Управление большими системами
Специальный выпуск 30.1 «Сетевые модели в управлении»

УДК 519.816
ББК 65в631.0

ПРИНЦИП МНОГОМОДЕЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ПРЕДПОЧТЕНИЙ

Белых А. А.[1], Шайдулин Р. Ф.[2]
(*Пермская государственная сельскохозяйственная академия им. Д. Н. Прянишникова*, *Пермь*)
Гуреев К. А.[3], Харитонов В. А.[4], Алексеев А. О.[5]
(*Пермский государственный технический университет*, *Пермь*)

Обосновываются новые возможности исследования моделей предпочтений на основе сочетания линейных и нелинейных (*матричных*) *методов комплексного оценивания: уменьшение размерности задач принятия решений и анализ динамики качественных изменений свертки.*

Ключевые слова: принцип многомодельности, моделирование предпочтений, линейные и нелинейные (матричные) свертки.

1. Введение

Актуальность проблемы поддержки принятия решений с учетом человеческого фактора на основе моделирования пред-

---

[1] *Андрей Алексеевич Белых, кандидат технических наук, доцент* (*psaa@perm-edu.ru*).
[2] *Роман Фаритович Шайдулин, ассистент* (*psaa@perm-edu.ru*).
[3] *Кирилл Александрович Гуреев, аспирант* (*nedstf@pstu.ru*).
[4] *Валерий Алексеевич Харитонов, доктор технических наук, профессор* (*nedstf@pstu.ru*).
[5] *Александр Олегович Алексеев, заведующий лабораторией* (*nedstf@pstu.ru*).

почтений лиц, играющих в этих процедурах ключевые роли, вызвало интерес к механизмам комплексного оценивания объектов с гетерогенными характеристиками, выступающих в качестве предметов выбора – вариантов решения. Задачи моделирования предпочтений на этапе перехода от *high-tech* технологий к *high-hume* технологиям (социогуманитарным технологиям) [2] возникают во многих областях исследования организационных, экономических, образовательных и других систем.

Среди известных линейных и нелинейных [1, 3] механизмов комплексного оценивания расширенными функциональными возможностями выделяются модели предпочтений на основе деревьев критериев и матриц свертки с топологической интерпретацией [5, 6]. Однако они характеризуется и значительной структурной сложностью, что затрудняет их практическое использование. Исследование сложных систем принято проводить на основе принципа многомодельности, утверждающего целесообразность использования нескольких типов моделей с целью использования преимуществ каждой из них.

В статье обосновываются новые возможности исследования моделей предпочтений на основе сочетания линейных и нелинейных (матричных) методов комплексного оценивания, а именно: уменьшение размерности задач принятия решений и анализ динамики качественных изменений свертки.

2. Исследование свойств элементарных линейных сверток

Методически можно считать оправданным начать с анализа метода взвешенных коэффициентов в его простейшей форме.

Элементарная линейная свертка по методу взвешенных коэффициентов имеет вид функции двух переменных:

(1) $X = f_L(X_1, X_2) = k_1X_1 + k_2X_2$,

где X_1, X_2 – частные критерии, сворачиваемые в комплексную оценку X; k_1, k_2 – весовые коэффициенты, устанавливающие долевое участие каждого из критериев в формировании свертки f_L.

На весовые коэффициенты накладываются ограничения, обеспечивающие одинаковую шкалу, например, [1, 4] для всех переменных:

(2) $k_1 + k_2 = 1, \quad k_1, k_2 \in [0, 1].$

Уравнение (1) геометрически интерпретируется как плоскость в трехмерном пространстве (X, X_1, X_2), ограниченная поверхностью куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребрами, длина которых совпадает с интервалом принятой шкалы, и содержащая в себе пару противоположных вершин (A, C_1) и диагональ AC_1, их соединяющую (рис. 1).

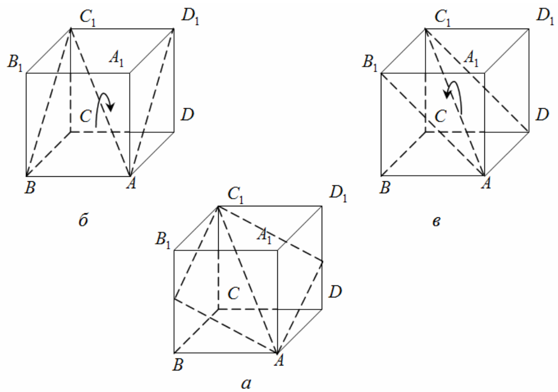

Рис. 1. Геометрическая интерпретация механизмов элементарной линейной свертки: а) $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$;
б) $k_1 = 1, k_2 = 0$; *в)* $k_1 = 0, k_2 = 1$

Каждая реализация модели описывает свертку с фиксированными весовыми коэффициентами, имеющими смысл частных производных, постоянных в каждой точке области определения $ABCD$:

(3) $$k_1 = \frac{\partial x}{\partial x_1}, \quad k_2 = \frac{\partial x}{\partial x_2}.$$

Множество моделей элементарной линейной свертки соответствует множеству допустимых пар (k_1, k_2) весовых коэффициентов и перечисляется поворотом плоскости ABC_1D_1 из положения (рис. 1б) в положение (рис. 1в) вокруг диагонали AC_1 на 90° по направлению часовой стрелки либо в обратном направлении через промежуточное – рис. 1а.

Поворот на больший угол приводит к нарушению ограничения (2) и уменьшению области определения.

Интерпретация различных вариантов линейной свертки обеспечивается введением «института» изопрайс (линий одинаковой цены), описываемых линейными уравнениями вида

(4) $X_C = k_1^* X_1 + k_2^* X_2, \quad X_C \in \left[X_{\min}, X_{\max}\right],$

где X_c – количественная характеристика изопрайсы, k^*_1, k^*_2 – фиксированные значения весовых коэффициентов, X_1, X_2 – соответственно, функция или аргумент.

Введение интервала дискретности ΔX устанавливает мощность семейства изопрайс, которое предоставляет более наглядную топологическую интерпретацию инструментов свертки. В результате этого геометрическая интерпретация элементарной линейной свертки (рис. 1а-1в) может быть дополнена топологической интерпретацией, представленной на рис. 2а-2в.

При всей простоте и наглядности линейной свертки она способна моделировать лишь достаточно тривиальные предпочтения, сохраняющие свойства во всей области определения. Этот недостаток объясняется ограничениями (2) накладываемыми на уравнение (1) с целью обеспечения универсальности шкалы для всех участвующих в свертке переменных.

Сложные предпочтения характеризуются богатой динамикой комплексирования частных критериев в формируемой ими области определения. Такому классу предпочтений в большей степени соответствуют модели комплексного оценивания, построенные на основе деревьев критериев и матрицах свертки [5].

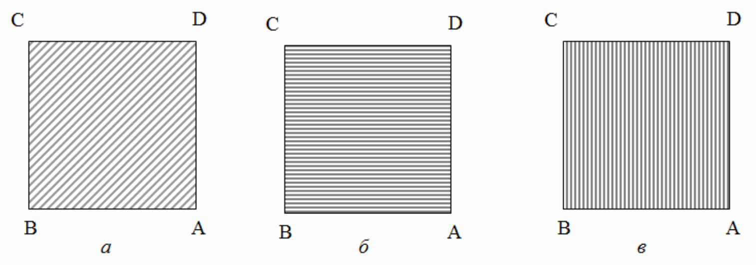

Рис 2. Топологическая интерпретация вариантов линейной свертки, приведенных на рис. 1

3. Исследование элементарных матричных сверток с топологической интерпретацией

Топологическая интерпретация матриц свертки строится авторами на следующих положениях.

Шкала переменных в механизмах комплексного оценивания укладывается в общепринятом интервале [1, 4].

Процедура нечеткой свертки f строится в соответствии с принципом обобщения по схеме, предложенной Д.А. Новиковым [4]:

$$\mu_{\widetilde{X}}(x) = \sup_{\{(x_1, x_2) \mid f(x_1, x_2) = x\}} \min\{\mu_{\widetilde{X}_1}(x_1), \mu_{\widetilde{X}_2}(x_2)\},$$

где $\mu(x)$ – функция принадлежности.

Дефаззификация (построение четких аналогов нечетких чисел) переменных осуществляется по наиболее распространенному методу центра тяжести:

$$\widehat{X} = \text{ЦТ}(\widetilde{X}) = \sum_{\mu_i > 0} x_i \mu_i \Big/ \sum_{\mu_i > 0} \mu_i ,$$

Согласно принятой модели нечеткого числа $\widetilde{X}$ как двухэлементного нечеткого множества

$$\widetilde{X} = 1/\mu(1) + 2/\mu(2), \quad \mu(1) + \mu(2) = 1,$$

аргументы процедуры нечетной свертки в базовой подобласти [1, 2] × [1, 2] определения записываются в виде выражений

$$\widetilde{X}_1 = 1/(1-\mu_1) + 2/\mu_1, \quad \widetilde{X}_2 = 1/(1-\mu_2) + 2/\mu_2.$$

Значения параметров μ_1, μ_2 определяются из отношений $\widehat{X}_1 = 1 + \mu_1$, $\widehat{X}_2 = 1 + \mu_2$, что обеспечивает взаимную однозначность процедур: $\widetilde{X} \leftrightarrow \widehat{X}$, а также простоту формы представления экспертной информации об исходных данных $\widehat{X}_1, \widehat{X}_2$, например, $\widehat{X}_1 = 1{,}73$, $\mu_1 = 0{,}73$, $\widetilde{X}_1 = 1/0{,}27 + 2/0{,}73$.

Множество матриц свертки, рекомендованных к использованию, сокращается до канонического, когда приращение значений свертки на каждом дискретном шаге изменения аргументов не превышает по горизонтали (вертикали) и по диагонали 1 и 2 соответственно. Для канонических матриц обнаруживается ровно шесть типов $i = \overline{0, 5}$ стандартных функций свертки, отличающихся в области определения нечеткой свертки [1, 4] смещением $C \in \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$.

Процедура нечеткой свертки в базовой подобласти определения для наиболее востребованной на практике максиминной стратегии описывается отношением:

$$\begin{aligned}\widetilde{X} &= f(\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2) = f(1, 1)/\min\big((1-\mu_1), (1-\mu_2)\big) + \\ &+ f(1, 2)/\min\big((1-\mu_1), \mu_2\big) + f(2, 1)/\min\big(\mu_1, (1-\mu_2)\big) + \\ &+ f(2, 2)/\min(\mu_1, \mu_2).\end{aligned}$$

Значения функций нечеткой свертки вычисляются согласно пункту 3, а описываются уравнениями кусочно-гладких (в силу нелинейности выражения, см. пункт 6) проекций изопрайс – линий одинаковой цены $\widehat{X}_C$ на базовую подобласть:

$$\widehat{X}_C = \varphi(\mu_1, \mu_2) = f_i\big(\widehat{X}_1, \widehat{X}_2\big), \quad i = \overline{0, 5}.$$

Сопряжение входа $\widetilde{X}_{j_2}$ последующей матрицы свертки с предыдущим $\widetilde{X}_{j_1}$ достигается соглашением:

$$\widetilde{X}_{j_1} \xrightarrow{(пункт\,3)} \widehat{X}_{j_1} \xrightarrow{(пункт\,4)} \widetilde{X}_{j_1}, \quad \widetilde{X}_{j_2} = \widetilde{X}_{j_1}.$$

Поддерживаемая программно (рис. 3) топологизация матриц свертки существенно расширяет возможности конструирования и использования механизмов комплексного оценивания. Следует заметить, что обнаруживаемая в ходе вычислительного эксперимента локальная немонотонность проекций изопрайс имеет антропогенное происхождение и связана с выбранным типом стратегии.

Для наполнения матриц свертки размерности 4×4 (черные цифры на белом фоне) достаточно построить матрицу размерности 3×3 с топологической интерпретацией стандартных функций свертки (белые цифры на черном фоне). Их взаимная однозначность очевидна.

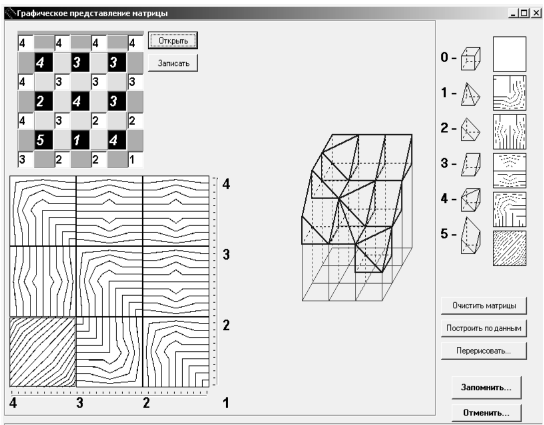

Рис. 3. Графическое представление матрицы свертки

С этой целью представление экспертов о характере рассматриваемой свертки на топологическом поле 3×3 отображается тремя линиями изопрайс – по одной из трех «пучков», характеризуемых малым [1, 2], средним [2, 3] и большим [3, 4] уровнями значений свертки (рис. 4). Полученный результат программным сервисом легко переводится в искомую форму представления матрицы свертки (рис. 3). Существенную поддержку в вопросах конструирования матриц свертки может оказать убедительная интерпретация стандартных функций свертки: f_0 – игнорирование развития; f_1 – поощрение равномерного развития обоих критериев; f_2 – поощрение развития критерия x_1; f_3 – поощрение развития критерия x_2; f_4 – поощрение равномерного развития, либо одного любого критерия в случае «прорыва» в этом направлении; f_5 – предпочтение ускоренному равномерному развитию обоих критериев (допускается развитие одного критерия, но с меньшим конечным результатом).

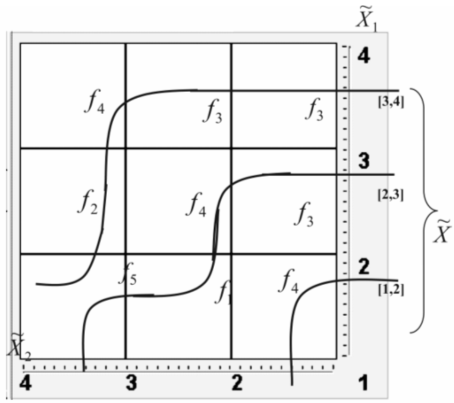

Рис. 4. Представление эксперта о характере конструируемой матрицы свертки, изображенной на рис. 3

Элементарная матрица свертки (рис. 3) имеет более сложную топологию, чем линейная свертка, благодаря нелинейности составляющих её изопрайс. Это означает, что каждая отдельно взятая изопрайса сможет быть приближенно представлена в кусочно-линейной форме как композиция линейных изопрайс. Таким образом, произвольная локальная область матричной свертки может иметь приближенное линейное описание согласно выражению

$$
\begin{aligned}
&X = f_M(X_1, X_2) \approx k_1(X_1^*, X_2^*)X_1 + k_2(X_1^*, X_2^*)X_2, \\
&X_1, X_2 \in 0(X_1^*, X_2^*),
\end{aligned} \tag{5}
$$

где $f_M(X_1, X_2)$ – матричная функция свертки, весовые коэффициенты имеют смысл частных производных в некоторой точке (X^*_1, X^*_2), принадлежащей локальной области 0:

$$(6)\quad \begin{aligned} k_1 &= \frac{\partial f_M(X_1, X_2 \mid X_1 = X_1^*, X_2 = X_2^*)}{\partial X_1}, \\ k_2 &= \frac{\partial f_M(X_1, X_2 \mid X_1 = X_1^*, X_2 = X_2^*)}{\partial X_2}. \end{aligned}$$

Альтернативное описание матричной свертки с помощью семейства линейных сверток, отличающихся значениями весовых коэффициентов в каждой локальной области, дает новый инструмент исследования моделей предпочтений в вопросах адекватности и динамических свойств.

4. Анализ линейных и матричных сверток с позиции принципа многомодельности

Для функций свертки большей размерности линейный подход начинает испытывать серьезные трудности в отношении обоснования весовых коэффициентов, а матричный – в обосновании структуры дерева критериев и наполнения матриц свертки.

Отличительной чертой сложившейся ситуации является простота построения необходимого семейства линейных сверток в любой непрерывной подобласти исследуемой матричной свертки, не имеющей разрывов.

Действительно, гиперплоскость, касательная к гиперповерхности функции комплексного оценивания в заданной значениями компонент вектора $\vec{X}_i^* = (X_1^*, \ldots, X_n^*)_i$ точке в ее непрерывной подобласти, и окрестность вокруг этой точки близки:

$$(7)\quad X = f_L(X_1, \ldots, X_n) \approx \sum_{j=1}^{n} k_j^i X_j,$$

где

$$(8)\quad k_j^i = \frac{\partial f_M(X_1, \ldots, X_n \mid \vec{X}_i^*)}{\partial X_j}.$$

По сравнению с многомерной линейной сверткой, являющейся расширением выражения (1), ввиду локальной области определения функции (7) появляется возможность снятия ограничений вида (2), что в полной мере удовлетворяет динамическим свойствам модели предпочтений.

Следует отметить, что выражения (7) и (8) являются задаваемой деревом критериев композицией выражений (5) и (6). В связи с этим частная производная (8) многомерной функции свертки (7) равна произведению частных производных (6) всех бинарных сверток (5), лежащих на пути графа от вершины X_j к корню дерева X.

Дополнительные возможности в исследовании модели предпочтений, появляющиеся в случае использования рассмотренных походов, заключаются в следующем:

- локальное уменьшение размерности задач принятия решений;
- анализ динамики качественных изменений в процедуре свертки при переходе из одной локальной области в другую на основе сопоставления приоритетов частных критериев;
- декомпозиция общей проблемы адекватности модели на множество задач локальной адекватности меньшей размерности.

Проиллюстрируем перечисленные возможности вычислительным экспериментом.

Пусть задан механизм комплексного оценивания (рис 5), выполняющий нелинейную свертку критериев $X_1 - X_7$. Выберем произвольные точки $V1 - V5$ в построенной модели по данным таблицы 1.

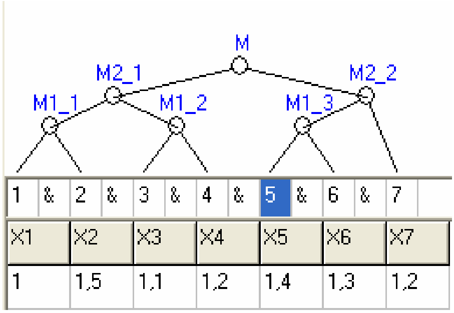

Рис. 5. Дерево комплексного оценивания

Таблица 1. Исходные данные вычислительного эксперимента

	$V1$	$V2$	$V3$	$V4$	$V5$
$X1$	1	1,5	2	2,5	3
$X2$	1,5	2	2,5	3	3,9
$X3$	1,1	1,7	2,1	2,6	3,1
$X4$	1,2	1,8	2,4	2,7	3,5
$X5$	1,4	1,6	2,1	2,9	3,8
$X6$	1,3	1,9	2,2	3	3,1
$X7$	1,2	1,7	2,3	2,8	3,3
$\boldsymbol{X}$	**1,33**	**1,67**	**2,3**	**3**	**3,78**

Построение линейных моделей для вариантов, предусмотренных таблицей 1, производится методом последовательных поочередных приращений в соответствии с процедурой, оформленной для варианта $V1$ в виде таблицы 2.

В соответствии с данными таблицы 1 вычислены весовые коэффициенты всех уравнений для выделенных точек локальных областей (таблица 3), и на их основе построено семейство линейных моделей:

$$V1;\ X = 0{,}5X_5 + 0{,}7X_6; \qquad V4;\ X = 1{,}6X_6;$$

$$(9)\quad V2;\ X = 0{,}3X_5 + 0{,}7X_7; \qquad V5;\ X = -0{,}2X_3 + 0{,}8X_5 - 0{,}3X_7;$$

$$V3;\ X = 0{,}1X_3 + X_7.$$

Таблица 2. Вычисление весовых коэффициентов линейной модели для варианта V1

	*V*1	*K*1	*K*2	*K*3	*K*4	*K*5	*K*6	*K*7
*X*1	1	1,1	1	1	1	1	1	1
*X*2	1,5	1,5	1,6	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
*X*3	1,1	1,1	1,1	1,2	1,1	1,1	1,1	1,1
*X*4	1,2	1,2	1,2	1,2	1,3	1,2	1,2	1,2
*X*5	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,5	1,4	1,4
*X*6	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,4	1,3
*X*7	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,3
X	1,33	1,33	1,33	1,33	1,33	1,38	1,4	1,33
		0	0	0	0	0,05	0,07	0

Таблица 3. Сводные данные по линеаризации матричной модели

№	*K*1	*K*2	*K*3	*K*4	*K*5	*K*6	*K*7	*N*
1	0	0	0	0	0,5	0,7	0	3
2	0	0	0	0	0,3	0	0,7	3
3	0	0	0,1	0	0	0	1	3
4	0	0	0	0	0	1,6	0	2
5	0	0	–0,2	0	0,8	0	–0,3	4

Полученная система линейных уравнений свидетельствует о локальном уменьшении размерности нелинейной модели (см. мерность пространства – *N* в таблице 3), о существенной динамике качественных изменений в процедуре свертки при переходе из одной локальной области в другую (чередуются переменные с наибольшим весовым коэффициентом, что соответствует изменению приоритетов частных критериев, их числа и состава). Достаточно наглядно описанную динамику иллюстрирует рис. 6.

Несовпадение результатов вычислений комплексной оценки с данными наблюдений, принадлежащими определенной локальной области, как факт неадекватности модели, можно подвергнуть узконаправленному анализу благодаря наличию линейной модели меньшей размерности. Так, для варианта *V*3 факт неадекватности означает необходимость уточнения степени долевого участия только частных критериев X_3, X_7 и возможность использования для этого транзитивных одномерных (рис. 7) и двумерной (рис. 8) функции чувствительности.

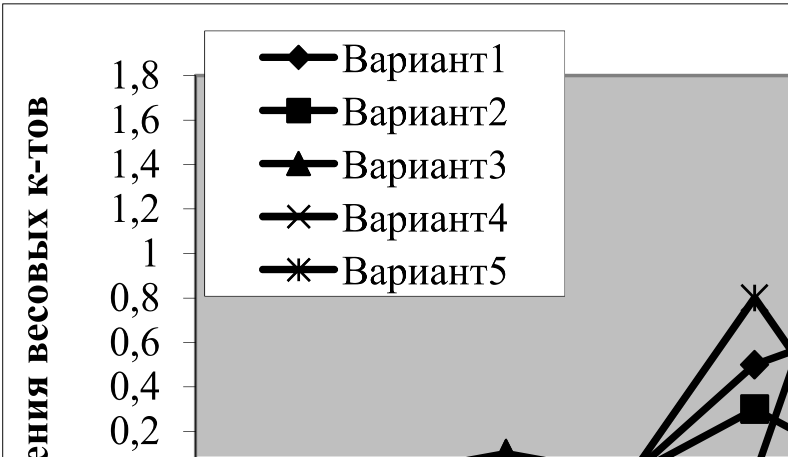

Рис. 6. Динамика качественных изменений в процедуре свертки по результатам локальной линеаризации исходной модели

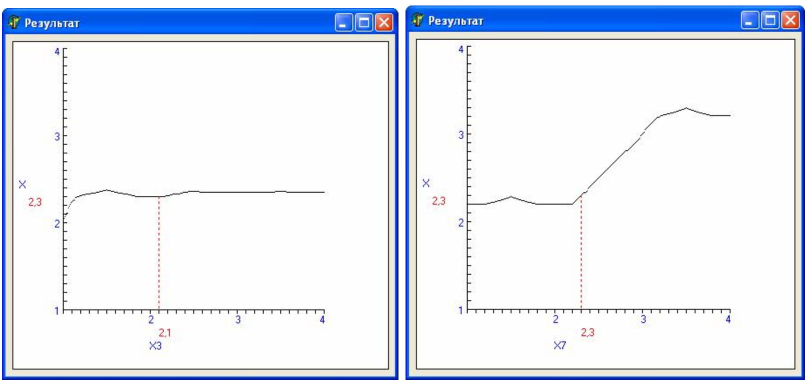

Рис. 7. Функции чувствительности а) по критерию X_3; б) по критерию X_7

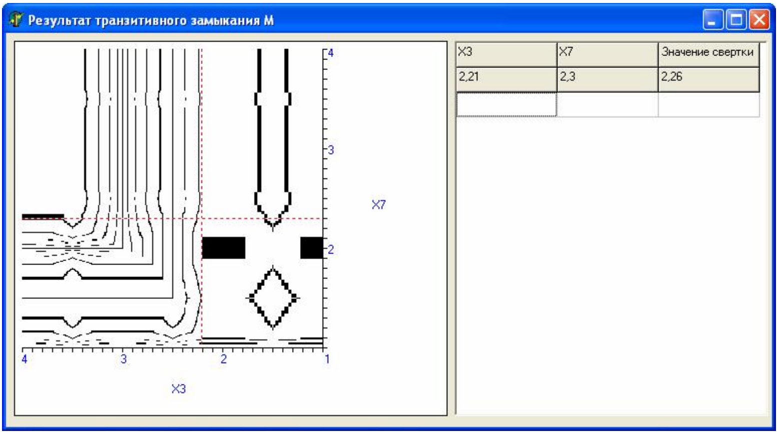

Рис. 8. Функция чувствительности по критериям X_3, X_7.

5. Заключение

С помощью функций чувствительности для конкретной локальной области можно устранить или уменьшить неадекватность модели данным наблюдений, корректируя параметры матриц свертки, касающихся существенных переменных, либо функции приведения этих переменных к стандартной шкале.

Таким образом, использование принципа многомодельности расширяет возможности исследования матричных моделей предпочтений сложной структуры и, тем самым, существенно повышает эффективность поддержки принятия решений в *high-hume* технологиях.

Литература

1. ВАРЖАПЕТЯН А.Г. *Квалиметрия*: учебное пособие. - СПб.: СПбГУ АП., 2005. – 176 с.
2. ЖУКОВА Е.А. *Трансформация системы «наука» в мире high-tech* // Вестник Томского государственного педагогического университета. Серия: Гуманитарные науки (философия и культурология). – 2006. – Вып. 7(58). – С. 53–57.

3. МАЗУР И.И., ШАПИРО В.Д., ОЛЬДЕРОГГЕ Н.Г. *Управление проектами*: учебное пособие. – М.: Омега–Л, 2004. – 664 с.
4. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами.* 2-е издание. – М.: Физматлит, 2007 – 584 с.
5. ХАРИТОНОВ В.А., БЕЛЫХ А.А. *Технологии современного менеджмента. Инновационно-образовательный проект* – Пермь: ПГТУ, 2007. – 187 с.
6. ХАРИТОНОВ В.А., БЕЛЫХ А.А., ВИНОКУР И.Р. *Функциональные возможности механизмов комплексного оценивания с топологической интерпретацией матриц свертки* // Управление большими системами. – 2007. - №18. – С. 129-140.

PRINCIPLE OF MULTI-MODELING IN MODELS OF INDIVIDUAL PREFERENCES

Andrey Belykh, Pryanishnikov Perm state agricultural academy, Cand. of Sci. in Technology, assistant of professor (psaa@perm-edu.ru).
Roman Shaydulin Pryanishnikov Perm state agricultural academy, assistant (psaa@perm-edu.ru)
Kirill Gureev, Perm state technical university, postgraduate student (nedstf@pstu.ru)
Valeriy Kharitonov, Perm state technical university, Doctor of Science in Technology, professor (nedstf@pstu.ru)
Alexander Alekseev, Perm state technical university, the head of laboratory (nedstf@pstu.ru)

Abstract: New capabilities of individual preferences studies are substantiated. Linear and non-linear (*matrix*) *methods of complex evaluation allow decreasing dimensionality of the decision-making problem, and analyzing dynamics of qualitative changes in convolution.*

Keywords: principle of multi-modeling, preferences modeling, linear and non-linear (matrix) convolutions.

Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии О. П. Кузнецовым