

## **МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ДЕФИЦИТА МОЩНОСТИ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ<sup>1</sup>**

**Зоркальцев В. И.<sup>2</sup>, Пержабинский С. М.<sup>3</sup>**

*(Учреждение Российской академии наук  
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева  
СО РАН, Иркутск)*

*Исследуется модель минимизации дефицита мощности в электроэнергетической системе. В модели учитываются нелинейные потери мощности в линиях электропередачи. Модель предназначена для исследования надежности электроэнергетических систем. Излагается способ сведения модели к задаче выпуклого программирования. Для реализации модели предлагается алгоритм внутренних точек с использованием квадратичных аппроксимаций ограничений. Представлены сравнительные результаты экспериментальных расчетов.*

Ключевые слова: электроэнергетическая система, надежность, дефицит мощности, метод внутренних точек, квадратичные аппроксимации.

### **1. Введение**

В Сибирском энергетическом институте (СЭИ, ныне ИСЭМ СО РАН), разработана методика анализа надежности электроэнергетических систем (ЭЭС) [2–6], базирующаяся на методе

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 09-01-00306а

<sup>2</sup> Валерий Иванович Зоркальцев, доктор технических наук, профессор (Иркутск, ул. Лермонтова, д. 130, тел. (3952) 42-78-50).

<sup>3</sup> Сергей Михайлович Пержабинский, инженер (sergey\_per85@mail.ru).

многовариантных статистических испытаний (методе Монте-Карло).

Методика состоит из трех блоков.

1. Вероятностный блок, в котором формируются случайным образом возможные состояния ЭЭС.

2. Блок оценки дефицита мощности сформированных расчетных состояний (модель минимизации дефицита мощности).

3. Блок вычисления показателей надежности ЭЭС, в котором обрабатывается информация, накопленная в результате работы первых двух блоков (в том числе оцениваются показатели вероятности и математического ожидания дефицита мощности в отдельных узлах системы).

В данной методике блок расчета дефицита мощности занимает центральное место. От его реализации зависит не только качество результатов, но и время проведения всего цикла расчетов. Поэтому к модели минимизации дефицита мощности предъявляются особые требования. Она должна быть агрегированной, максимально адекватной действительности, легко реализуемой, рассчитываемой за максимально короткое время. Чем меньше время оптимизации, тем большее количество случайных состояний можно «проиграть» и тем самым увеличить точность оценки показателей

Первые варианты модели оценки дефицита мощности ЭЭС, разработанные в СЭИ, представлялись в виде задачи о максимальном потоке. Для их реализации применялся алгоритм Форда–Фалкерсона. При использовании алгоритма Форда–Фалкерсона возникала неоднозначность распределения дефицита по узлам и, следовательно, неточность оценок вероятности и математических ожиданий дефицита в узлах системы. В связи с этим стала использоваться двухэтапная схема расчетов модели методом внутренних точек [1]. Сначала решалась задача минимизации дефицита мощности. На втором этапе – задача равномерного распределения по узлам пропорционально нагрузкам полученного минимального дефицита. В последующем была

предложена одноэтапная схема одновременной минимизации с равномерным распределением дефицита мощности [2].

Одним из направлений повышения адекватности модели оценки дефицита мощности является учет потерь мощности при передаче ее по межузловым связям. При этом модель приобретает более реальный физический смысл и позволяет получить однозначное решение.

В данной работе рассматривается модель, в которой учитываются потери мощности. Потери представляются в виде квадратичной функции от передаваемой мощности по линии электропередачи. Предлагается алгоритм метода внутренних точек, использующий квадратичные аппроксимации. Особенность этого алгоритма состоит в том, что в целевую функцию добавляются квадратичные составляющие ограничений с весами, равными приближениям к множителям Лагранжа этих ограничений.

## **2. Модель оценки дефицита мощности электроэнергетических систем с учетом потерь мощности в сети**

Рассматривается схема электроэнергетической системы, состоящая из  $n$  узлов и некоторого набора связей между ними. Заданы располагаемая мощность  $\bar{x}_i$ , нагрузка  $\bar{y}_i$  в  $i$ -ом узле ЭЭС, предел пропускной способности  $\bar{z}_{ij}$  линии электропередачи, связывающей узлы  $i$  и  $j$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Считается, что для всех  $i$  и  $j$ ,  $\bar{x}_i \geq 0$ ,  $\bar{y}_i \geq 0$ ,  $\bar{z}_{ij} \geq 0$ . Если  $\bar{z}_{ij} = 0$  при некоторых  $i$  и  $j$ , то это означает, что фактически поток мощности из узла  $i$  в узел  $j$  не возможен.

Переменными задачи являются:  $x_i$  – используемая мощность;  $y_i$  – покрываемая нагрузка в узле  $i$ ;  $z_{ij}$  – поток мощности из узла  $i$  в узел  $j$ .

Требуется минимизировать суммарный дефицит мощности в системе

$$(1) \sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - y_i) \rightarrow \min,$$

учитывая балансы мощности в узлах

$$(2) x_i - y_i + \sum_{j=1}^n (1 - \alpha_{ji} z_{ji}) z_{ji} - \sum_{j=1}^n z_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

и линейные двусторонние ограничения-неравенства на переменные

$$(3) 0 \leq y_i \leq \bar{y}_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$(4) 0 \leq x_i \leq \bar{x}_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$(5) 0 \leq z_{ij} \leq \bar{z}_{ij}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n.$$

**Замечание.** Коэффициенты  $\alpha_{ij}$ , используемые для описания потерь при передаче электроэнергии из узла  $i$  в узел  $j$ , заданы и удовлетворяют условию

$$2\alpha_{ij}\bar{z}_{ij} < 1 \text{ для всех } i \text{ и } j.$$

Это условие означает, что дополнительная единица мощности, передаваемая из узла  $i$  в узел  $j$ , достигает узла  $j$  с положительным значением: при любом  $z_{ij} \in [0, \bar{z}_{ij})$

$$\frac{d(z_{ij} - \alpha_{ij}(z_{ij})^2)}{dz_{ij}} > 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n.$$

**Определение.** Тройку векторов  $x, y, z$ , удовлетворяющих балансовым уравнениям (2) и неравенствам (3)–(5), будем называть допустимым решением задачи (1)–(5). Множество таких троек векторов образует множество допустимых решений.

Множество допустимых решений задачи (1)–(5), как правило, невыпукло (за исключением некоторых вырожденных случаев). Действительно, пусть существуют такие допустимые решения  $(\tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{z}), (\hat{y}, \hat{x}, \hat{z})$ , что  $\tilde{z} \neq \hat{z}$ , тогда их выпуклая комбинация  $(\lambda\tilde{y} + (1-\lambda)\hat{y}, \lambda\tilde{x} + (1-\lambda)\hat{x}, \lambda\tilde{z} + (1-\lambda)\hat{z})$  не удовлетворяет балансовым ограничениям (2). Значения функций в левой части ограничений (2) равны  $\lambda(1-\lambda)\sum_{j=1}^n \alpha_{ji} (\tilde{z}_{ji} - \hat{z}_{ji})^2$ .

Эти величины будут положительны для  $\lambda \in (0, 1)$  и всех  $i$  таких, что существует номер  $j$ , при котором  $\tilde{z}_{ji} \neq \hat{z}_{ji}$ .

Для представления задачи (1)–(5) в виде эквивалентной задачи выпуклого программирования заменим ограничения (2) на следующие:

$$(6) \quad x_i - y_i + \sum_{j=1}^n (1 - \alpha_{ji} z_{ji}) z_{ji} - \sum_{j=1}^n z_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Множество векторов, соответствующих ограничениям (3)–(6), является выпуклым, для любой выпуклой комбинации двух допустимых решений  $(\tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{z})$ ,  $(\hat{y}, \hat{x}, \hat{z})$  выполняются ограничения (3)–(6).

Вместо задачи (1)–(5) можно использовать задачу выпуклого программирования (1), (3)–(6), множество решений которой содержит множество допустимых решений исходной задачи. В [3] доказано следующее утверждение.

**Теорема 1.** Пусть значения переменных  $\tilde{y}_i, \tilde{x}_i, \tilde{z}_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$ , являются оптимальным решением задачи (1), (3)–(6), тогда существуют такие  $\hat{x}_i, \hat{z}_{ij}$ , что значения переменных  $\tilde{y}_i, \hat{x}_i, \hat{z}_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$ , составляют оптимальное решение задачи (1)–(5)

Из приведенной выше теоремы следует, что распределение дефицита мощности по узлам системы, найденное в результате решения задачи (1), (3)–(6), будет оптимальным и в задаче (1)–(5).

Задача (1), (3)–(6) имеет решение, так как множество допустимых решений не пусто (значения  $y = 0, x = 0, z = 0$  составляют допустимое решение), выпукло и ограничено (в силу условий (3)–(5)), целевая функция линейна. Из существования решения в задаче (1), (3)–(6) следует (согласно Теореме 1) существование решения в задаче (1)–(5). Докажем, что решение в задаче (1), (3)–(6) единственно по переменным, составляющим компоненты вектора  $y$ .

**Теорема 2.** Решение задачи (1), (3)–(6) единственно по переменным  $y_i, i = 1, \dots, n$ .

**Доказательство.**

Предположим, что у задачи (1), (3)–(6) существует два оптимальных решения  $(\tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{z})$  и  $(\hat{y}, \hat{x}, \hat{z})$  такие, что

$$(7) \quad \tilde{y} \neq \hat{y}.$$

Оба решения, поскольку они оптимальные, имеют одно и то же значение целевой функции

$$(8) \quad \sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \hat{y}_i) = \sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \tilde{y}_i).$$

Для задачи выпуклого программирования множество оптимальных решений выпукло, следовательно, оптимальным решением должен быть и набор векторов  $(y^*, x^*, z^*)$  таких, что

$$(9) \quad y^* = 0,5(\tilde{y} + \hat{y}), x^* = 0,5(\tilde{x} + \hat{x}), z^* = 0,5(\tilde{z} + \hat{z}).$$

В силу (7) для некоторого  $h \in \{1, \dots, n\}$  значения переменных  $\tilde{y}_h$  и  $\hat{y}_h$  будут различаться. Следовательно, одна из этих величин будет меньше другой. Пусть для определенности

$$(10) \quad \tilde{y}_h < \hat{y}_h \leq \bar{y}_h.$$

То есть для решения  $(\tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{z})$  узел с номером  $h$  будет дефицитным. Вследствие этого,

$$(11) \quad \tilde{x}_h = \bar{x}_h, \tilde{z}_{hj} = 0 \text{ для всех } j \in \{1, \dots, n\}.$$

Действительно, если  $\tilde{x}_h < \bar{x}_h$ , то можно сократить дефицит в узле  $h$ , а значит и суммарный дефицит, увеличивая значение  $x_h$ .

Если  $\tilde{z}_{hj} > 0$  для некоторого  $j$ , то передаваемая мощность из узла  $h$  в узел  $j$  доходит в меньшем объеме, чем  $\tilde{z}_{hj}$  на величину потерь. Поэтому такой поток способствует меньшему сокращению суммарного дефицита по всем узлам. Если этот поток уменьшить на единицу, то это приведет к сокращению на единицу дефицита в данном узле и возможному увеличению, меньшему, чем на единицу, дефицита в других узлах. Следовательно, суммарный дефицит сократится. Итак, для оптимально-

го решения из дефицитного узла не может быть потоков мощности. Свойства (11) доказаны.

Представим в виде функции

$$(12) f(y, x, z) = x_h - y_h + \sum_{j=1}^n (1 - \alpha_{jh} z_{jh}) z_{jh} - \sum_{j=1}^n z_{hj}$$

выражение в левой части условия (6) для узла  $h$ . В силу дефицитности для узла  $h$  решения  $(\tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{z})$  условие (6) должно выполняться в виде равенства

$$(13) f(\tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{z}) = 0.$$

Иначе, если бы значение  $f$  при таких аргументах было бы положительным, величину  $\tilde{y}_h$  можно было бы увеличить, не нарушая условие (6). Тем самым сократив дефицит в узле  $h$ , сократим и суммарный дефицит, что противоречит оптимальности решения  $(\tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{z})$ .

Из (11)–(13) следует, что

$$(14) \tilde{y}_h = \bar{x}_h + \sum_{j=1}^n \tilde{z}_{jh} - \sum_{j=1}^n \alpha_{jh} (\tilde{z}_{jh})^2.$$

Согласно условию (6)

$$(15) f(\hat{y}, \hat{x}, \hat{z}) \geq 0.$$

Отсюда, учитывая, что  $\hat{x}_h \leq \bar{x}_h$ ,  $\tilde{z}_{hj} \geq 0$  для всех  $j = 1, \dots, n$  имеем

$$(16) \hat{y}_h \leq \bar{x}_h + \sum_{j=1}^n \hat{z}_{jh} - \sum_{j=1}^n \alpha_{jh} (\hat{z}_{jh})^2.$$

Предположим, что для всех  $j = 1, \dots, n$

$$\tilde{z}_{jh} = \hat{z}_{jh}.$$

Тогда из (14), (16) будет следовать, что

$$\hat{y}_h \leq \tilde{y}_h.$$

Это противоречит (10). Предположение не верно. Для некоторого  $j$

$$(17) \tilde{z}_{jh} \neq \hat{z}_{jh}.$$

Множество таких номеров  $j$  обозначим  $J$ . Отметим, что

$$(18) 0,5\tilde{z}_{jh}^2 + 0,5\hat{z}_{jh}^2 - 0,25(\tilde{z}_{jh} + \hat{z}_{jh})^2 = 0,25(\tilde{z}_{jh} - \hat{z}_{jh})^2.$$

Из определения функции  $f$ , условия (9) и равенства (18) следует, что

$$f(y^*, x^*, z^*) = 0,5f(\tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{z}) + 0,5f(\hat{y}, \hat{x}, \hat{z}) + \sum_{j \in J} 0,25\alpha_{jh}(\tilde{z}_{jh} - \hat{z}_{jh})^2.$$

Из (17) и условия  $J \neq \emptyset$  следует, что третья составляющая положительна. Отсюда

$$(19) f(y^*, x^*, z^*) > 0.$$

Из (9), (10) следует, что

$$\tilde{y}_h < y_h^* < \hat{y}_h \leq \bar{y}_h.$$

Это означает, что оптимальное решение  $(y^*, x^*, z^*)$  будет давать дефицит  $(\bar{y}_h - y_h^*)$  в узле  $h$ . Вместе с тем неравенство (19) означает, что значение переменной  $y_h$  можно увеличить, не нарушая условия (6). Тем самым будет сокращаться дефицит в узле  $h$  и суммарный дефицит. Это противоречит тому, что решение  $(y^*, x^*, z^*)$  является оптимальным. Полученное противоречие доказывает ошибочность исходного предположения о существовании двух оптимальных решений, удовлетворяющих условию (7). Теорема доказана.

### **3. Замечания по реализации модели оценки дефицита мощности электроэнергетической системы с учетом квадратичных потерь мощности в сети**

Для сокращения количества неизвестных при реализации модели следует учитывать только такие связи, по которым можно осуществлять реальные потоки мощности. То есть необходимо исключить из состава переменных связи, для которых  $\bar{z}_{ij} = 0$ . Более того, потоки в обоих направлениях между узлами  $i$  и  $j$  можно задавать с помощью не двух, как ранее, а одной переменной. Пусть  $l = 1, \dots, m$  – номера дуг в направленном графе, описывающем ЭЭС,  $m$  – общее количество дуг. Обозна-



чим через  $t_{il}$  элементы матрицы (размера  $n \times m$ ) инциденций узлов и дуг графа,

$$t_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если узел } i \text{ является началом связи } l, \\ 1, & \text{если узел } i \text{ является концом связи } l, \\ 0, & \text{если узел } i \text{ не прилегает к связи } l. \end{cases}$$

Затем, в отличие от ранее использовавшегося обозначения, через  $z_l$  обозначим переменную, соответствующую объему потока мощности по связи  $l$ .

Ограничения (5), (6) примут следующий вид

$$(20) \quad \underline{z}_l \leq z_l \leq \bar{z}_l, \quad l=1, \dots, m,$$

$$(21) \quad x_i - y_i + \sum_{l=1}^m t_{il} z_l - \sum_{l=1}^m \tilde{\alpha}_{il}(z_l)(z_l)^2 \geq 0, \quad i=1, \dots, n.$$

Функции  $\tilde{\alpha}_{il}(z_l)$  определяются следующим образом

$$\tilde{\alpha}_{il}(z_l) = \begin{cases} \alpha_l, & \text{если } t_{il} z_l > 0, \\ 0, & \text{если } t_{il} z_l \leq 0, \end{cases}$$

$i = 1, \dots, n, \quad l = 1, \dots, m$ . Величина  $\underline{z}_l = -\bar{z}_l$  для всех  $l$ .

При нахождении минимального суммарного дефицита мощности возможна ситуация, когда в результате решения задачи (1), (3), (4), (20), (21) получено отрицательное значение потока мощности между узлами, т. е.  $z_l < 0$ . Это означает, что поток мощности по  $l$ -ой связи направлен в обратную, относительно заданного направления, сторону.

Некоторые узлы  $i$  могут не обладать генерирующими мощностями ( $\bar{x}_i = 0$ ). Обозначим через  $L$  множество номеров узлов с нулевой располагаемой мощностью. Далее рассматривается только случай, когда во всех узлах  $\bar{y}_i > 0$  и у всех связей  $\bar{z}_l > 0, \underline{z}_l < 0$ .

Для решения задачи (1), (3), (4), (20), (21) используется алгоритм метода внутренних точек, основывающийся на методе линеаризации [1]. На каждой итерации  $k = 1, 2, \dots$  в точке линеаризации  $x^k, y^k, z^k$  нелинейные ограничения-равенства заменяются на их линейную аппроксимацию. Для уменьшения по-

грешностей линеаризации при решении нелинейных задач оптимизации можно учитывать квадратичные составляющие разложения функций-ограничений в ряд Тейлора. А именно, можно при поиске направления улучшения решения включать в целевую функцию вспомогательной задачи квадратичные составляющие аппроксимаций функций-ограничений исходной задачи с весами, равными оценкам множителей Лагранжа этих ограничений. Такие идеи высказывались ранее применительно к разным алгоритмам оптимизации, в частности, Б.Н. Пшеничным для разрабатываемого им метода линеаризации [8]. Проведенные ранее экспериментальные исследования для задач с нелинейными ограничениями [7] показали, что метод внутренних точек, использующий квадратичные аппроксимации, работает быстрее, чем метод внутренних точек, базирующийся только на линеаризации.

Вычислительный процесс метода внутренних точек осуществляется таким образом, что на всех итерациях ограничения-неравенства выполняются в строгой форме. Выбор такой стартовой точки произведем следующим образом. Для номеров  $i \in L$  введем фиктивную переменную  $x_i > 0$ . Задача нахождения минимального суммарного дефицита мощности примет вид:

$$(22) \sum_{i=1}^m (\bar{y}_i - y_i) + N \sum_{i \in L} x_i \rightarrow \min_{y, x},$$

при

$$(23) x_i - y_i + \sum_{l=1}^m t_{il} z_l - \sum_{l=1}^m \tilde{\alpha}_{il}(z_l)(z_l)^2 \geq 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$(24) 0 \leq y_i \leq \bar{y}_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$(25) 0 \leq x_i \leq \bar{x}_i, \quad i \notin L,$$

$$(26) x_i \geq 0, \quad i \in L,$$

$$(27) \underline{z}_l \leq z_l \leq \bar{z}_l, \quad l = 1, \dots, m.$$

Здесь  $N$  – число, большее единицы, чем обеспечивается приоритет минимизации фиктивной переменной  $x_i$ ,  $i \in L$  по

отношению к минимизации суммарного дефицита. В расчетах использовалось  $N = 2$ .

Будем считать, что изначально потоков мощности в сети нет, т. е.  $z_l^0 = 0$ ,  $l = 1, \dots, m$ . Для всех узлов  $i$  в качестве стартовых значений переменных  $x_i, y_i$  возьмем такие  $x_i^0, y_i^0$ , удовлетворяющие ограничениям (24)–(26), чтобы  $x_i^0$  было больше  $y_i^0$ . Таким образом, на первой итерации неравенства (23) также будут выполняться в строгой форме.

#### **4. Алгоритм метода внутренних точек, использующего квадратичные аппроксимации**

Представим описание алгоритма внутренних точек, использующего квадратичные аппроксимации, для задачи минимизации линейной функции при выпуклых квадратичных ограничениях

$$(28) \quad c^T x \rightarrow \min,$$

$$(29) \quad x^T A_i x + d_i^T x \leq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$(30) \quad \underline{x} \leq x \leq \bar{x}.$$

Переменные  $x$  образуют вектор из  $R^n$ . Заданными являются матрицы  $A_i$  размера  $n \times n$ ,  $i = 1, \dots, m$ , векторы  $c \in R^n$ ,  $d \in R^n$ ,  $\bar{x} \in R^n$ ,  $\underline{x} \in R^n$ . Предполагается, что матрицы  $A_i$  симметрические неотрицательно-определенные, что обуславливает выпуклость функций  $x^T A_i x + d_i^T x$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Задача (28)–(30) содержит частный случай исследуемой нами задачи (22)–(27). При этом задача (28)–(30) более удобна для краткого описания алгоритма внутренних точек.

Предполагаем известным начальное приближение  $x^0 \in R^n$ , удовлетворяющее условиям (29), (30) в строгой форме

$$(x^0)^T A_i x^0 + d_i^T x^0 < 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\underline{x} < x^0 < \bar{x}.$$

На итерации  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , сначала вычисляется направление корректировки  $\Delta x^k \in R^n$ , являющееся решением следующей задачи:

$$(31) \quad c^T \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T D_1^k \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T D_2^k \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T D_3^k \Delta x \rightarrow \min,$$

где

$$D_1^k = \text{diag} \left( \min \{ \bar{x}_j - x_j^k, x_j^k - \underline{x}_j \} \right)^{-2},$$

$$D_2^k = \sum_{i=1}^m v_i^{k-1} A_i,$$

$$D_3^k = \sum_{i=1}^m \frac{(A_i x^k + d)(A_i x^k + d)^T}{((x^k)^T A_i x^k + d^T x^k)^2},$$

$$v_i^{k-1} = \max \{ 0, u_i^{k-1} \},$$

$u_i^{k-1}$  - оценки множителей Лагранжа ограничений (29), вычисленные на  $(k-1)$ -ой итерации. При  $k=1$  положим  $v_i^0 = 1$ ,

$i = 1, \dots, m$ . Слагаемые  $\frac{1}{2} \Delta x^T D_1^k \Delta x$ ,  $\frac{1}{2} \Delta x^T D_3^k \Delta x$ , добавляемые

в целевую функцию вспомогательной задачи, можно интерпретировать как штрафы за приближение к границам допустимой

области. Матрица  $D_2^k = \sum_{i=1}^m v_i^{k-1} A_i$  представляет собой сумму

квадратичных составляющих функций-ограничений с весами, равными приближениям к множителям Лагранжа этих ограничений. В методе внутренних точек, базирующемся на линеаризации, вместо матрицы  $D_2^k$  используется единичная матрица того же размера.

Вспомогательная задача (31) сводится к решению системы линейных уравнений с симметрической положительно-определенной матрицей:

$$(D_1^k + D_2^k + D_3^k) \Delta x = -c.$$

Для решения этой системы можно воспользоваться методом квадратного корня.

После нахождения направления корректировки вычисляется шаг корректировки по следующему правилу:

$$(32) \lambda_k = \gamma \min \{ \lambda_k^1, \lambda_k^2 \} \text{ при заданном } \gamma \in (0, 1),$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_k^1 &= \max \left\{ \lambda : (x^k + \lambda \Delta x^k)^T A_i (x^k + \lambda \Delta x^k) + \right. \\ &\quad \left. + d^T (x^k + \lambda \Delta x^k) \leq 0, i = 1, \dots, m \right\}, \\ \lambda_k^2 &= \max \left\{ \lambda : \underline{x} \leq x^k + \lambda \Delta x^k \leq \bar{x} \right\}. \end{aligned}$$

Итеративный переход осуществляется по формуле

$$(33) x^{k+1} = x^k + \lambda_k \Delta x^k \text{ для всех } k = 1, 2, \dots$$

Основываясь на необходимых и достаточных условиях оптимальности Куна–Таккера, в качестве критерия останова можно использовать выполнение следующих неравенств:

$$(34) \left\| c + \sum_i^m v_i^k (A_i x^k + d) + \eta^k - \zeta^k \right\| \leq \varepsilon_1,$$

$$v_i^k (-x^k)^T A_i x^k - d^T x^k \leq \varepsilon_2, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$(35) \eta_j^k (\bar{x}_j^k - x_j^k) \leq \varepsilon_2,$$

$$\zeta_j^k (x_j^k - \underline{x}_j^k) \leq \varepsilon_2, \quad j = 1, \dots, n,$$

при заданных малых положительных числах  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ . Здесь  $\eta^k, \zeta^k \in R^n$  – векторы приближений к множителям Лагранжа ограничений (30).

Оценки множителей Лагранжа ограничений (29), (30) находятся по формулам

$$u_i^k = \frac{(A_i x^k + d)^T \Delta x^k}{((x^k)^T A_i x^k + d^T x^k)^2}, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\eta_j^k = \max \left\{ 0, \frac{\Delta x_j^k}{(x_j^k - \bar{x}_j^k)^2} \right\},$$

$$\zeta_j^k = \max \left\{ 0, \frac{-\Delta x_j^k}{(\underline{x}_j^k - x_j^k)^2} \right\}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Для вырабатываемых алгоритмом приближений к оптимальному решению ограничения (29), (30) на каждой итерации выполняются в строгой форме

$$(x^k)^T A_i x^k + d_i^T x^k < 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\underline{x} < x^k < \bar{x}.$$

Это следует из допустимости стартовой точки и правил вычисления шага.

Если вектор  $x^k$  не удовлетворяет условиям (34), (35), то из выполнения неравенства

$$-c^T \Delta x^k > 0$$

и правил определения шага корректировки (32) следует, что значение целевой функции уменьшится:

$$c^T x^{k+1} < c^T x^k.$$

Если неравенства (34), (35) в точке  $x^k$  выполняются, то вычислительный процесс останавливается.

## 5. Результаты экспериментальных расчетов

Экспериментальные исследования проводились на серии из 50 режимов, сформированных при помощи датчика случайных чисел, для схемы ЭЭС [4], представленной на рис. 1.

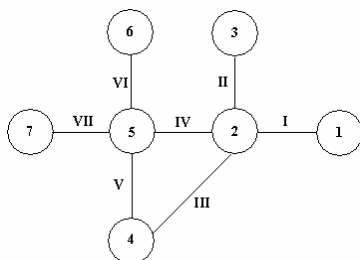


Рис. 1. Тестовая расчетная схема ЭЭС

В таблице 1 и таблице 2 приведены основные характеристики узлов и связей одного из тестовых режимов.

Таблица 1. Характеристика узлов расчетного режима тестовой схемы ЭЭС

Номер узла, $i$	Располагаемая мощность $\bar{x}_i$ , МВт	Максимальная нагрузка $\bar{y}_i$ , МВт	Баланс в $i$ узле $\bar{x}_i - \bar{y}_i$ , МВт
1	2458	2734	-276
2	1600	1760	-160
3	383	528	-145
4	1350	170	1180
5	409	1647	-1238
6	921	514	407
7	0	200	-200
Итого	7121	7553	-432

Таблица 2. Характеристика связей расчетного режима тестовой схемы ЭЭС

Номер связи, $j$	Максимально возможные потоки по связи $j$ , МВт		Коэффициент потерь мощности в связи, $\alpha_j$
	$\bar{z}_j$	$\bar{z}_j$	
I	-360	360	0,000078
II	-150	150	0,000050
III	-200	200	0,000046
IV	-800	800	0,000017
V	-1200	1200	0,000009
VI	-300	300	0,000008
VII	-150	150	0,000009

Тестовая схема по заданным режимам рассчитывалась двумя алгоритмами: методом внутренних точек, использующим квадратичные аппроксимации, и методом внутренних точек, базирующимся на линеаризации. В таблице 3 и таблице 4 указано минимальное, максимальное и среднее число итераций,

потребовавшееся для решения всех тестовых задач при заданных  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ . В условиях (34), (35) использовались разные  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ .

Таблица 3. Результаты расчетов тестовой схемы ЭЭС по заданным режимам

Метод	Точность	Число итераций		
		Минимальное	Максимальное	Среднее
Метод внутренних точек, использующий квадратичные аппроксимации	$\varepsilon_1 = 0,05,$ $\varepsilon_2 = 0,05$	14	49	19,62
Метод внутренних точек, базирующийся на линеаризации	$\varepsilon_1 = 0,05,$ $\varepsilon_2 = 0,05$	14	83	24,22

Таблица 4. Результаты расчетов тестовой схемы ЭЭС по заданным режимам

Метод	Точность	Число итераций		
		Минимальное	Максимальное	Среднее
Метод внутренних точек, использующий квадратичные аппроксимации	$\varepsilon_1 = 0,01,$ $\varepsilon_2 = 0,01$	16	74	23,20
Метод внутренних точек, базирующийся на линеаризации	$\varepsilon_1 = 0,01,$ $\varepsilon_2 = 0,01$	16	147	40,22



Результаты расчета показали, что методом внутренних точек, использующим квадратичные аппроксимации, решение получается в среднем за 1,2–2 раза меньшее количество итераций, чем методом, базирующимся на линеаризации. Причем с уменьшением значений  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  различие в скорости вычислений увеличилось. Сопоставление работы двух алгоритмов по количеству итераций справедливо, поскольку на каждой итерации в сравниваемых методах требуется примерно один и тот же объем вычислений и основные затраты времени связаны с необходимостью решать систему с симметрической положительно определенной матрицей.

## **6. Заключение**

1. Для модели оценки дефицита мощности ЭЭС с квадратичными потерями мощности в ЛЭП предложен способ представления модели в виде задачи выпуклого программирования путем замены балансовых ограничений-равенств на ограничения, записанные в форме неравенств.

2. Доказано, что дефицит мощности в данной модели однозначно распределяется по узлам электроэнергетической системы.

3. Результаты экспериментальных исследований подтвердили работоспособность метода внутренних точек, использующего квадратичные аппроксимации, и показали пригодность для решения задачи нахождения минимального суммарного дефицита мощности с учетом ее квадратичных потерь в сетях. Значимость применения данного алгоритма для решения задачи (1), (3), (4), (13), (14) состоит в том, что благодаря учету активных ограничений задачи и эффективной минимизации погрешностей линеаризации увеличивается скорость работы алгоритма, по сравнению с исходным методом, основанном на линеаризации.

4. Для решения задачи поиска минимального суммарного дефицита мощности требуется найти значения  $2n + m$  перемен-

ных, где  $m$  – число связей;  $n$  – количество узлов. В предлагаемом методе на каждой итерации решается система линейных уравнений с симметрической положительно определенной матрицей размера  $m \times m$ . Тем самым находятся значения  $m$  переменных, через которые выражаются остальные. Такой подход позволяет сократить время вычислений.

### Литература

1. ДИКИН И.И., ЗОРКАЛЬЦЕВ В.И. *Итеративное решение задач для математического программирования (алгоритмы метода внутренних точек)*. – Новосибирск: Наука, 1980. – 143 с.
2. ЗОРКАЛЬЦЕВ В.И., КОВАЛЕВ Г.Ф., ЛЕБЕДЕВА Л.М. *Модели оценки дефицита мощности электроэнергетических систем* – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2000. – 25 с.
3. ЗОРКАЛЬЦЕВ В.И., ЛЕБЕДЕВА Л.М., ПЕРЖАБИНСКИЙ С.М. *Модель оценки дефицита мощности электроэнергетической системы с учетом квадратичных потерь мощности в линиях электропередач* // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. – Новосибирск, 2010. – Т. 13, № 3. – С. 285 – 295.
4. КОВАЛЕВ Г.Ф., ЛЕБЕДЕВА Л.М. *Комплекс моделей оптимизации режимов расчетных состояний при оценке надежности электроэнергетических систем* – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2000. – 73 с.
5. КОВАЛЕВ Г.Ф., ЛЕБЕДЕВА Л.М. *Модель оценки надежности электроэнергетических систем при долгосрочном планировании их работы* // Электричество. - 2000. - №11. - С. 17 – 24.
6. РУДЕНКО Ю.Н., ЧЕЛЬЦОВ М.Б. *Надежность и резервирование в электроэнергетических системах*. – Новосибирск: Наука, 1974. – 263 с.
7. ПЕРЖАБИНСКИЙ С.М. *Алгоритм внутренних точек, использующий квадратичные аппроксимации* // Современ-

ные технологии. Системный анализ. Моделирование / Иркутский государственный университет путей сообщения – 2008 – №3(19) – С. 97 – 101.

8. ПШЕНИЧНЫЙ Б.Н. *Метод линеаризации*. – Москва: Наука, 1983. – 135 с.

## **MODEL OF POWER SHORTAGE OPTIMIZATION IN ELECTRIC POWER SYSTEM**

**Valery Zorkaltsev**, Melentiev Energy System Institute of SB RAS, Irkutsk, Doctor of Science, professor (*Irkutsk, Lermontov st., 130, (3952) 42-78-50*).

**Sergey Perzhabinsky**, Melentiev Energy System Institute of SB RAS, Irkutsk, engineer (*sergey\_per85@mail.ru*).

*Abstract: The model of minimization of power shortage in the electrical power system is considered. The model takes into account nonlinear power loss in power lines, and is intended for analysis of reliability problems in electric power systems. The model is reduced to the convex optimization problem. Interior point algorithm using quadratic approximations of constraints is suggested for model implementation. Comparative results of numerical calculations are presented.*

Keywords: electric power system, reliability, power shortage, interior point method, quadratic approximation.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии М. В. Губко*