in he$. Иначе говоря, столбец матрицы инцидентности, помеченный некоторым гиперребром, является характеристическим вектором этого гиперребра как подмножества множества вершин гиперграфа.

Лапласиан $L(H) = L(V, HE)$ определяется как квадратная матрица порядка m, строки и столбцы которой помечены вершинами гиперграфа, по формуле

$L(H) = I(H)\cdot(I(H))^{\mathrm{T}}$.

Применение термина «лапласиан» здесь и далее может быть оправдано тем, что он используется, в соответствии с [2], как единое название для произведения матрицы инцидентности на ее транспонированную (в следующем разделе – на сопряженную). В частном случае графа G применение этого термина не соответствует традиционному, так как приводит к соотношению $L(G) = D(G) + A(G)$ (где $D(G)$ – матрица валентности, $A(G)$ – матрица смежности), тогда как классический лапласиан равен $D(G) - A(G)$ (определение лапласиана, использованное в следующем разделе, в частном случае графа приводит к классическому определению лапласиана). Матрица типа $D(G) + A(G)$ встречается в теории графов (например, она допускает интерпретацию в связи с реберными графами), но специального названия не имеет. В предлагаемом контексте она может быть названа «лапласианом без учета ориентации», тогда как классический лапласиан – «лапласианом с учетом ориентации».

Полный гиперграф определяется как пара $H = (V, B)$ и обозначается $H(m)$, а полный однородный (k-однородный) гиперграф – как пара $H = (V, B[k])$ и обозначается $H(m; [k])$. Их матрицы инцидентности и лапласианы обозначаются:

$I(H(m)) = I(m)$, $L(H(m)) = L(m)$,

$I(H(m; [k]))=I(m; [k])$, $L(H(m; [k]) = L(m; [k])$.

При этом матрица $I(m)$ состоит из матриц $I(m; [k])$ как из блоков, а лапласианы связаны соотношением

$$L(m) = \sum_{k=0}^{m} L(m;[k])$$

и имеют следующую специальную структуру:

$$L(m)=\begin{bmatrix} 2^{m-1} & 2^{m-2} & \ldots & 2^{m-2} \\ 2^{m-2} & 2^{m-1} & \ldots & 2^{m-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2^{m-2} & 2^{m-2} & \ldots & 2^{m-1} \end{bmatrix},$$

$$L(m;[k])=\begin{bmatrix} C_{m-1}^{k-1} & C_{m-2}^{k-2} & \ldots & C_{m-2}^{k-2} \\ C_{m-2}^{k-2} & C_{m-1}^{k-1} & \ldots & C_{m-2}^{k-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{m-2}^{k-2} & C_{m-2}^{k-2} & \ldots & C_{m-1}^{k-1} \end{bmatrix}.$$

Эти матрицы являются циркулянтами весьма частного вида: их диагональные элементы совпадают между собой, а внедиагональные, в свою очередь, между собой. Пример, используемый для сравнения в дальнейшем:

$$I(4)=\left[\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0\\1&0&0&1&1&0\\0&1&0&1&0&1\\0&0&1&0&1&1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right]$$

$I(4;[k])$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$:

[0] [1] [2] [3] [4]

$$L(4)=\begin{bmatrix}8&4&4&4\\4&8&4&4\\4&4&8&4\\4&4&4&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}+$$

$L(4;[k])$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$: [0] [1]

$$+\begin{bmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&2&2&2\\2&3&2&2\\2&2&3&2\\2&2&2&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

[2] [3] [4]

Собственные значения этих лапласианов обозначаются далее через $\lambda_j(m)$, $\lambda_j(m; [k])$, $j = 1, \ldots, m$, $k = 0, 1, \ldots, m$. Очевидно, что

$$\lambda_j(m; [0]) = 0, \ \lambda_j(m; [1]) = 1, j = 1, \ldots, m.$$

Спектры лапласианов $L(m)$, $L(m; [k])$ как циркулянтов могут быть вычислены описанными выше стандартными методами. Однако их частный вид $A = (a - b)I + bJ,$ где I –единичная матрица, J –матрица из единиц, имеющая собственные значения m кратности 1 и 0 кратности $m - 1$, с учетом того, что $\lambda_j(A)$ вычисляются двучленом $(a - b) + b\lambda_j(J)$, позволяет заключить, что A имеет собственные значения $a - b + mb$ кратности 1 и $a - b$ кратности $m - 1$.

Это приводит к следующим наборам собственных значений лапласианов:

$$\lambda_1(m) = (m+1)2^{m-2},\ \lambda_j(m) = 2^{m-2}, j = 2,\ldots,m\ ;$$

$$\lambda_1(m;\ [k]) = C_{m-1}^{k-1} + (m-1)C_{m-2}^{k-2},$$

$$\lambda_j(m; [k]) = C_{m-1}^{k-1} - C_{m-2}^{k-2}, j = 2,\ldots,m\ .$$

Они связаны соотношениями

$$\lambda_j(m) = \textstyle\sum_{k=0}^{m} \lambda_j(m; [k]), j = 1,\ldots,m\ .$$

Представляют интерес суммы

$$\sigma(m)\ = \textstyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_j(m) = m2^{m-1},\ \sigma(m;[k]) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(m;[k]) = mC_{m-1}^{k-1},$$

связанные соотношением

$$\sigma(m) = \textstyle\sum_{k=0}^{m} \sigma(m; [k])\ .$$

Указанные соотношения могут служить для контроля вычисления спектров.

3. Полные и полные однородные оргиперграфы: матрицы инцидентности, лапласианы и их спектры

В случае полного k-однородного гиперграфа $H(m; [k])$, в соответствии с предложенным в [2] способом перехода от него к полному k-однородному оргиперграфу $OH(m; [k])$, переход от гиперребер *he* к гипердугам *ha* отражается в матрице инцидентности $I(OH(m;\,[k])) = OI(m;\,[k])$ следующим образом: в столбце, отвечающем гипердуге *ha*, единицы заменяются, вообще говоря, комплексными корнями степени *k* из единицы

$$+1=\varepsilon_k^0,\ \varepsilon_k=\varepsilon_k^1=\exp\left(\frac{2\pi i}{k}\right),\ \varepsilon_k^2,\dots,\varepsilon_k^{k-1},$$

имеющими нулевую сумму. Лапласиан

$$OL(m;\,[k]) = OI(m;\,[k])\cdot(OI(m;\,[k]))^*$$

оказывается при этом эрмитовой циркулянтной матрицей, элементы которой формируются из указанных корней из единицы. Лапласиан $OL(m)$, как сумма таких циркулянтов, также оказывается циркулянтом. Пример, допускающий сравнение с предыдущим и используемый в дальнейшем:

$OI(4) =$

$$=\left[\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0\\-1&0&0&1&1&0\\0&-1&0&-1&0&1\\0&0&-1&0&-1&-1\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}1&1&1&0\\\varepsilon&\varepsilon&0&1\\\bar\varepsilon&0&\varepsilon&\varepsilon\\0&\bar\varepsilon&\bar\varepsilon&\bar\varepsilon\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}1\\i\\-1\\-i\end{bmatrix}\right]$$

$OI(4;\,[k])$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$:

[0] [1] [2] [3] [4]

$$OL(4)=\begin{bmatrix}8&-1+2\bar\varepsilon-i&-3&-1+2\varepsilon+i\\-1+2\varepsilon+i&8&-1+2\bar\varepsilon-i&-3\\-3&-1+2\varepsilon+i&8&-1+2\bar\varepsilon-i\\-1+2\bar\varepsilon-i&-3&-1+2\varepsilon+i&8\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&-1&-1&-1\\-1&3&-1&-1\\-1&-1&3&-1\\-1&-1&-1&3\end{bmatrix}+$$

$OL(4;[k])$, k=0,1,2,3,4:

[0] [1] [2]

$$+\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2\bar{\varepsilon} & \varepsilon+\bar{\varepsilon} & 2\varepsilon \\ 2\varepsilon & 3 & 2\bar{\varepsilon} & \varepsilon+\bar{\varepsilon} \\ \varepsilon+\bar{\varepsilon} & 2\varepsilon & 3 & 2\bar{\varepsilon} \\ 2\bar{\varepsilon} & \varepsilon+\bar{\varepsilon} & 2\varepsilon & 3 \end{bmatrix}}_{[3]} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -i & -1 & i \\ i & 1 & -i & -1 \\ -1 & i & 1 & -i \\ -i & -1 & i & 1 \end{bmatrix}}_{[4]},$$

где

$$\varepsilon = \varepsilon_3 = \varepsilon_3^1 = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right),\ \bar{\varepsilon} = \varepsilon_3^2,\ 1 = \varepsilon_3^0 = \varepsilon_3^3 .$$

Собственные значения этих лапласианов обозначаются далее через $\mu_j(m)$, $\mu_j(m;\ [k])$, $j = 1, \ldots, m$, $k = 0, 1, \ldots, m$. Очевидно, что

$$\mu_j(m;\ [0]) = 0,\ \mu_j(m;\ [1]) = 1,\ j = 1, \ldots, m.$$

Собственные значения связаны соотношениями

$$\mu_j(m) = \sum_{k=0}^{m} \mu_j(m;\ [k]),\ j = 1,\ldots, m .$$

Представляют интерес суммы

$$\tau(m) = \sum_{j=1}^{m} \mu_j(m),\ \tau(m;[k]) = \sum_{j=1}^{m} \mu_j(m;[k]),$$

связанные соотношением $\tau(m) = \sum_{k=0}^{m} \tau(m;[k])$.

Кроме того, справедливы соотношения

$$\tau(m) = \sigma(m),\ \tau(m;\ [k]) = \sigma(m;\ [k]).$$

Указанные соотношения могут служить для контроля вычисления спектров.

Для вычисления спектров так сформированных лапласианов оргиперграфов могут быть применены описанные выше стандартные методы вычисления спектров циркулянтов.

В работах [8, 10] приведены обширные таблицы спектров лапласианов графов различной структуры. В следующем разделе приведены вычисленные описанными методами спектры лапласианов полных и полных однородных неориентированных и ориентированных гиперграфов для $1 \le m \le 5$. Проиллюстрированы указанные выше соотношения между собственными значениями и их суммами.

4. Таблица спектров лапласианов полных и полных однородных гиперграфов и оргиперграфов: *m*=1,…,5

***m* = 1**

$\lambda_1(1; [0]) = 0$	$\sigma(1; [0]) = 0$
$\lambda_1(1; [1]) = 1$	$\sigma(1; [1]) = 1$
$\boldsymbol{\lambda_1(1) = 1}$	$\boldsymbol{\sigma(1) = 1}$
$\mu_1(1; [0]) = 0$	$\tau(1; [0]) = 0$
$\mu_1(1; [1]) = 1$	$\tau(1; [1]) = 1$
$\boldsymbol{\mu_1(1) = 1}$	$\boldsymbol{\tau(1) = 1}$

***m* = 2**

$\lambda_1(2; [0]) = \lambda_2(2; [0]) = 0$	$\sigma(2; [0]) = 0$
$\lambda_1(2; [1]) = \lambda_2(2; [1]) = 1$	$\sigma(2; [1]) = 2$
$\lambda_1(2; [2]) = 2,\ \lambda_2(2; [2]) = 0$	$\sigma(2; [2]) = 2$
$\boldsymbol{\lambda_1(2) = 1,\ \lambda_2(2) = 3}$	$\boldsymbol{\sigma(2) = 4}$
$\mu_1(2; [0]) = \mu_2(2; [0]) = 0$	$\tau(2; [0]) = 0$
$\mu_1(2;[1]) = \mu_2(2; [1]) = 1$	$\tau(2; [1]) = 2$
$\mu_1(2; [2]) = 0,\ \mu_2(2; [2]) = 2$	$\tau(2; [2]) = 2$
$\boldsymbol{\mu_1(2) = 1,\ \mu_2(2) = 3}$	$\boldsymbol{\tau(2) = 4}$

***m* = 3**

$\lambda_1(3; [0]) = \ldots = \lambda_3(3; [0]) = 0$	$\sigma(3; [0]) = 0$
$\lambda_1(3; [1]) = \ldots = \lambda_3(3; [1]) = 1$	$\sigma(3; [1]) = 3$
$\lambda_1(3; [2]) = 4,\ \lambda_2(3; [2]) = \lambda_3(3; [2]) = 1$	$\sigma(3; [2]) = 6$
$\lambda_1(3; [3]) = 3,\ \lambda_2(3; [3]) = \lambda_3(3; [3]) = 0$	$\sigma(3; [3]) = 3$
$\boldsymbol{\lambda_1(3) = \lambda_2(3) = 2,\ \lambda_3(3) = 8}$	$\boldsymbol{\sigma(3) = 12}$
$\mu_1(3; [0]) = \ldots = \mu_3(3; [0]) = 0$	$\tau(3; [0]) = 0$
$\mu_1(3; [1]) = \ldots = \mu_3(3; [1]) = 1$	$\tau(3; [1]) = 3$
$\mu_1(3; [2]) = 0,\ \mu_2(3; [2]) = \mu_3(3; [2]) = 3$	$\tau(3; [2]) = 6$
$\mu_1(3; [3]) = \mu_2(3; [3]) = 0,\ \mu_3(3; [3]) = 3$	$\tau(3; [3]) = 3$
$\boldsymbol{\mu_1(3) = 1,\ \mu_2(3) = 4,\ \mu_3(3) = 7}$	$\boldsymbol{\tau(3) = 12}$

***m* = 4**

$\lambda_1(4; [0]) = \ldots = \lambda_4(4; [0]) = 0$	$\sigma(4; [0]) = 0$
$\lambda_1(4; [1]) = \ldots = \lambda_4(4; [1]) = 1$	$\sigma(4; [1]) = 4$
$\lambda_1(4; [2]) = 6$, $\lambda_2(4; [2]) = \ldots = \lambda_4(4; [2]) = 2$	$\sigma(4; [2]) = 12$
$\lambda_1(4; [3]) = 9$, $\lambda_2(4; [3]) = \ldots = \lambda_4(4; [3]) = 1$	$\sigma(4; [3]) = 12$
$\lambda_1(4; [4]) = 4$, $\lambda_2(4; [4]) = \ldots = \lambda_4(4; [4]) = 0$	$\sigma(4; [4]) = 4$
$\boldsymbol{\lambda_1(4) = \ldots = \lambda_3(4) = 4}$**,** $\boldsymbol{\lambda_4(4) = 20}$	$\boldsymbol{\sigma(4) = 32}$
$\mu_1(4; [0]) = \ldots = \mu_4(4; [0]) = 0$	$\tau(4; [0]) = 0$
$\mu_1(4; [1]) = \ldots = \mu_4(4; [1]) = 1$	$\tau(4; [1]) = 4$
$\mu_1(4; [2]) = 0$, $\mu_2(4; [2]) = \ldots = \mu_4(4; [2]) = 4$	$\tau(4; [2]) = 12$
$\mu_1(4; [3]) = 0$, $\mu_2(4; [3]) = 4 - 2\sqrt{3}$, $\mu_3(4; [3]) = 4$, $\mu_4(4; [3]) = 4 + 2\sqrt{3}$	$\tau(4; [3]) = 12$
$\mu_1(4; [4]) = \ldots = \mu_3(4; [4]) = 0$, $\mu_4(4; [4]) = 4$	$\tau(4; [4]) = 4$
$\boldsymbol{\mu_1(4) = 1}$**,** $\boldsymbol{\mu_2(4) =} 9 - 2\sqrt{3}$**,** $\boldsymbol{\mu_3(4) = 9}$**,** $\boldsymbol{\mu_4(4) =} 13 + 2\sqrt{3}$	$\boldsymbol{\tau(4) = 32}$

***m* = 5**

$\lambda_1(5; [0]) = \ldots = \lambda_5(5; [0]) = 0$	$\sigma(5; [0]) = 0$
$\lambda_1(5; [1]) = \ldots = \lambda_5(5; [1]) = 1$	$\sigma(5; [1]) = 5$
$\lambda_1(5; [2]) = 8$, $\lambda_2(5; [2]) = \ldots = \lambda_5(5; [2]) = 3$	$\sigma(5; [2]) = 20$
$\lambda_1(5; [3]) = 18$, $\lambda_2(5; [3]) = \ldots = \lambda_5(5; [3]) = 3$	$\sigma(5; [3]) = 30$
$\lambda_1(5; [4]) = 16$, $\lambda_2(5; [4]) = \ldots = \lambda_5(5; [4]) = 1$	$\sigma(5; [4]) = 20$
$\lambda_1(5; [5]) = 5$, $\lambda_2(5; [5]) = \ldots = \lambda_5(5; [5]) = 0$	$\sigma(5; [5]) = 5$
$\boldsymbol{\lambda_1(5) = \ldots = \lambda_4(5) = 8}$**,** $\boldsymbol{\lambda_5(5) = 48}$	$\boldsymbol{\sigma(5) = 80}$
$\mu_1(5; [0]) = \ldots = \mu_5(5; [0]) = 0$	$\tau(5; [0]) = 0$
$\mu_1(5; [1]) = \ldots = \mu_5(5; [1]) = 1$	$\tau(5; [1]) = 5$
$\mu_1(5; [2]) = 0$, $\mu_2(5; [2]) = \ldots = \mu_5(5; [2]) = 5$	$\tau(5; [2]) = 20$

$\mu_1(5;[3]) = 0$, $\mu_2(5;[3])=\frac{15}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}\alpha$, $\mu_3(5;[3]) = \frac{15}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\beta$, $\mu_4(5;[3]) = \frac{15}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}\beta$, $\mu_5(5;3)=\frac{15}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\alpha$	$\tau(5;[3]) = 30$
$\mu_1(5;[4]) = 0$, $\mu_2(5;[4]) = 5+\sqrt{5}-\frac{1}{2}\alpha$, $\mu_3(5;[4]) = 5-\sqrt{5}+\frac{1}{2}\beta$, $\mu_4(5;[4]) = 5-\sqrt{5}-\frac{1}{2}\beta$, $\mu_5(5;[4]) = 5+\sqrt{5}+\frac{1}{2}\alpha$	$\tau(5;[4]) = 20$
$\mu_1(5;[5]) = \ldots = \mu_4(5;[5]) = 0$, $\mu_5(5;[5]) = 5$	$\tau(5;[5]) = 5$
$\boldsymbol{\mu_1(5) = 1}$, $\boldsymbol{\mu_2(5) = \frac{37}{2}+\sqrt{5}-\frac{\sqrt{3}+2}{4}\alpha}$, $\boldsymbol{\mu_3(5) = \frac{37}{2}-\sqrt{5}+\frac{\sqrt{3}+2}{4}\beta}$, $\boldsymbol{\mu_4(5) = \frac{37}{2}-\sqrt{5}-\frac{\sqrt{3}+2}{4}\beta}$, $\boldsymbol{\mu_5(5) = \frac{47}{2}+\sqrt{5}+\frac{\sqrt{3}+2}{4}\alpha}$	$\boldsymbol{\tau(5) = 80}$

где $\alpha = 3\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, $\beta = \sqrt{10+2\sqrt{5}}-3\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

5. Мультиагентные системы: проблемы согласия

В данном разделе на простых примерах обсуждаются некоторые предварительные соображения о возможностях применения оргиперграфов к проблемам согласия в мультиагентных системах с учетом групповых взаимодействий агентов.

Решение проблем согласия в мультиагентных системах с учетом парных взаимодействий агентов использует спектр лапласиана взвешенного орграфа, ассоциированного с системой [5]. Пусть мультиагентная система состоит из m агентов, $x_i(t)$ –

состояние i-го агента, $i = 1, \ldots, m$. В модели достижения консенсуса (согласия) с учетом парных взаимодействий агентов [5]

$$\dot{x}_i(t) = -\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t) \cdot [x_i(t) - x_j(t)], i = 1, \ldots, m,$$

число $a_{ij}(t) \geq 0$ означает вес, с которым i-ый агент учитывает парное бинарное расхождение значения своего состояния со значением состояния j-го агента, определяемое как разность этих значений, т. е. как их сумма с коэффициентами ± 1 или

$$\varepsilon_2^k = \exp\left(\frac{2\pi i}{2} k\right) = \exp(\pi i k), k = 1,2,$$

– корнями степени 2 из 1, имеющими нулевую сумму:

$$\Delta(x_i(t); x_j(t)) = x_i(t) - x_j(t) = (+1) \cdot x_i(t) + (-1) \cdot x_j(t) =$$

$$= \varepsilon_2^2 \cdot x_i(t) + \varepsilon_2^1 \cdot x_j(t).$$

Лапласиан $L(t)$ упомянутого взвешенного орграфа – взвешенный лапласиан указанной модели [5], с использованием которого она записывается в матричной форме

$$\dot{x}(t) = -L(t)x(t),$$

по определению, имеет нулевые строчные суммы, а потому сингулярен и его собственному значению 0 отвечает собственный вектор из единиц $\mathbf{1} = [1, \ldots, 1]^{\mathrm{T}}$. Если 0 – простое собственное значение, то соответствующее собственное подпространство одномерно и вектор **1** является единственным с точностью до некоторой константы c, что и означает полное согласование состояний всех агентов с учетом их парных взаимодействий.

Учет групповых взаимодействий агентов группами, содержащими по $2 \leq k \leq m$ из общего числа m агентов – так что каждый агент непосредственно взаимодействует с $k - 1$ агентами – осуществляется следующим образом.

Групповое k-арное расхождение значения состояния i-го агента со значениями состояний всех остальных агентов, входящих в группу, определяется как сумма этих значений с коэффициентами ε_k^j, $j = 1, \ldots, k$, – корнями степени k из 1, имеющими нулевую сумму. Иллюстрирующим это примером аналога приведенной выше модели достижения консенсуса для случая $m = 4$, $k = 3$ является следующая модель, в записи которой время t опущено, а для весов, с которыми каждый агент учитывает групповое расхождение значения своего состояния со значениями состояний остальных агентов группы, использованы упрощенные обозначения:

$$\dot{x}_1 = -\{a_1(x_1 + \bar{\varepsilon}x_2 + \varepsilon x_3) + a_2(x_1 + \bar{\varepsilon}x_2 + \varepsilon x_4) + a_3(x_1 + \bar{\varepsilon}x_3 + \varepsilon x_4)\},$$

$$\dot{x}_2 = -\{b_1(x_2 + \bar{\varepsilon}x_3 + \varepsilon x_4) + b_2(x_2 + \bar{\varepsilon}x_3 + \varepsilon x_1) + b_3(x_2 + \bar{\varepsilon}x_4 + \varepsilon x_1)\},$$

$$\dot{x}_3 = -\{c_1(x_3 + \bar{\varepsilon}x_4 + \varepsilon x_1) + c_2(x_3 + \bar{\varepsilon}x_4 + \varepsilon x_2) + c_3(x_3 + \bar{\varepsilon}x_1 + \varepsilon x_2)\},$$

$$\dot{x}_4 = -\{d_1(x_4 + \bar{\varepsilon}x_1 + \varepsilon x_2) + d_2(x_4 + \bar{\varepsilon}x_1 + \varepsilon x_3) + d_3(x_4 + \bar{\varepsilon}x_2 + \varepsilon x_3)\}.$$

В матричной форме эта модель принимает вид

$$\dot{x} = -\widetilde{L}(4;[3])x,$$

где использован взвешенный лапласиан данной модели

$$\widetilde{L}(4;[3]) = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + a_3 & \bar{\varepsilon}(a_1 + a_2) & \varepsilon a_1 + \bar{\varepsilon}a_3 & \varepsilon(a_2 + a_3) \\ \varepsilon(b_2 + b_3) & b_1 + b_2 + b_3 & \bar{\varepsilon}(b_1 + b_2) & \varepsilon b_1 + \bar{\varepsilon}b_3 \\ \varepsilon c_1 + \bar{\varepsilon}c_3 & \varepsilon(c_2 + c_3) & c_1 + c_2 + c_3 & \bar{\varepsilon}(c_1 + c_2) \\ \bar{\varepsilon}(d_1 + d_2) & \varepsilon d_1 + \bar{\varepsilon}d_3 & \varepsilon(d_2 + d_3) & d_1 + d_2 + d_3 \end{bmatrix}.$$

Как и взвешенный лапласиан $L(t)$ выше, взвешенный лапласиан $\widetilde{L}(4;[3])$, очевидно, имеет нулевые строчные суммы, а потому сингулярен и его собственному значению 0 отвечает собственный вектор из единиц $\mathbf{1} = [1, \ldots, 1]^{\mathrm{T}}$. Если 0 – простое собственное значение, то соответствующее собственное подпространство одномерно и вектор **1** является единственным с точностью до некоторой константы c, что и означает полное согласование состояний всех агентов с учетом их групповых взаимодействий.

Сказанное выполняется в простейшем случае, когда все веса равны единице: в этом случае взвешенный лапласиан $\widetilde{L}(4;[3])$ совпадает с лапласианом $OL(4; [3])$ соответствующего оргиперграфа, приведенным в разделе 3, спектр которого, приведенный в разделе 4, имеет простое собственное число 0 и, следовательно, в этом случае обоснование достижения консенсуса выполняется так же, как в случае парных взаимодействий.

Частным случаем групповых взаимодействий агентов (наряду с парными, когда $k = 2$) являются их совокупные взаимодействия, когда $k = m$. В этом случае рассмотрение, подобное проведенному выше, приводит к лапласианам $OL(m; [m])$ соответствующих оргиперграфов. Как показывают примеры их спектров, приведенные в разделе 4, собственное число 0 в этих случаях не является простым, соответствующие собственные подпространства не являются одномерными и обоснование достижения консенсуса, вообще говоря, непосредственно выполнено быть не может.

Примером, когда достижение консенсуса можно обосновать и в подобных ситуациях, может служить модель достижения консенсуса с учетом совокупного взаимодействия агентов для случая $m = k = 3$:

$$\dot{x}_1 = -a \cdot (x_1 + \bar{\varepsilon} \cdot x_2 + \varepsilon \cdot x_3),$$

$$\dot{x}_2 = -b \cdot (x_2 + \bar{\varepsilon} \cdot x_3 + \varepsilon \cdot x_1),$$

$$\dot{x}_3 = -c \cdot (x_3 + \bar{\varepsilon} \cdot x_1 + \varepsilon \cdot x_2),$$

которая в матричной форме использует соответствующий взвешенный лапласиан:

$$\dot{x} = -\widetilde{L}(3;[3])x = -\begin{bmatrix} a & \bar{\varepsilon} \cdot a & \varepsilon \cdot a \\ \varepsilon \cdot b & b & \bar{\varepsilon} \cdot b \\ \bar{\varepsilon} \cdot c & \varepsilon \cdot c & c \end{bmatrix} x.$$

В простейшем случае, когда все веса равны единице, этот взвешенный лапласиан $\widetilde{L}(3;[3])$ совпадает с лапласианом $OL(3; [3])$ соответствующего оргиперграфа, спектр которого, приведенный в разделе 4, имеет двукратное собственное значение 0, так что соответствующее собственное подпространство является двумерным. Оно описывается соотношением

$$x_1 + \bar{\varepsilon} \cdot x_2 + \varepsilon \cdot x_3 = 0,$$

или

$$x_1 + (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot x_2 + (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot x_3 = 0\,,$$

или

$$x_1 - \frac{1}{2}(x_2 + x_3) + i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x_3 - x_2\right) = 0\,,$$

что возможно лишь при условии $x_3 = x_2 = c$, а потому и $x_1 = c$, что и означает полное согласование состояний всех агентов с учетом их совокупного взаимодействия.

Приведенные примеры позволяют предположить, что достижение консенсуса при учете групповых взаимодействий агентов может быть обосновано с использованием спектров оргиперграфов в случаях $2 \le k \le m - 1$, тогда как в случае $k = m$, возможно, потребуется принимать какие-либо дополнительные меры.

Полное исследование возможностей применения оргиперграфов к проблемам согласия в мультиагентных системах с учетом групповых взаимодействий агентов требует отдельного рассмотрения.

В частности, представляет интерес установление взаимосвязи как между лапласианами невзвешенного и взвешенного оргиперграфов, так и между их спектрами. Примером может служить случай $k = m$, когда

$$\widetilde{L}(m;[m]) = A \cdot OL(m;[m])\,,$$

где $A = \mathrm{diag}\,\{a, b, c, \ldots, d\}$ – диагональная матрица весов модели. Так как матрица $OL(m; [m])$ имеет, по определению, единичный ранг и спектр $0, \ldots, 0, m$, а при умножении диагональной матрицы A слева на матрицу единичного ранга ранг последней не увеличивается, а ее i-ая строка умножается на i-ый диагональный элемент матрицы A, то матрица $\widetilde{L}(m;[m])$ имеет собственные значения 0 кратности $m - 1$ и $a + b + c + \ldots + d$ кратности 1.

В исследовании мультиагентных систем важную роль играют обобщения [5] матричной теоремы Кирхгофа из теории графов [4]. В ее основе лежит лемма о равенстве между собой алгебраических дополнений всех элементов матрицы с нулевыми суммами строк и столбцов [4]. Использование комплексных корней из единицы при формировании матриц инцидентности оргиперграфов и их лапласианов обеспечивает последним это ключевое свойство. Представляет интерес получение и интерпретация подобной теоремы в контексте гиперграфов.

Заключение

Лапласианы произвольных, не обязательно полных или полных однородных, гиперграфов, неориентированных или ориентированных, вообще говоря, не являются циркулянтами. Тем не менее, использованные выше методы вычисления спектров в некоторых случаях могут быть применены с надлежащими модификациями, основанными на матричных представлениях лапласианов, предложенных в [2].

Возможна связь использованных выше k-арных, в частности, тернарных групповых расхождений состояний агентов с k-арными, в частности, тернарными числами, на основе которых строится тернарный комплексный анализ, находящий приложения в различных областях [9].

Литература

1. БЛЮМИН С.Л. *Мультиагентные системы: проблемы и протоколы согласия, псевдообращение лапласианов графов* // Системы управления и информационные технологии. – 2007. – №2(28). – С. 4–9.
2. БЛЮМИН С.Л. *Оргиперграфы: матричные представления* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://ubs.mtas.ru/forum. – Сетевые модели в управлении. – /2009/10/17/– 19 с.
3. ВОЕВОДИН В.В., ТЫРТЫШНИКОВ Е.Е. *Вычислительные процессы с теплицевыми*. – М.: Наука, 1987. – 230 с.

4. ЕМЕЛИЧЕВ В.А., МЕЛЬНИКОВ О.И., САРВАНОВ В.И., ТЫШКЕВИЧ Р.И. *Лекции по теории графов*.– М.: Наука, 1990. – 384 с.
5. ЧЕБОТАРЕВ П.Ю., АГАЕВ Р.П. *Согласование характеристик в многоагентных системах и спектры лапласовских матриц орграфов* // Автоматика и телемеханика. – 2009. – №3. – С. 136–151.
6. BIYIKOGLU T. LEYDOLD J., STADLER P. *Laplacian Eigenvectors of Graphs. Perron-Frobenius and Faber-Krahn Type Theorems*. – Berlin: Springer, 2007. – 115 p.
7. BOLLOBAS B. *Combinatorics: Set Systems, Hypergraphs, Families of Vectors and Combinatorial Probability.* – Cambridge: Cambridge University Press, 1986. – 178 p.
8. CVETKOVIC D., DOOB M., SACHS H.. *Spectra of Graphs: Theory and Applications*. 3rd Ed. – Leipzig: Johan Ambrosius Bart Verlag, 1995. – 368 p.
9. LIPATOV L., RAUSCH DE TRAUBENBERG M., VOLKOV G. *On the Ternary Complex Analysis and its Applications* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://arxiv.org/0711.0809v1. – 28 p.
10. NEWMAN M. *The Laplacian Spectrum of Graphs: Master Thesis.* – Winnipeg: University of Manitoba, 2000. – 126 p.

COMPLETE HYPERGRAPHS. LAPLACIAN SPECTRA. MULTI-AGENT SYSTEMS

Sam L. Blyumin, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Dr. Sc. in Math. & Phys., professor (slb@stu.lipetsk.ru).

Abstract: Computation of Laplacian spectra is considered for complete and complete uniform undirected and directed hypergraphs which Laplacians are circulants. Standard methods are used for computation of circulant spectra. Applications are discussed to *consensus problems in multi-agent systems taking account of agents' group interactions.*

Keywords: complete and complete uniform undirected and directed hypergraphs, Laplacians, circulants, spectra, multi-agent systems, consensus problems, agents' group interactions.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А. К. Погодаевым