УДК 681.5
ББК 32.817

ЛИНЕЙНЫЕ АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ ОБЪЕКТОВ В МНОГОАГЕНТНОЙ СИСТЕМЕ[1]

Петрикевич Я. И.[2],
(*Учреждение Российской академии наук Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва*)

В статье предложены простейшие линейные локальные алгоритмы непрерывного перемещения агентов для их равномерного расположения на прямой или окружности. При этом используются следующие предположения: 1) общее число агентов, участвующих в построении, неизвестно; 2) перемещение каждого агента определяется его собственным положением и положением двух его ближайших (по номерам) соседей, при этом правила перемещения одинаковы для всех внутренних агентов; 3) один или оба крайних агента могут быть как закрепленными, так и свободно движущимися. При данных условиях доказана устойчивость рассматриваемых систем и глобальная сходимость к целевым положениям.

Ключевые слова: многоагентные системы, управление формациями, линейные системы.

Введение

Задачи о расположении точек (агентов, клеток и т.д.) вдоль заданной кривой известны также как задачи формообразования, управление формациями (*formation control*) и имеют достаточно много практических приложений: мобильные роботы,

---

[1] *Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований* (*проект* №08-08-00371-а)

[2] *Петрикевич Яна Игоревна, кандидат технических наук* (*petriana@mail.ru*).

спасательно-разыскные и военные операции, транспортные сети, социальные и биологические системы.

Как правило, рассматривается распределённая система, состоящая из множества агентов и ориентированная на развитие группового действия при решении различных задач в условиях неопределенности. При этом в системе может выделяться «центр», или «лидер», связанный с каждым элементом системы и координирующий достижение цели агентами, – центральное управление, либо такого центра нет, все элементы системы равноценны, и каждый агент для достижения своей подцели использует лишь доступную ему информацию о системе – распределенное управление. При этом агенты могут взаимодействовать друг с другом и обмениваться информацией – управление с обменом информацией, либо такого обмена нет – автономное управление [8].

Одними из первых отечественных работ по разработке алгоритмов группового движения агентов с целью их размещения вдоль заданной траектории были статьи [3, 4]. В них рассматривались задачи формообразования (спрямления и окруживания) применительно к эмбриологии. Были исследованы локальные правила перемещения конечного заданного набора точек (клеток) для получения желаемой формы. Основные предположения были следующими: 1) «процессы формообразования происходят за счет того, что каждая клетка обладает способностью двигаться в определенном направлении в зависимости от положения небольшого числа своих соседей» (т. е. существует обмен информацией между клетками); 2) правила движения для всех клеток данной группы должны быть одинаковы (т. е. вырабатываются однородные правила перемещения). Были получены сложные правила перемещения, в ряде которых присутствует явная зависимость от общего числа точек, участвующих в формообразовании (см., например, задачу окруживания [4]), а также используется коррекция правила перемещения каждой точки в зависимости от расстояния между ней и её соседями и их взаимного расположения на плоскости (как в задаче спрямления [3]). Существенным требованием было также достижение заданного расстояния между соседними точками.

В [6] рассматривается похожая задача: задается случайный полигон и предлагается дискретный алгоритм перемещения вершин полигона так, что они выстраиваются вдоль эллипса. Каждой вершине в каждый момент времени доступна информация о координатах одной соседней вершины (т. е. рассматривается распределённая система с обменом информацией). Перемещение точек описывается линейным законом, однако затем используется нелинейная операция нормирования, и таким образом на этом шаге должна использоваться полная информация о системе: о координатах всех вершин полигона, а не только ближайших для каждой вершины соседей. Для такого алгоритма показана глобальная сходимость к эллипсу определённого вида.

В работах [1, 7] рассматриваются более сложные многоагентные системы. Так, в [7] множество агентов в трехмерном пространстве составляет единую динамическую систему (многосвязную систему) и с однотипными локальными регуляторами. Решается задача о формировании агентами некоторой геометрической структуры для окружения цели. При этом каждый объект владеет информацией о своих координатах и о положении цели, а для решения задачи используется схема циклического преследования. В [1] исследуется формация в виде плоской цепочки объектов, движущихся друг за другом. В цепочке имеется лидер, который может совершать некоторые ограниченные маневры. Каждый из ведомых объектов должен управлять своим движением (вектором скорости) так, чтобы сохранялась дистанция до предыдущего объекта и направление движение на него. Объекты описываются набором динамических характеристик, а управление строится в виде стабилизирующего ПД-регулятора в обратной связи. Таким образом в работе [1] реализуется принцип «движение за лидером».

В настоящей работе мы будем рассматривать системы с распределённым управлением и с обменом информацией между агентами (в данном случае – точками). При этом под управлением будем понимать алгоритм движения агентов в виде указания правила перемещения (стратегии) для каждого агента. Для выработки правил будем использовать следующие предположения: 1) общее количество точек, участвующих в построении, неизвестно; 2) движение каждой точки зависит только от положения её самой и двух её соседей – предыдущего и следующего по номерам, и эта зависимость одна и та же для всех внутренних вершин; 3) одна или обе концевые вершины могут быть как закрепленными, так и подвижными. Таким образом, используется минимум информации. Будем далее рассматривать случай непрерывного движения.

1. Расположение точек на прямой

Общая задача формулируется следующим образом: дано n точек с фиксированными номерами $1, \ldots, n$, произвольно расположенных в пространстве $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$, с координатами $x_1, \ldots, x_n$. Каждой точке x_i доступна информация о координатах двух соседних (по номерам) точек x_{i-1}, x_{i+1}, $i = 1, \ldots, n$. Все точки двигаются по своим собственным траекториям.

Так как самим точкам неизвестно их общее количество n, то при перемещениях нельзя явно учитывать эту величину.

Задача: синтезировать алгоритм движения такой, чтобы данные точки расположились на одной прямой в правильном порядке (по номерам) и на равном расстоянии друг от друга.

Относительно расположения целевой прямой никаких требований не выдвигается, как и относительно величины финального расстояния между ними.

1.1. ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ ($m = 1$)

В самых простых случаях возможно применение линейных алгоритмов перемещения точек.

Рассмотрим одномерный случай, когда исходные точки уже лежат на прямой, но в произвольном порядке и на произвольном расстоянии с соседями.

Случай 1. Пусть концевые точки x_1 и x_n неподвижны. Предлагается использовать следующий алгоритм: каждая внутренняя точка стремится занять среднее положение между двумя своими соседями. При этом траектории перемещения ищутся как решение линейной системы ОДУ

$$
\begin{aligned}
x_1 &\equiv x_1(0), \\
\dot{x}_i &= \frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{2} - x_i, \quad i = 2, \ldots, n-1, \\
x_n &\equiv x_n(0).
\end{aligned} \tag{1}
$$

Обозначим $x = (x_2, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-2}$, тогда в матричном представлении

$$\dot{x} = Ax + b, \tag{2}$$

где

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 0 & \ldots & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}, \\
b &= (x_1(0)/2, 0, \ldots, 0, x_n(0)/2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n-2}.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Теорема 1. *Система (2) устойчива и существует стационарное положение точек: $x_i(t) \to x_1(0) + \frac{i-1}{n-1}(x_n(0) - x_1(0))$ при $t \to \infty$, $i = 2, \ldots, n-1$, т. е. все «внутренние» точки из любого начального положения стремятся выстроиться на отрезке с фиксированными концами x_1 и x_n на равном расстоянии друг от друга.*

Доказательство. Собственные значения матрицы A (3), согласно [2], вещественны, различны и равны $\lambda_k = -2\sin^2 \frac{k\pi}{2(n-1)}$, $k = 1, \ldots, n-2$, т. е. A отрицательно определена при любых n, следовательно, система (2) устойчива и, кроме того, существует A^{-1}. Положим $x^* = -A^{-1}b$ и в (2) сделаем замену переменной $z = x - x^*$; в результате получим устойчивую однородную систему $\dot{z} = Az$ с той же матрицей A. Так как $z \to 0$ при $t \to \infty$, то $x_i \to x_i^* = x_1(0) + \frac{i-1}{n-1}(x_n(0) - x_1(0))$ при $t \to \infty$, где компоненты вектора x^* найдены в явном виде как решение системы $Ax^* = -b$, $i = 2, \ldots, n-1$.

Оценим скорость сходимости. Обозначим $\hat{\lambda} = \max_k Re\lambda_k$. Так как $0 < \frac{k\pi}{2(n-1)} < \frac{\pi}{2}$ при любых n и $k = 1, \ldots, n-2$, то в силу монотонности функции $f(y) = -\sin^2(y)$ на этом интервале $\hat{\lambda} = \lambda_1 = -2\sin^2\frac{\pi}{2(n-1)}$. Для системы $\dot{z} = Az$ верна оценка $\|z(t)\| \leqslant e^{\hat{\lambda}t}\|z(0)\|$, откуда с учётом замены $\|x(t) - x^*\| \leqslant e^{\hat{\lambda}t}\|x(0) - x^*\|$. При больших n получим оценку скорости сходимости: $\hat{\lambda} \approx -\frac{\pi^2}{2n^2}$.

Пример 1. Начальное положение восьми точек задается координатами $x_0 = [-1{,}1; 0{,}2; -4{,}8; 4{,}109; 9{,}5; 8{,}84; -3{,}7; 5{,}62]$. Траектории точек $x_i(t)$, найденные в результате решения системы (1), отображены на рис. 1. Пунктирами обозначены неподвижные концевые точки.

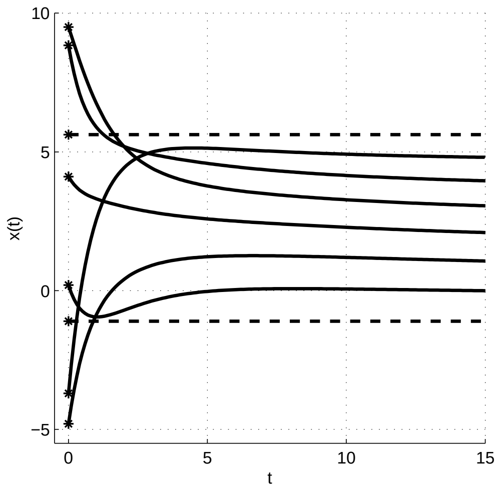

Рис. 1. Начальное положение и траектории точек из примера 1

Согласно оценке $\|x(t) - x^*\| \leqslant e^{\hat{\lambda}t}\|x(0) - x^*\|$, в момент времени $t = 50$ гарантированная точность равна $\varepsilon = 0{,}0947$, что соответствует результатам моделирования: $\|x(50)-x^*\| = 0{,}0189$. К указанному моменту времени точки уже достигли требуемого расположения и расстояния $d_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, получающиеся между ними в этот в момент времени, равны

$$d = [0{,}9644; 0{,}9634; 0{,}9622; 0{,}9597; 0{,}9583; 0{,}9563; 0{,}9557],$$

и далее с течением времени точки устанавливаются в окрестности равноудаленных позиций. •

Замечание 1. Все расчеты в настоящей статье производились в системе MATLAB 7 с использованием функции решения ДУ `ode45`.

Рассмотрим чуть более усложненную постановку задачи.

Случай 2. Пусть концевая точка x_n свободна и целью является привести ее в положение $x_n = x_1 + R$, $R = const$, а остальные точки выстроить на отрезке $[x_1, x_n]$ на равном расстоянии друг от друга.

В общем случае, когда x_1 тоже не закреплена, система имеет вид

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi(t), \\ \dot{x}_i &= \frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{2} - x_i, \quad i = 2, \ldots, n-1, \\ \dot{x}_n &= x_1 + R - x_n, \end{aligned} \tag{4}$$

где функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема по t. В частном случае, когда конец $x_1 = \varphi(t) = const$, в матричном виде получаем систему вида

$$\dot{x} = Ax + b, \tag{5}$$

в которой $x = (x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$,

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 0 & \ldots & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}, \\ b &= (x_1(0)/2, 0, \ldots, 0, x_1(0) + R)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n-1}. \end{aligned} \tag{6}$$

Теорема 2. *Система (5) устойчива и* $x_i(t) \to x_1(0) + \frac{(i-1)}{n-1}R$ *при* $t \to \infty$, $i = 2, \ldots, n$, *т. е. все «внутренние» точки стремятся выстроиться вдоль отрезка* $[x_1, x_1 + R]$ *на равном расстоянии друг от друга.*

Доказательство. Для доказательства отрицательной определенности матрицы A (6) используем теорему Лапласа о разложении определителя [2, 5] и результаты теоремы 1. Так, разложив определитель $d = \det(A - \lambda E)$ (E – единичная матрица в $\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$) на сумму элементов последней строки, умноженных на их алгебраические дополнения, получаем $d = (-1 - \lambda)det(\tilde{A} - \lambda E)$. Здесь матрица $\tilde{A}$ полностью совпадает с матрицей (3), для которой ранее была доказана устойчивость (см. теорему 1), а дополнительное собственное значение $\lambda = -1$. Следовательно, система (5) устойчива. Значения $x^* : x_i(t) \to x_i^*$, $i = 2, \ldots, n - 1$, находятся как решение системы уравнений $Ax^* = -b$ и выписываются в явном виде: $x_i^* = x_1(0) + \frac{(i-1)}{n-1}R$. Так как набор собственных значений матрицы (6) отличается от множества собственных значений матрицы (3) лишь одним значением $\lambda = -1 \neq \max_k Re\lambda_k$, то при больших n для рассматриваемой системы верна оценка скорости сходимости, полученная в теореме 1: $\hat{\lambda} \approx -\frac{\pi^2}{2n^2}$.

Пример 2. Начальное положение десяти точек задается вектором $x_0 = [3{,}8; 1{,}55; -1{,}47; 2{,}82; -3{,}37; 0{,}15; -2{,}52; -4{,}75; 3{,}8; -0{,}5]$. Рассмотрим для примера более общую ситуацию, когда движение первой точки задано в виде $\dot{x}_1 = -x_1 - x_2/2 - 2{,}5$, $R = 7{,}85$. Матрица системы здесь будет иметь вид

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 0 & \ldots & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \\
b &= (-2{,}5; 0; \ldots, 0; 7{,}85)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n,
\end{aligned}
$$

все её собственные значения отрицательны, т. е. система устойчива.

Траектории точек $x_i(t)$ отображены на рис. 2.

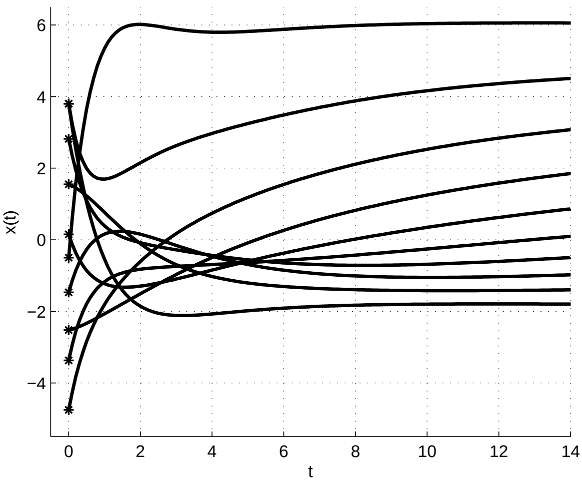

Рис. 2. Начальное положение и траектории точек из примера 2

При $t = 50$ точки уже достигли желаемого взаимного расположения и $\|x(50) - x^*\| = 0{,}2467$, что соответствует теоретическим оценкам. В этот в момент времени получаем следующие расстояния между точками: $d = [0{,}8268; 0{,}8310; 0{,}8410; 0{,}8556; 0{,}8723; 0{,}8894; 0{,}9037; 0{,}9137; 0{,}9177]$ и они продолжают выравниваться с течением времени, а дистанция R между концевыми точками к этому моменту равна $R = 7{,}8512$. •

1.2. ДВУМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ ($m = 2$)

Если концы отрезка закреплены, то для n точек получаем систему размерности $2n$, аналогичную (1), – в ней отдельно находятся значения первой и второй координаты каждой точки, которые мы стандартно обозначим x и y, в каждый момент времени:

$$
\begin{aligned}
x_1 &\equiv x_1(0), \qquad x_n \equiv x_n(0),\\
\dot{x}_i &= \frac{x_{i-1}+x_{i+1}}{2} - x_i, \quad i = 2,\dots,n-1,\\
y_1 &\equiv y_1(0), \qquad y_n \equiv y_n(0),\\
\dot{y}_i &= \frac{y_{i-1}+y_{i+1}}{2} - y_i, \quad i = 2,\dots,n-1.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Матрица системы в этом случае выглядит следующим образом:

$$
(8) A = \begin{pmatrix}
-1 & 1/2 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0\\
1/2 & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & \dots & \dots & -1 & 0 & \dots & \dots & 0\\
0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 1/2 & \dots & 0\\
0 & \dots & \dots & 0 & 1/2 & -1 & \dots & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & -1
\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2(n-2)\times 2(n-2)},
$$

$$
b = (x_1/2, 0, \dots, 0, x_n/2, y_1/2, 0, \dots, 0, y_n/2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{2(n-2)}.
$$

Теорема 3. *Система с матрицей (8) устойчива и* $(x_k(t), y_k(t)) \to \left(x_1 + \frac{k}{n-1}(x_n - x_1), y_1 + \frac{k}{n-1}(y_n - y_1)\right)$ *при* $t \to \infty$*,* $k = 1,\dots,n-2$.

Доказательство. Матрица данной системы является блочной вида $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, где $A_1 = A_2$ – устойчивые и совпадают с матрицей (3). Таким образом, для каждой из этих подсистем выполняются условия теоремы 1, что обеспечивает сходимость каждой из координат i-го агента к желаемой позиции со скоростью, оценка которой получена в теореме 1.

По аналогии с теоремой 3 легко обобщить случай, когда оба конца отрезка закреплены, на m-мерное пространство – доказать устойчивость системы и сходимость к равноудаленным на отрезке положениям.

Пример 3. Зададим начальные координаты восьми точек: $x_0 = [3{,}1410; 28{,}5591; 26{,}2366; 10{,}6667; 34{,}1505; 21{,}1505; 11{,}0968; 31{,}8710]$, $y_0 = [26{,}9677; 6{,}8387; 37{,}6344; 6{,}4946; 17{,}2473; 15{,}4516; 21{,}6344; 30{,}7519.]$ Решение системы типа (7) показано в фазовом пространстве на рис. 3; получены следующие расстояния между точками на отрезке (при $t \approx 500$, когда точки остаются в малых окрестностях целевых равноудалённых позиций): $d = [4{,}1374; 4{,}1463; 4{,}1303; 4{,}1503; 4{,}1303; 4{,}1463; 4{,}1374]$. •

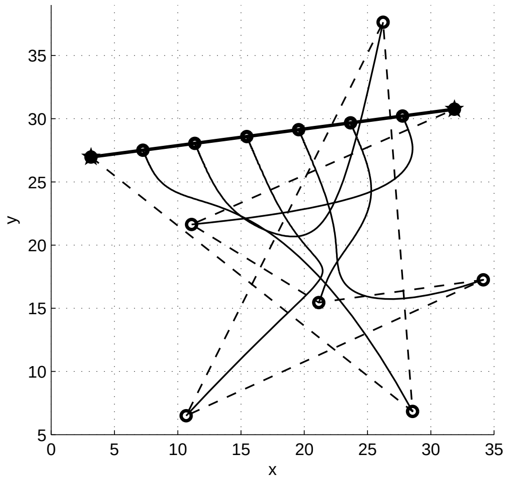

Рис. 3. Начальное положение, траектории и конечное положение точек из примера 3

2. Расположение точек на окружности

ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ ($m = 2$)

Использование полярных координат позволяет применять простые линейные алгоритмы для расположения точек вдоль окружности. При этом также возможны различные постановки задачи. Общая задача состоит в следующем.

Дано $n \geqslant 2$ точек с полярными координатами (θ_i, ρ_i). Считаем начало координат фиксированным центром желаемой окружности (этого всегда можно достичь путем параллельного сдвига). Пусть в этой точке располагается некий «информационный центр» который имеет возможность измерять координаты (θ_i, ρ_i) каждого из агентов и передавать эти данные участникам движения так, что каждой точке доступна информация о координатах двух соседних (предыдущей и следующей по номерам) точек. Далее считаем, что углы измеряются в пределах от 0 до 2π и возрастают по направлению против часовой стрелки (правильный порядок следования точек).

Задача: синтезировать алгоритм движения такой, чтобы все точки расположились на одной окружности заданного радиуса R в правильном порядке на равном расстоянии друг от друга (или, что эквивалентно, через равные углы).

Здесь рассмотрим для примера простейший случай: для концевых точек фиксированы только углы, а радиусы могут меняться; углы и радиусы внутренних точек изменяются.

Зададим движение точек системой:

$$\begin{aligned} \theta_1 &\equiv \theta_1(0), \\ \dot{\theta}_i &= \frac{\theta_{i-1} + \theta_{i+1}}{2} - \theta_i, \quad i = 2, \ldots, n-1, \\ \theta_n &\equiv \theta_n(0), \\ \dot{\rho}_i &= -(\rho_i - R), \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{8}$$

Легко показать, что данная система также устойчива и точки из любого начального положения сходятся к позициям на окружности: $\theta_i(t) \to \theta_1(0) + \frac{i-1}{n-1}(\theta_n(0) - \theta_1(0))$, $\rho_i(t) \to R$ (доказательство аналогично теореме 1), и в результате все точки выстраиваются на заданном расстоянии R от центра и через равные углы друг от друга, а следовательно, на равном расстоянии друг от друга.

Пример 4. Координаты восьми начальных точек заданы векторами $x_0 = [-1{,}9571; 3{,}7802; -3{,}3512; 5{,}7105; -0{,}8847; 1{,}7426; 1{,}5818; -0{,}2949]$; $y_0 = [1{,}8499; -3{,}6729; -1{,}3137; -0{,}3485;$

$-3{,}7265; 2{,}9223; -3{,}8338; 2{,}4933]$. Радиус целевой окружности $R = 4{,}86$.

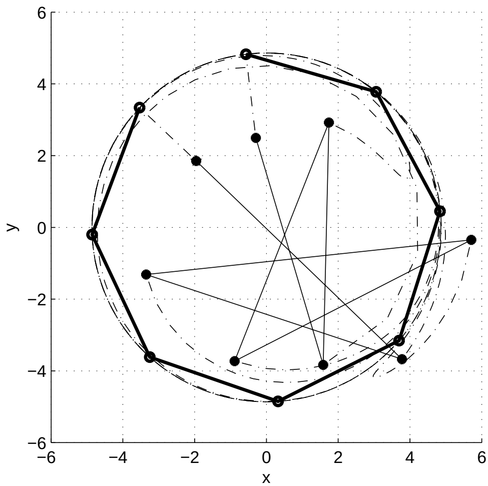

Рис. 4. Начальное положение, траектории и конечное положение точек из примера 4

При $t = 50$ получаем
$d(\theta) = [0{,}7752; 0{,}7783; 0{,}7894; 0{,}7964; 0{,}8102; 0{,}8159; 0{,}8220]$
или расстояния между точками
$d = [3{,}6737; 3{,}6879; 3{,}7374; 3{,}7692; 3{,}8307; 3{,}8561; 3{,}8834]$. •
Возможны также другие постановки задачи о расположении вдоль окружности: один или оба конца могут быть незакрепленными; может не существовать «центра», относительно которого задаются расстояния-радиусы (решение с помощью нелинейных алгоритмов) и т. д.

3. Заключение

Предложены эффективные локальные линейные правила перемещения точек для их выстраивания вдоль прямой и окружности. Основными преимуществами предлагаемых алгоритмов является их простота и гарантированная сходимость при любых начальных данных. Кроме того, они работают в условиях неопределенности, когда каждому из агентов неизвестно общее число точек, участвующих в построении, и доступна информация о координатах только его ближайших соседей.

Для каждого из представленных методов возможна дискретная модификация, а также обобщение на случай m-мерного пространства. В дальнейшем планируется рассмотрение систем, в которых перемещение будет зависеть не только от координат точки, но и от её скорости. Возможно рассмотрение систем с выделенным лидером, или центром, движущимся по заданной траектории. Кроме того, в настоящее время исследуются нелинейные алгоритмы перемещения агентов при различных постановках задач.

Литература

1. ВАСИЛЬЕВ С. Н., КОЗЛОВ Р. И., УЛЬЯНОВ С. А. *Анализ координатных и других преобразований моделей динамических систем методом редукции* // Труды Института математики и механики РАН. – 2009. – Т. 15, №3. – С 38–55.
2. ВОЕВОДИН В. В., КУЗНЕЦОВ Ю. А. *Матрицы и вычисления*. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
3. ЛЕОНТОВИЧ А.М., ПЯТЕЦКИЙ-ШАПИРО И.И., СТАВСКАЯ О.Н. *Некоторые математические задачи, связанные с формообразованием* // Автоматика и телемеханика. – 1970. – №4. – С. 94–107.
4. ЛЕОНТОВИЧ А.М., ПЯТЕЦКИЙ-ШАПИРО И.И., СТАВСКАЯ О.Н. *Задача окруживания в математической модели формообразования* // Автоматика и телемеханика. – 1971. – №2. – С. 100–110.
5. ХОРН Р., ДЖОНСОН Ч. *Матричный анализ*. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
6. ELMACHTOUB A.N., VAN LOAN C.F. *From Random Polygon to Ellipse: An Eigenanalysis* // SIAM Review. – 2010. – Vol. 52, №1. – P. 151–170.

7. HARA S., TAE-HYOUNG K. *Stabilization of Multi-agent Dynamical Systems for Cyclic Pursuit Behavior* // Proc. 47th IEEE Conf. CDC 2008, Cancun. – P. 4370–4375.
8. YANG QUAN CH., ZHONGMIN W. *Formation Control: A Review and A New Consideration* // Proc. IEEE Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems, 2005. – P. 3664–3669.

LINEAR ALGORITHMS FOR CONTROL OF GEOMETRICAL ALLOCATION OF AGENTS IN MULTI-AGENT SYSTEMS

Yana I. Petrikevich, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc. (petriana@mail.ru).

Abstract: Simple and effective linear local algorithms for agents movement and allocation on a line and on a circle are proposed. They are based on the following assumptions: 1) the total number of agents in the system is unknown; 2) the future position of each agent is defined by its own coordinates and coordinates of its closest neighbors; 3) one or both of end agents may be fixed or movable. Stability and convergence for developed systems are proven and a number of examples are given to demonstrate the work of the proposed algorithms.

Keywords: multi-agent systems, formation control, linear systems.

Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Б. Т. Поляком