

УДК 658.5.012+122.011.56

ББК 22.193

КОМПЛЕКСНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПРИ ВЫБОРЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНА ПРОИЗВОДСТВА НА ТАКТИЧЕСКОМ УРОВНЕ С УЧЕТОМ НЕЧЕТКИХ КРИТЕРИЕВ И ОГРАНИЧЕНИЙ¹

Вожаков А. В.², Гитман М. Б.³, Федосеев С. А.⁴

(Пермский государственный технический университет, Пермь)

Рассматривается модель оценки результатов работы автоматизированной системы планирования производства при нечетких ограничениях и критериях. Находятся и сравниваются оптимальные решения, полученные с использованием различных значений комплексного критерия.

Ключевые слова: календарное планирование производства, нечеткие множества, математическое моделирование, оптимизация.

1. Введение

На крупных предприятиях с дискретным производством и сложной высокотехнологичной продукцией возникает серьезная проблема при календарном планировании – эффективно распределить множество технологических операций по имеющимся производственным мощностям (тактический уровень планирования [3]). На предприятиях, как правило, используются не оптимальные, а лишь допустимые производственные планы, по-

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 10-08-00539).

² Артем Викторович Вожаков, кандидат технических наук (vozhaakov@ya.ru).

³ Михаил Борисович Гитман, доктор физико-математических наук, профессор (mgitman@netzero.net).

⁴ Сергей Анатольевич Федосеев, кандидат физико-математических наук (fsa@gelicon.biz).

рождающие множество очевидных недостатков, что приводит к снижению прибыли предприятия. Задача повышения качества производственного планирования усложняется еще и тем, что часто невозможно четко сформулировать критерии оптимальности плана и соответствующие производственные ограничения на имеющиеся ресурсы предприятия.

С точки зрения оптимизации все решения, получаемые в результате выработки планов, можно разделить на:

- оптимальные по всем критериям;
- оптимальные по одному/нескольким критериям;
- приемлемые по всем ограничениям.

2. Постановка задачи

Решением задачи многокритериальной оптимизации часто является Парето-множество решений, при этом выбор наилучшего решения представляет собой сложную задачу, основанную на комплексной оценке решений. Часто для описания соотношений между частными критериями оптимальности требуется введение дополнительных параметров.

Рассмотрим многокритериальную задачу оптимизации планирования производства на тактическом уровне [4]. Для описания календарного плана производства вводится матрица P . Ее элементы p_{ld} определяют количество операций l -го вида, запланированных на день с номером d , $l \in 1, \dots, W$, $d \in 1, \dots, T$, где T – количество дней в плановом периоде; W – количество видов операций. Введем матрицу баланса номенклатурных единиц B . Ее элементы b_{id} определяют количество номенклатурных единиц с номерами $i \in 1, \dots, C$ (C – количество номенклатурных позиций в справочнике), находящихся на цеховых складах на конец дня с номером d ($d \in 1, \dots, T$); значение индекса $d = 0$ используется в матрице баланса для определения остатков номенклатурных единиц на начало планируемого периода. Очевидно, что значения матрицы напрямую зависят от плана производства P и от начального значения остатков на складе r . Мат-

рица B зависит от главного календарного плана производства (ГКПП) [2]. В дни, когда запланирован выпуск продукции, происходит отгрузка готовой продукции со склада, уменьшая тем самым остаток. Элементы матрицы B можно определить следующим образом:

$$(1) \quad b_{id} = \begin{cases} r_i, & i \in \overline{1, C}, \quad d = 0, \\ b_{id-1} + p_{s_i+w_i-1,d} - g_{id} - \sum_{j=1}^N p_{s_j,d} a_{ij}, & i \in \overline{1, N}, \quad d \in \overline{1, T}, \\ b_{id-1} - \sum_{j=1}^N p_{s_j,d} a_{ij}, & N < i \leq C, \quad d \in \overline{1, T}; \end{cases}$$

где r_i – остаток i -ой номенклатурной единицы на начало периода; g – главный календарный план производства (ГКПП); a_{ij} – состав изготавливаемых изделий; w_i – количество операций в i -ом технологическом этапе; N – количество изготавливаемых номенклатурных позиций в справочнике; $s_i = \begin{cases} 1, & i = 1, \\ s_{i-1} + w_{i-1}, & i \in \overline{2, N}. \end{cases}$

Очевидно, что при составлении плана производства должны учитываться следующие ограничения:

1. Суммарное количество операций одного вида в плане-графике должно быть равно общему количеству операций данного вида, которые необходимо выполнить в плановом периоде согласно ГКПП:

$$(2) \quad \sum_{d=1}^T p_{ld} = o_l \quad \text{для всех } l \in \overline{1, W},$$

где O_l – количество операций, которые необходимо выполнить.

2. В каждый из планируемых дней максимальная загрузка рабочих центров не должна превышать максимально возможную загрузку:

$$(3) \quad \sum_{l=1}^W p_{ld} t_l \beta_{lk} \leq t_k^* q_k,$$

где $\beta_{lk} = \begin{cases} 1, & e_l = k, \\ 0, & e_l \neq k; \end{cases} \quad l \in \overline{1, W}, \quad k \in \overline{1, E}, \quad d \in \overline{1, T}; \quad t_k^*$ – максималь-

ная загрузка оборудования, данная величина может быть нечеткой, т. е. может быть задана в виде нечеткого числа [4]; q_k – ко-

личество рабочих центров k -го типа; t_l – трудоемкость операции l -го вида; e_l – номер типа рабочего центра для совершения операции l -го вида; E – количество типов рабочих центров, имеющих на производстве.

3. В любой момент времени остаток номенклатурных единиц не может быть отрицательным. Математически данное ограничение может быть записано как

$$(4) \quad b_{id} \geq 0 \text{ для всех } i \in \overline{1, C}, d \in \overline{0, T}.$$

Введем четыре частных критерия оптимальности плана - графика производства:

1. Критерий комфортности производства – план – график производства должен быть скомпонован таким образом, чтобы операции одного вида запускались в производство как можно большими партиями (в этом случае не потребуются переналадка оборудования при переходе от выполнения одной операции к другой):

$$(5) \quad J_1 = \sum_{l=1}^W \sum_{d=1}^T \beta_{ld} \rightarrow \min,$$

$$\text{где } \beta_{ld} = \begin{cases} 1, & p_{ld} \neq 0, \\ 0, & p_{ld} = 0. \end{cases}$$

2. Производство должно быть равномерным (уровень загрузки рабочих центров должен изменяться постепенно, без резких перепадов):

$$(6) \quad J_2 = \sum_{d=1}^{T-1} \sum_{k=1}^E |z_{kd} - z_{kd+1}| \rightarrow \min,$$

$$\text{где } z_{kd} = \frac{\sum_{l=1}^W p_{ld} t_l \beta_{lk}}{t_k q_k}, \quad \beta_{lk} = \begin{cases} 1, & e_l = k, \\ 0, & e_l \neq k. \end{cases}$$

3. Риск срыва плана производства должен быть минимален. Максимальное опережение производства τ является нормативом предприятия и измеряется в днях. Будем говорить, что продукция выпущена с опережением, если продукция произведена

раньше, чем это стало крайне необходимо. Относительная загрузка оборудования (суммарная трудоемкость, отнесенная к максимальной загрузке данного типа оборудования), попадающая в $\tau/2$ области перед отгрузкой готовой продукции, должна быть минимальной (интервал $\tau/2$ выбран из практических соображений):

$$(7) \quad J_3 = \sum_{d=1}^T \sum_{d^*=1}^{d-d^*>0} \frac{1}{d^*} \chi_d \sum_{l=1}^W \frac{p_{ld-d^*} t_l}{q_{e_l} t_{e_l}^*} \rightarrow \min,$$

$$\text{где } \chi_d = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^N g_{id} \neq 0, \\ 0, & \sum_{i=1}^N g_{id} = 0. \end{cases}$$

4. Срок изготовления продукции должен быть минимальным. При этом продукт считается изготовленным только в том случае, если все операции завершены, т. е. дата совершения последней операции и будет определять срок изготовления продукции:

$$(8) \quad J_4 = \max_{d \in \overline{1, T}} \omega(d) \rightarrow \min,$$

$$\text{где } \omega(d) = \begin{cases} d, & \sum_{l=1}^W \sum_{u=d}^T p_{lu} = 0, \\ 0, & \sum_{l=1}^W \sum_{u=d}^T p_{lu} \neq 0. \end{cases}$$

На основе предложенных частных критериев введен обобщенный критерий оптимальности с использованием расширенного специального нечеткого множества над частными критериями оптимальности

$$J^r = \{\mu_1/J_1; \mu_2/J_2; \mu_3/J_3; \mu_4/J_4\},$$

где $\mu_i \in [0; 1]$, $i \in \overline{1, 4}$, – экспертная оценка значимости i -го критерия.

Для сравнения двух элементов J^{r1} и J^{r2} множества J^r будем использовать четкую функцию от нечеткого аргумента (специальный индекс ранжирования [1]):

$$(9) \quad H(J^{r1}, J^{r2}) = \text{sign } C_i,$$

$$\text{где } C_i = \frac{\mu_i^{r1} \cdot J_i^{r1} - \mu_i^{r1} J_i^{r2}}{u_i};$$

$$i \text{ доставляет } \max |(\mu_i^{r1} \cdot J_i^{r1} - \mu_i^{r1} J_i^{r2}) / u_i|;$$

μ_i^{r1} – функция принадлежности (значимость), J_i^{r1} ;

μ_i^{r2} – функция принадлежности (значимость) J_i^{r2} ;

$$u_i = \max(J_i^{r1}, J_i^{r2}), \quad i \in \overline{1, 4}.$$

При этом если значение i единственно и
если $\text{sign } C_i = \langle + \rangle$, то $J^{r1} > J^{r2}$;
если $\text{sign } C_i = \langle - \rangle$, то $J^{r1} < J^{r2}$.

Если значение i не единственно, то определим k – количество равных по модулю экстремумов ($k \leq n$) и вычислим

$$\lambda = \sum_{i=1}^k \text{sign } C_i.$$

Если $\lambda = 0$, то $J^{r1} = J^{r2}$;

если $\lambda < 0$, то $J^{r1} < J^{r2}$;

если $\lambda > 0$, то $J^{r1} > J^{r2}$.

Математическая постановка задачи составления оптимального плана - графика производства может быть представлена в следующем виде:

Найти значение матрицы плана производства p_{ld} , $l \in \overline{1, W}$,
 $d \in \overline{1, T}$, приводящее к минимуму выражение

$$(10) \quad J^r \rightarrow \min, \text{ где } J^r = \{\mu_1/J_1; \mu_2/J_2; \mu_3/J_3; \mu_4/J_4\},$$

где J_1, J_2, J_3, J_4 – частные критерии оптимальности плана производства при ограничениях (1)–(4); $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ – оценки значимости частных критериев.

Введем показатели оптимальности полученного решения. Данные показатели будут использоваться для отображения результатов и исследования множества решений задачи, полученных при различных значениях экспертных оценок важности критериев. Показатели оптимальности строятся на основании частных критериев оптимальности с соблюдением следующих принципов:

– показатели должны быть возрастающими, т. е. при улучшении значения критерия показатель возрастает;

– показатели должны быть отнормированы к единице, при этом за 0 берется самое худшее значение критерия, а за 1, соответственно, самое лучшее;

– значения показателей должны в точности соответствовать значениям соответствующего частного критерия оптимальности. Для любых двух значений частного критерия оптимальности (А и В) соответствующие им показатели оптимальности (РА и РВ) должны находиться в отношении: если А лучше В, то $PA > PB$, если $A = B$, то $PA = PB$;

– минимальные и максимальные значения показателей должны быть достижимыми в рамках конкретной задачи.

Будем использовать следующие показатели оптимальности плана производства, которые соответствуют всем требованиям.

Показатель комфортности:

$$(11) J_1^* = 1 - \frac{\sum_{l=1}^W \sum_{d=1}^T \beta_{ld}}{W \cdot T} - \frac{1}{T},$$
$$1 - \frac{1}{T},$$

где $\beta_{ld} = \begin{cases} 1, & p_{ld} \neq 0, \\ 0, & p_{ld} = 0. \end{cases}$

Показатель равномерности:

$$(12) \rho_d = 1 - \frac{\sum_{k=1}^E |z_{kd} - z_{kd+1}|}{E},$$

$$\text{где } z_{kd} = \frac{\sum_{l=1}^W p_{ld} t_l \beta_{lk}}{t_k q_k}; \beta_{lk} = \begin{cases} 1, & e_l = k, \\ 0, & e_l \neq k. \end{cases}$$

Показатель равномерности за весь период:

$$(13) J_2^* = \frac{\sum_{d=1}^{T-1} \rho_d}{T-1}.$$

Показатель риска срыва производства:

$$(14) J_3^* = 1 - \frac{\sum_{d=1}^T \sum_{d^*=1}^{d-d^*>0} \frac{\chi_d}{d^*} \sum_{l=1}^W \frac{p_{ld-d^*} t_l}{q_{e_l} t_{e_l}^* E}}{\sum_{d=1}^T \sum_{d^*=1}^{d-d^*>0} \frac{\chi_d}{d^*}},$$

$$\text{где } \chi_d = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^N g_{id} \neq 0, \\ 0, & \sum_{i=1}^N g_{id} = 0. \end{cases}$$

Показатель минимальности срока производства:

$$(15) J_4^* = 1 - \max_{d \in 1, T} \frac{\omega(d) - 1}{T - 2},$$

$$\text{где } \omega(d) = \begin{cases} d, & \sum_{l=1}^W \sum_{u=d}^T p_{lu} = 0, \\ 0, & \sum_{l=1}^W \sum_{u=d}^T p_{lu} \neq 0. \end{cases}$$

3. Решение задачи, оценка результатов

Для решения поставленной задачи была разработана методика, состоящая из последовательности эвристических алгоритмов. Данная методика позволяет находить близкие к оптимальным планы производства при заданных значениях важности частных критериев. Также была разработана автоматизированная система, реализующая данную методику. Подробное описание методики, автоматизированной системы и результатов ее использования выходит за рамки данной статьи. Далее речь пойдет о сравнении решений, полученных при различных значениях оценки важности частных критериев. Очевидно, что от выбора значений важности частных критериев зависит и эффективность полученного решения. Поэтому требуется исследовать поле значений функции принадлежности и сравнить полученные результаты для того, чтобы выбрать те значения функции принадлежности, которые наиболее соответствуют целям производства.

В качестве тестового примера для исследования был взят производственный план предприятия ООО «Завод СДМ», г. Пермь. Расчет проводился на три месяца. В реальности план производства, как правило, не бывает выполнен полностью в плановом периоде, так как к началу периода уже есть определенный задел деталей и агрегатов, и по завершению месяца остается также незавершенное производство. Поэтому показательным является второй месяц, так как к началу второго месяца уже есть определенный задел деталей и к концу месяца также необходимо будет подготовить определенный набор деталей, чтобы производство не стартовало с нуля. В данной постановке не будет учитываться частный критерий минимизации срока производства, тому есть две причины:

1. Использование критерия минимальности срока производства неизбежно привело бы к перемещению нагрузки на более ранние даты. Таким образом, при оценке плана производства на второй месяц мы бы неизбежно оценивали планы производства, состоящие из разных наборов технологических операций. В этом случае сравнение планов производства было бы некорректным.

2. Использование трех критериев вместо четырех позволит на порядок снизить машинное время, требуемое для проведения исследования. В противном случае проведение столь длительных исследований стало бы невозможным.

ГКПП рассматриваемого примера представлен в таблице 1.

Таблица 1. Пример производства крупных партий

Дата выпуска (день от начала планового периода)	Число изделий
22	50
44	50
66	50

Первоначально был найден допустимый план производства, без оптимизации. Данный план производства лег в основу серии расчетов оптимальных планов производства при различных значениях функции принадлежности. Первоначально были найдены два плана производства, оптимизированные при различных значениях важности критериев:

1. Максимально комфортный план производства. В данном случае использовался только критерий комфортности производства, и задача, по сути, стала однокритериальной. Экспертные оценки важности критериев следующие: $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0$, $\mu_3 = 0$. Результат обозначим как «комфортный план производства».

2. Достаточно комфортное и максимально равномерное производство. Экспертные оценки важности критериев следующие: $\mu_1 = 0,7$, $\mu_2 = 1$, $\mu_3 = 0,3$. Результат обозначим как «экспертный план производства».

Полученные результаты будут использоваться для сравнения.

В вышеприведенном примере использовались значения функции принадлежности, установленные с помощью экспертной оценки, т. е. те значения, которые наиболее соответствуют представлению экспертов о приоритетах построения производственного процесса. Дополнительно рассмотрим другие значения функции принадлежности, которые могут быть использованы

ны при решении данной задачи. Для исследования были выбраны значения функции принадлежности от 0,1 до 1 с шагом в 0,1

В результате проведенных вычислений было получено множество решений (размер множества совпадает с количеством проведенных вычислений). Из данного множества были исключены решения, заведомо не оптимальные. Заведомо неоптимальными решениями были признаны значения J^1 , для которых существует решение J^2 такое, что для всех i выполняются условия: $J_i^{r1*} \leq J_i^{r2*}$; $\mu_i^{r1} \leq \mu_i^{r2}$. Таким образом, получили набор решений (множество выбираемых решений), представленный в таблице 2.

Далее необходимо выбрать наилучшее решение из выбираемого множества. Очевидно, что рассматривать значения частных критериев без привязки к значениям важности частных критериев не имеет смысла, так как повышение важности одного из частных критериев автоматически означает, что требуется улучшить этот критерий, т. е. значения частных критериев должны соответствовать их важности. Для выбора наилучшего значения были использованы три различных способа:

- линейная свертка значений частных критериев без учета важности критериев;
- линейная свертка значений частных критериев с учетом важности критериев в качестве множителей;
- поиск наилучшего значения с использованием индекса ранжирования (9).

Дополнительно стоит указать физический смысл индекса ранжирования (9): наилучшим значением множества J будет признано то значение J^r , у которого больше количество пиковых значений частных критериев, с учетом их значимости. В таблице 2 представлены оценки по всем трем способам выбора наилучшего. Для удобства таблица отсортирована по значению линейной свертки частных критериев без учета их важности. Значения в столбце «Ранг» указывают оценку решения с помощью индекса ранжирования (9), где 1 – наилучшее значение, 2 – наилучшее из оставшихся решений и т.д.

Из таблицы видно, что оценки, полученные с помощью индекса ранжирования, сильно отличаются от оценок, полученных с помощью линейных сверток. Далее каждое решение было рассмотрено группой экспертов, которые проводили оценки качества решений с точки зрения сбалансированности и отражения поставленных целей. Эксперты указали, что значения, полученные с помощью индекса ранжирования (9), являются более адекватными. Таким образом, данный индекс следует рассматривать как альтернативу линейной свертке, однако для каждой задачи вопрос применения той или иной оценки является открытым. Итак, наилучшим признано решение №10 из таблицы 2 – это решение соответствует оценкам важности частных критериев для данной задачи: $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0,6$, $\mu_3 = 0,8$.

Таблица 2. Множество выбираемых решений задачи

№	μ_1	μ_2	μ_3	J_1^*	J_2^*	J_3^*	$\sum_{i=1}^3 J_i^*$	$\sum_{i=1}^3 \mu_i J_i^*$	Ранг
1	0,4	1	0,3	0,40	0,97	0,36	1,74	1,24	
2	0,7	1	0,3	0,74	0,84	0,37	1,9	1,48	
3	1	0,8	0,4	0,82	0,75	0,4	1,97	1,58	
4	0,4	0,7	1	0,42	0,59	0,96	1,98	1,55	
5	0,5	0,4	1	0,53	0,47	1	2,01	1,45	
6	0,5	1	0,7	0,49	0,89	0,62	2,01	1,58	
7	0,5	1	0,8	0,39	0,85	0,79	2,04	1,68	3
8	1	0,3	1	0,87	0,27	0,97	2,11	1,92	5
9	1	0,4	0,5	0,93	0,43	0,76	2,13	1,49	
10	1	0,6	0,8	0,83	0,5	0,8	2,14	1,77	1
11	0,9	0,6	0,8	0,81	0,51	0,83	2,16	1,70	2
12	1	0,4	0,9	0,89	0,31	0,95	2,16	1,87	4
13	0,9	0,3	1	0,83	0,36	0,98	2,18	1,84	

Отметим, что решение с экспертной оценкой функции принадлежности (предыдущий пример) не попало в число наилуч-

ших (таблица 2). Однако при постоянной эксплуатации системы оценки, полученные из практического опыта для конкретного производства, вероятно, будут давать вполне удовлетворительный результат.

Рассмотрим решение задачи при наилучших значениях функций принадлежности: $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0,6$, $\mu_3 = 0,8$.

На рис. 1 представлен график изменения показателя равномерности плана производства ρ_d для четырех планов производства: допустимый план до оптимизации (допустимый); план после оптимизации по критерию комфортности (комфортный); план после оптимизации по комплексному критерию с экспертными оценками (экспертный) и план после оптимизации по комплексному критерию с наилучшими оценками важности критериев (далее оптимальный). Точки на графике указывают значение показателя ρ_d между днями d и $d + 1$.

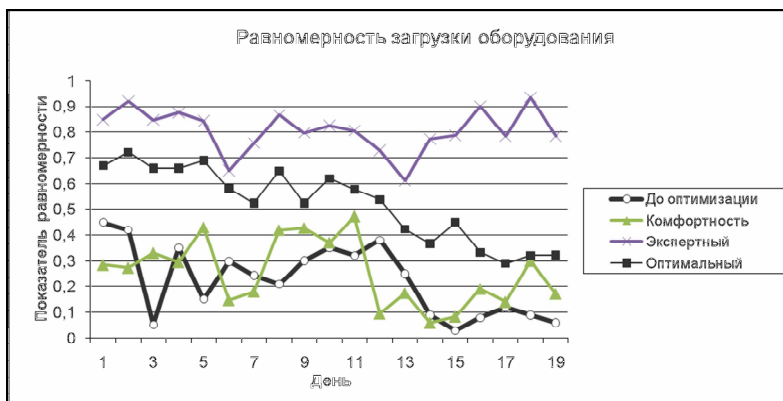


Рис. 1. Равномерность загрузки оборудования

На рис. 2 представлены значения показателя минимальности риска срыва производства J_4^* для допустимого, комфортно-го, экспертного и оптимального производственных планов.

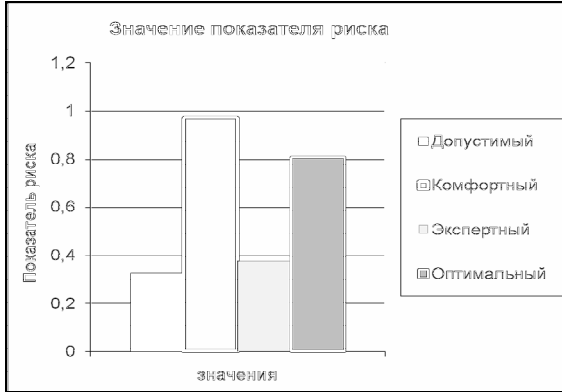


Рис. 2. Риск срыва производства

На рис. 3 представлены значения показателя комфортности J_1^* для допустимого, комфортного и комплексного производственных планов.

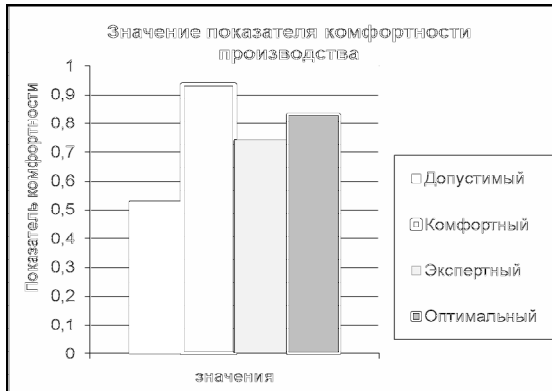


Рис. 3. Комфортность производства

4. Заключение

Из приведенных выше графиков видно, что после оптимизации допустимого плана производства по комплексному критерию произошли следующие характерные изменения:

1. Значение показателя комфортности улучшено по сравнению с допустимым планом и меньше оптимального значения (комфортный план) менее чем на 10%.

2. Показатель равномерности загрузки оборудования значительно улучшен по отношению к допустимому и комфортному плану производства, однако на 40% меньше, чем в экспертном плане производства.

3. Значение показателя риска срыва производства в два с половиной раза лучше, чем в допустимом плане, и менее чем на 20% меньше оптимального значения;

4. Производственный график стал более равномерным за счет ограничения на досрочный выпуск деталей.

5. В последние дни планового периода нагрузка снижается, чтобы дать возможность оперативно решить возможные проблемы.

Литература

1. БОРИСОВ А.Н., АЛЕКСЕЕВ А.В., МЕРКУРЬЕВА Г.В. *Обработка нечеткой информации в системах принятия решений* – М.: Радио и связь, 1989. – 304 с.
2. ГАВРИЛОВ Д.А. *Управление производством на базе стандарта MRP II*. – СПб.: Питер, 2002.
3. СТОЛБОВ В.Ю., ФЕДОСЕЕВ С.А. *Модель интеллектуальной системы управления предприятием* // Проблемы управления. – 2006. – №5. – С. 36–39.
4. ФЕДОСЕЕВ С.А., ВОЖАКОВ А.В., ГИТМАН М.Б. *Модель календарного планирования производства с нечеткими целями и ограничениями* // Системы управления и информационные технологии. – 2009. – №3. – С. 21–24.

COMPLEX EVALUATION FOR OPTIMAL TACTICAL PRODUCTION SCHEDULE SELECTION UNDER FUZZY CRITERIA AND CONSTRAINTS

Artem Vozhakov, Perm State Technical University, Cand. Sc., (*vozhakov@ya.ru*).

Mikhail Gitman, Perm State Technical University, Doctor of Science, professor (*gmb@matmod.pstu.ac.ru*).

Sergey Fedoseev, Perm State Technical University, Cand. Sc., assistant professor (*fsa@gelicon.biz*).

Abstract: The model is considered for evaluation of performance of an automated production scheduling and planning system under fuzzy criteria and constraints. Optimal schedules obtained using different models of integrated estimation are calculated and compared.

Keywords: production scheduling, fuzzy sets, mathematical modelling, optimization.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Д. А. Новиковым*