УДК 021.8 + 025.1
ББК 78.34

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ХОТЕЛЛИНГА В БЕЗОПАСНЫХ СТРАТЕГИЯХ

Искаков М. Б.[1]
(*Учреждение Российской академии наук Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)
Искаков А. Б.[2]

Рассматривается игра цен и расположений в классической модели пространственной конкуренции Хотеллинга (1929) с линейными транспортными тарифами и эластичным спросом. Данная работа является продолжением предыдущей статьи [3], *в которой показано, что указанная задача поставлена корректно, если воспользоваться понятием равновесия в безопасных стратегиях (РБС). В статье приводится численное решение для общего случая несимметричного расположения игроков на отрезке. Полученный результат имеет интересные интерпретации и демонстрирует ряд экономических явлений и эффектов.*

Ключевые слова: теория игр, безопасные стратегии, задача Хотеллинга.

Введение

В 1929 году Гарольд Хотеллинг исследовал игру цен на рынке, где покупателей гораздо больше чем продавцов [5],[4]. Он предложил рассматривать рынок как пространство, в котором продавцы конкурируют за покупателей, выбирая свое расположение и устанавливая свои цены. Хотеллинг проиллюстрировал свой подход простейшей моделью конкуренции двух продавцов на отрезке с линейными транспортными тарифами. В своем примере, однако, Хотеллинг ограничил себя двумя упрощающими

[1] *Михаил Борисович Искаков, к.т.н.* (*mih_iskakov@mail.ru*).
[2] *Алексей Борисович Искаков, к.ф.-м.н.* (*isk_alex@mail.ru*).

предположениями. Во-первых, он исключил из рассмотрения ценовые войны с целью полного вытеснения конкурента с рынка. Во-вторых, он рассмотрел ситуацию полностью неэластичного спроса, когда количество покупаемого покупателем товара не зависит от цены.

Цель данной работы – найти равновесие игры цен и расположений в модели Хотеллинга с линейными транспортными тарифами без его двух упрощающих предположений. Чтобы учесть возможность демпингового вытеснения конкурента с рынка, используется понятие равновесия в безопасных стратегиях (РБС), предложеное М. Б. Искаковым (см. [1],[2]) как обобщение понятия равновесия Нэша. При таком подходе ценовое РБС существует при любых расположениях игроков на рынке и постановка задачи Хотеллинга становится корректной. Чтобы учесть эластичность спроса, предполагается, что покупатель покупает продукт только в том случае, если его цена с пересылкой не превышает некоторой величины.

В предыдущей статье [3] приводится аналитическое решение игры цен и расположений с линейными транспортными тарифами в классической модели Хотеллинга (1929) без его двух упрощающих предположений для случая игры на прямой и симметричного расположения игроков на отрезке.

Данная работа посвящена численному исследованию игры цен и расположений для общего случая несимметричного расположения игроков на отрезке. В дальнейших разделах приводится постановка задачи, рассматриваются основные уравнения, алгоритм численного решения и полученные численные результаты. В заключении обсуждаются содержательные интерпретации полученных результатов.

1. Постановка задачи

Напомним кратко модель Хотеллинга и обозначения. На отрезке длины l два продавца продают однородный товар с нулевой ценой производства. Они расположены на расстояниях a и b от концов отрезка $(0 < a + b \leqslant l, a \geqslant 0, b \geqslant 0)$. Расстояние между ними обозначим как $d = l - a - b$. Покупатели равномерно расположены на отрезке с единичной плотностью. Они покупают продукт у того продавца, который предлагает наименьшую цену с учетом цены доставки, и только в том случае, если его цена с пересылкой не превышает единицы. Цена доставки товара к потребителю зависит линейно от расстояния. Без ограничения общности транспортный тариф равен единице.

Требуется найти равновесие в двухшаговой игре. На первом шаге продавцы выбирают расположения своих магазинов a и b ($a+b \leqslant l$). На втором – устанавливают цены на свой товар $p_1,\ p_2 \in [0, 1]$ в подыгре цен. Целевая функция игроков:

$$u_i(p_1, p_2) = \begin{cases} u_i^I, & p_i < p_{-i} - d, \\ u_i^{II}, & |p_i - p_{-i}| \leqslant d, \\ u_i^{III}, & p_i > p_{-i} + d, \end{cases}$$

$$u_i^I \equiv p_i \left(\min\{1 - p_i, a_i\} + \min\{1 - p_i, a_{-i} + d\}\right), \tag{1}$$

$$u_i^{II} \equiv p_i \left(\min\{1 - p_i, a_i\} + \min\left\{1 - p_i, \frac{d + p_{-i} - p_i}{2}\right\}\right),$$

$$u_i^{III} \equiv 0 \quad ,$$

где обозначено $a_1 \equiv a,\ a_2 \equiv b$.

2. Основные уравнения

2.1. НЕЗАВИСИМЫЕ РЕШЕНИЯ

Если расстояние между игроками достаточно велико и спрос эластичен, то интуитивно понятно, что должно существовать равновесие игры, в котором стратегии игроков не зависят друг от друга. В самом деле, легко проверить следующее утверждение. Если игроки выбирают оптимальные цены монопольного рынка:

$$p_1^* = \arg\max_{p_1} \{p_1(\min(1 - p_1, a) + (1 - p_1))\},$$
$$p_2^* = \arg\max_{p_2} \{p_2(\min(1 - p_2, b) + (1 - p_2))\}, \tag{2}$$

и при этом их торговые зоны не пересекаются:

$$(3) \qquad d + p_1^* + p_2^* > 2 \ ,$$

то профиль (p_1^*, p_2^*) является равновесием Нэша (и РБС). Никаких других РБС с не соприкасающимися торговыми зонами в этой задаче нет. Иными словами, все другие равновесия в рассматриваемой задаче возникают, когда торговые области игроков пересекаются: $d + p_1^* + p_2^* \leqslant 2$. Конкретные выражения для профиля (p_1^*, p_2^*) определяются из (2):
(4)

$$p_1^* = \begin{cases} (a+1)/2, \ a \leqslant 1/3, \\ 1-a, \ 1/3 < a \leqslant 1/2, \\ 1/2, \ 1/2 < a, \end{cases} \quad p_2^* = \begin{cases} (b+1)/2, \ b \leqslant 1/3, \\ 1-b, \ 1/3 < b \leqslant 1/2, \\ 1/2, \ 1/2 < b. \end{cases}$$

2.2. УСЛОВИЯ ДЕМПИНГОВОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

В [3] показано, что безопасность игрока i от демпингового вытеснения соперником при фиксированном p_{-i} определяется условием:

$$(5) \qquad \hat{U}_{-i}(p_i) \equiv \max_{p \in (0, p_i - d)} u_{-i}^I(p) \leqslant u_{-i}^{II}(p_i, p_{-i}).$$

Функция $\hat{U}_{-i}(p_i)$ возрастает, вогнута при $p_i > d$ и выходит на постоянное значение. Функция u_{-i}^{II} линейна по p_i и возрастает. Если $\hat{U}_{-i}(p_i)$ и $u_{-i}^{II}(p_i, p_{-i})$ пересекаются, то (5) можно записать в виде:

$$(6) \qquad p_i \leqslant P_i^{d-}(p_{-i}) \quad \text{или} \quad p_i \geqslant P_i^{d+}(p_{-i}) \ ,$$

где $P_i^{d\pm}(p_{-i})$ – решения уравнения $\hat{U}_{-i}(p_i) = u_{-i}^{II}(p_i, p_{-i})$. Для тех p_{-i}, при которых $\hat{U}_{-i}(p_i)$ и $u_{-i}^{II}(p_i, p_{-i})$ не пересекаются, формально доопределим $P_i^{d\pm}(p_{-i}) \equiv 1$. Тогда условия (5) и (6) будут эквиваленты.

2.3. НАИЛУЧШИЙ БЕЗОПАСНЫЙ ОТВЕТ

Функция $u_i^{II}(p_i, p_{-i})$ вогнутая и однопиковая. Для любого p_{-i} множество $\arg\max\limits_{p_i} u_i^{II}(p_i, p_{-i})$ состоит из одной точки. Поэтому можно ввести функцию наилучшего ответа игрока i на цену p_{-i} (см. [2]):

$$BR_i(p_{-i}) = \arg\max_{p_i} u_i^{II}(p_i, p_{-i}). \tag{7}$$

Согласно [3], чтобы найти РБС в игре цен, нужно найти наилучший ответ, удовлетворяющий условию демпинговой безопасности (6). Поэтому введем функцию наилучшего безопасного ответа:

(8)

$$BSR_i(p_{-i}) = \begin{cases} BR_i(p_{-i}),\ if\ BR_i(p_{-i}) \notin (P_i^{d-}(p_{-i}), P_i^{d+}(p_{-i})), \\ P_i^{d-}(p_{-i}),\ if\ BR_i \in (P_i^{d-}, P_i^{d+}), \\ \qquad\qquad u_i^{II}(P_i^{d-}, p_{-i}) \geqslant u_i^{II}(P_i^{d+}, p_{-i}), \\ P_i^{d+}(p_{-i}),\ if\ BR_i \in (P_i^{d-}, P_i^{d+}), \\ \qquad\qquad u_i^{II}(P_i^{d+}, p_{-i}) > u_i^{II}(P_i^{d-}, p_{-i}). \end{cases}$$

В [3] показано, что эта функция также учитывает безопасность от «слабых» (то есть, не демпинговых) угроз.

3. Алгоритм численного решения

1) Сначала проверяется условие существования независимого решения (3), и если оно выполняется, то РБС находится как независимое решение (4).

2) Если области соприкасаются, то решается (5) и находятся значения $P_i^{d\pm}(p_{-i})$. Так как u_{-i}^I – вогнутая и однопиковая, то $\hat{U}_{-i}$ в формуле (5) удобно вычислять как максимальное значение в критических точках (при условии, что они меньше $p - d$):

$$\hat{U}_{-i} = \max\{u_{-i}^I(p-d), u_{-i}^I(1/2), u_{-i}^I(1/2 + b/2), \\ u_{-i}^I(1-b), u_{-i}^I(1-d-a), 0\}.$$

Если $p_1, p_2 \geqslant d$, то (5) выполняется при больших p_i (например, при $p_i = 3/p_{-i}$). Возможность нарушения (5) достаточно проверить в критических точках: концах области, изломах функции и там, где $\frac{\partial u^I_{-i}}{\partial p_i} = \frac{\partial u^{II}_{-i}}{\partial p_i} = \frac{1}{2}$. Если (5) нарушается хотя бы в одной из них, то $P_i^{d\pm}(p_{-i})$ можно найти из уравнения, соответствующего неравенству (5), например, методом деления отрезка пополам. Если условие (5) не нарушается ни в одной из этих точек, то доопределяем: $P_i^{d\pm}(p_{-i}) = 1$.

3) Вычисляются функции BSR_i и РБС подыгры цен (p_1^*, p_2^*) как решение уравнений:

$$p_i^* = BSR_i(p_{-i}^*). \tag{9}$$

Сканирование параметров a, b, d с шагом 0.001 показало, что третий случай в (8) никогда не реализуется и функция наилучшего безопасного ответа принимает более простой вид:

$$BSR_i(p_{-i}) = \min\{BR_i(p_{-i}), P_i^{d-}(p_{-i})\}. \tag{10}$$

Эта функция определена на $0 \leqslant p_{-i} \leqslant 1$, непрерывна и принимает значения из $(0, 1]$. В силу этого (9) всегда имеет решения.

4) Для решения двухшаговой задачи введем функции наилучшего ответа по расположению:

$$\begin{aligned} BLR_a(b) &= \arg\max_a u_1(p_1^*, p_2^*, a, b), \\ BLR_b(a) &= \arg\max_b u_2(p_1^*, p_2^*, a, b)\ , \end{aligned} \tag{11}$$

где (p_1^*, p_2^*) – РБС для подыгры цен при данных a, b. Тогда равновесие игры расположений (равновесие Нэша) определяется решением системы уравнений:

$$a^* = BLR_a(b^*), \quad b^* = BLR_b(a^*)\ . \tag{12}$$

4. Численное решение подыгры цен

На рис. 1-5 представлены результаты расчетов $p_1^*(a, b)$ РБС подыгры цен как решения уравнений (9) (справа) и соответствующие значения целевых функций $u_1^*(p_1^*(a, b), p_2^*(a, b), a, b)$ (слева). По горизонтальной оси отложено нормированное значение расположений a/l, по вертикальной – b/l . Графики равновесных выигрышей и цен построены для значений протяженности рынка l, взятых от 0.6 до 2.0 с шагом 0.1. Решение является непрерывным и кусочно-гладким, на графиках означены области, внутри которых решение является гладким.

5. Численное решение игры расположений

На рис. 6-7 показаны для различных значений l функции наилучшего ответа по расположению (11), пересечения которых дают равновесия Нэша подыгры расположений (12), то есть решение задачи Хотеллинга.

6. Интерпретации полученных решений

В ходе исследования, отраженного в настоящей и предыдущей [3] статьях, был обнаружен целый ряд эффектов, имеющих интересную экономическую интерпретацию. Можно перечислить их. Рассмотрение ценовой конкуренции на прямой в [3] позволило выявить «в чистом виде» 4 качественно различных случая возможных типов взаимодействия соперников, делящих пространственный рынок. При близких расстояниях между конкурентами устанавливается РБС, которое можно трактовать как демпинговое ценовое равновесие. В нем под давлением угроз устанавливаются намного более низкие цены, чем при обычной ценовой конкуренции, описываемой равновесием Хотеллинга. Третья возможность – множественные «равновесия отрыва», условием которых явля-

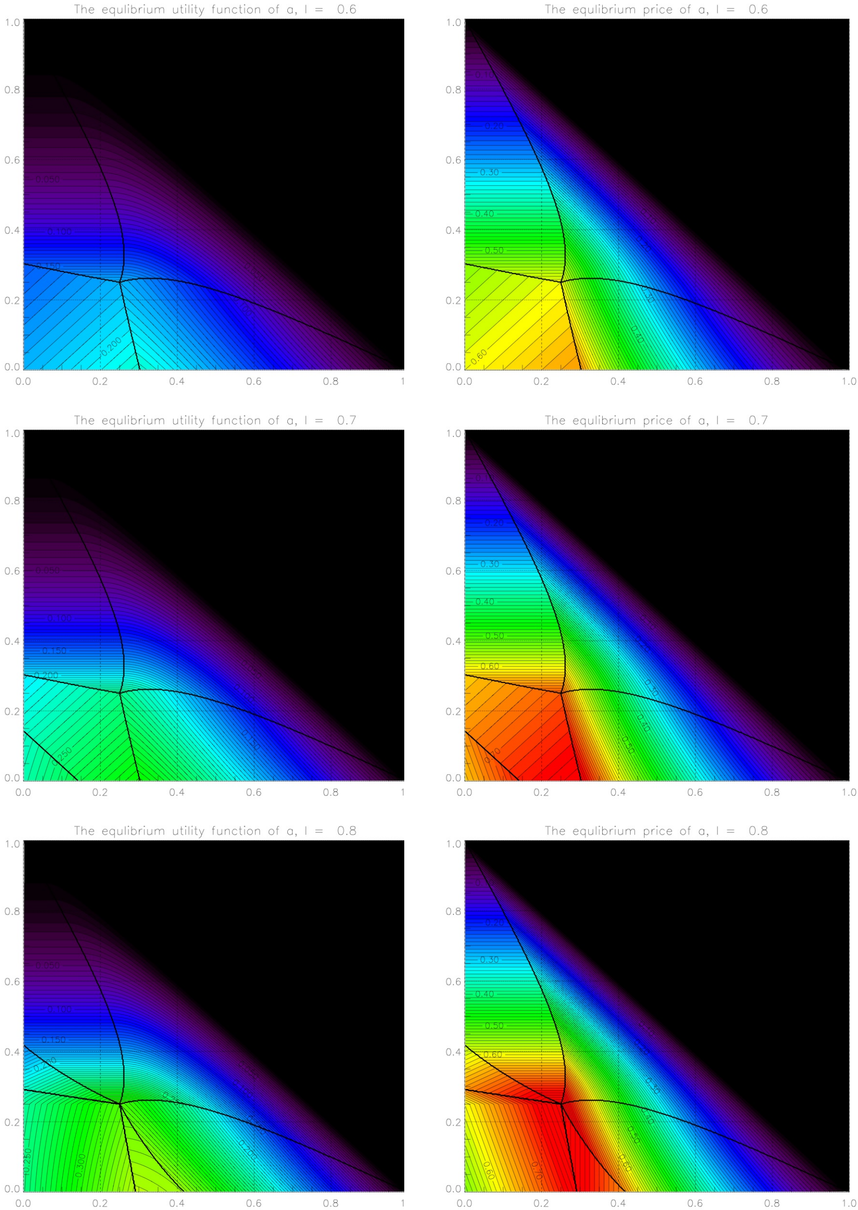

Рис. 1. Целевая функция и цены игрока 1 *при* $l = 0.6, 0.7, 0.8$

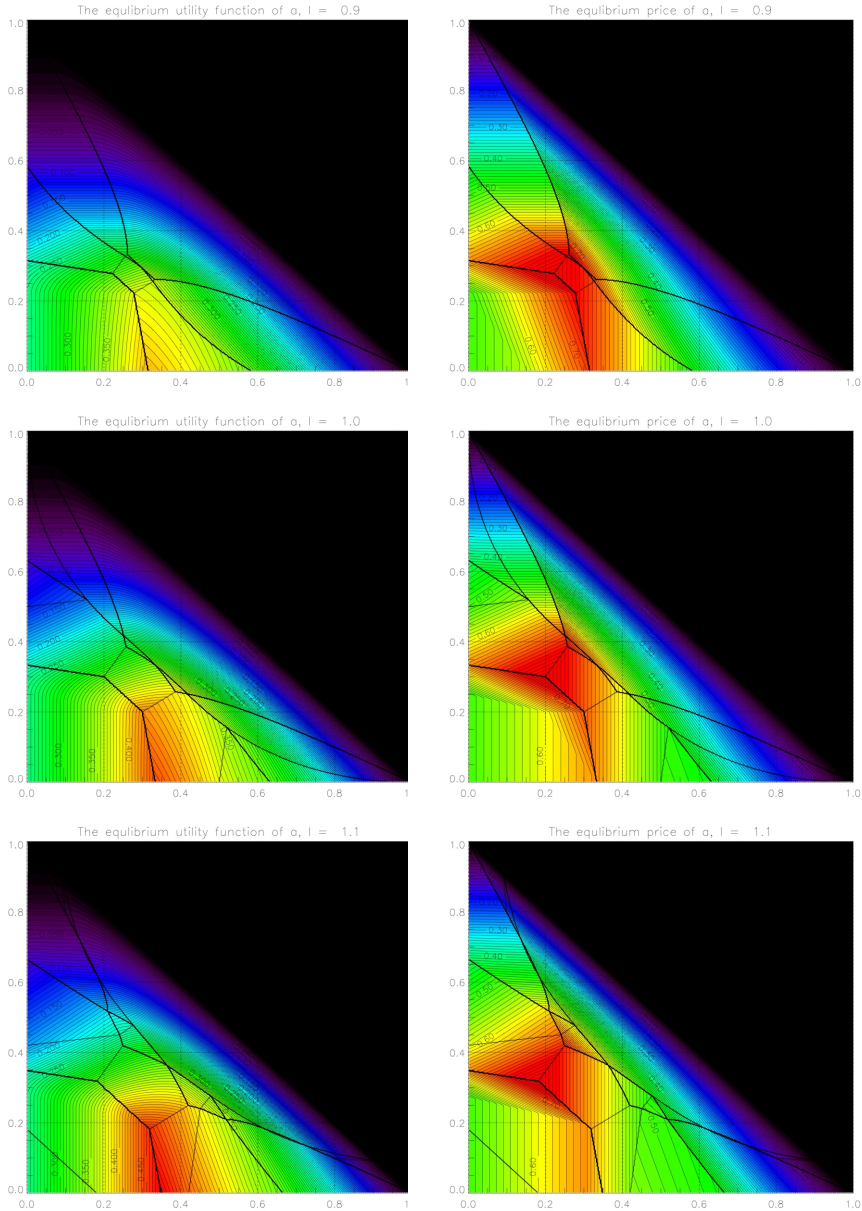

Рис. 2. Целевая функция и цены игрока 1 *при* $l = 0.9, 1.0, 1.1$

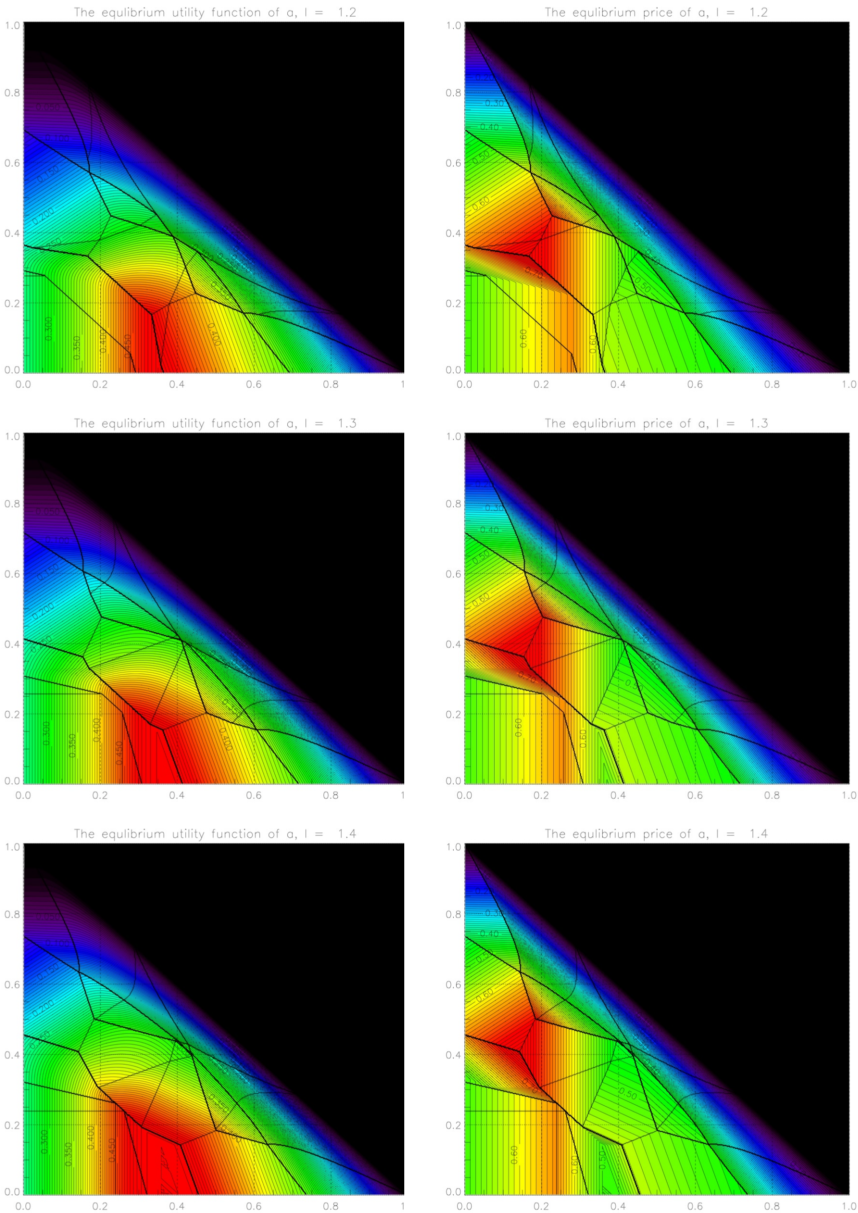

Рис. 3. Целевая функция и цены игрока 1 *при* $l = 1.2, 1.3, 1.4$

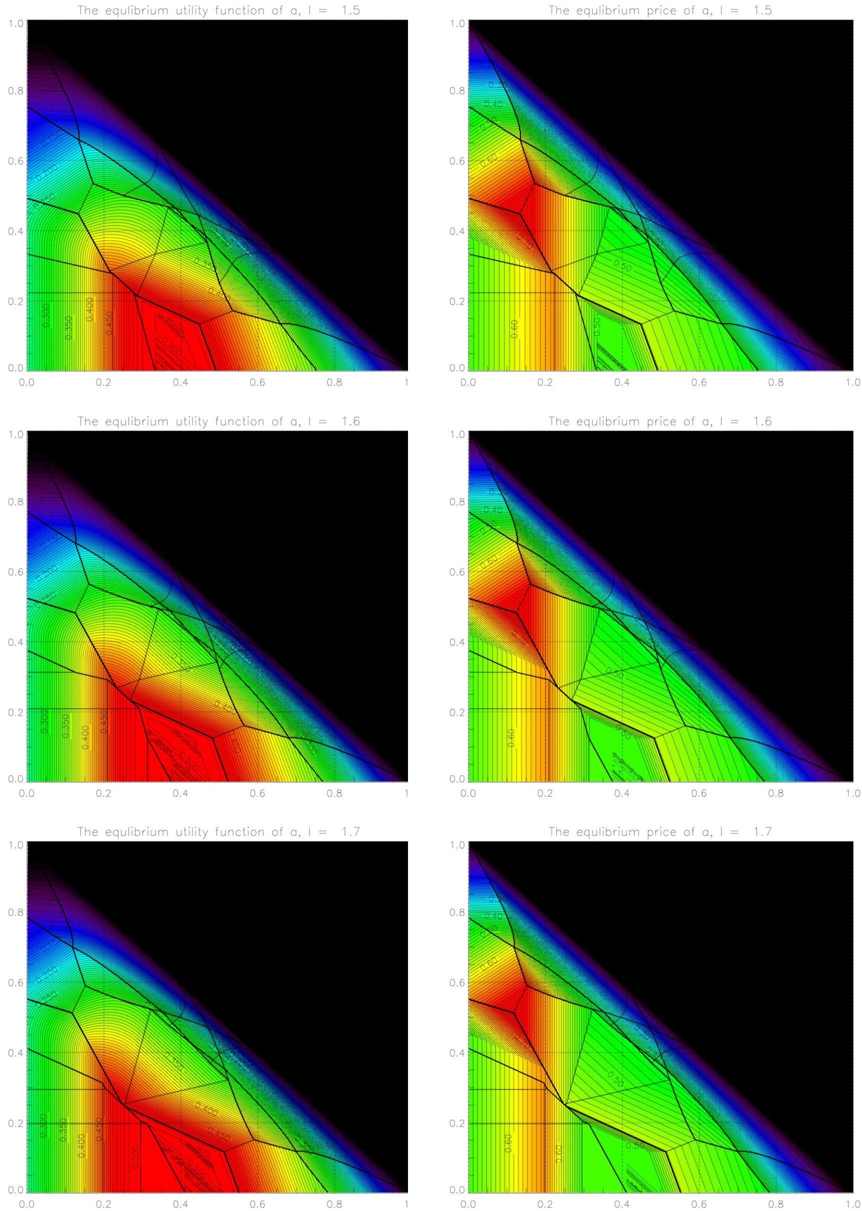

Рис. 4. Целевая функция и цены игрока 1 *при* $l = 1.5, 1.6, 1.7$

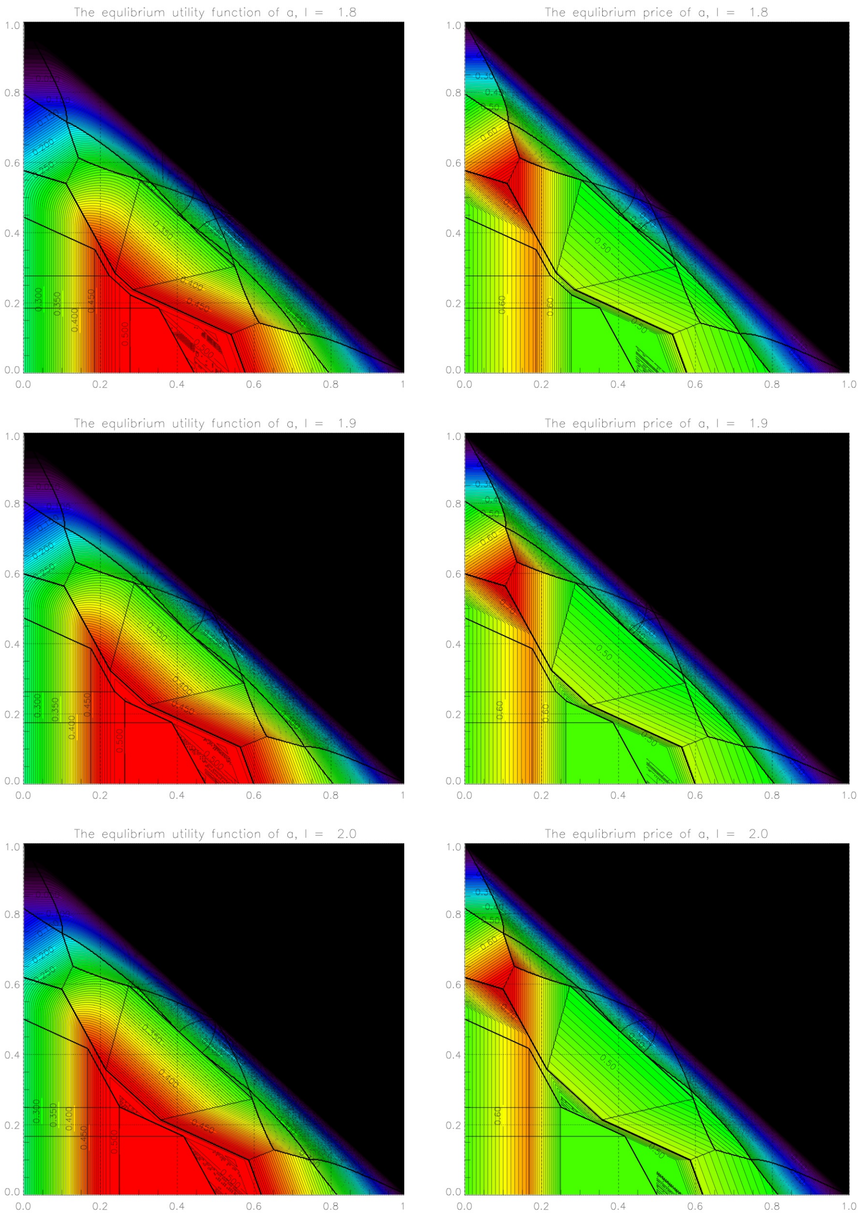

Рис. 5. Целевая функция и цены игрока 1 *при* $l = 1.8, 1.9, 2.0$

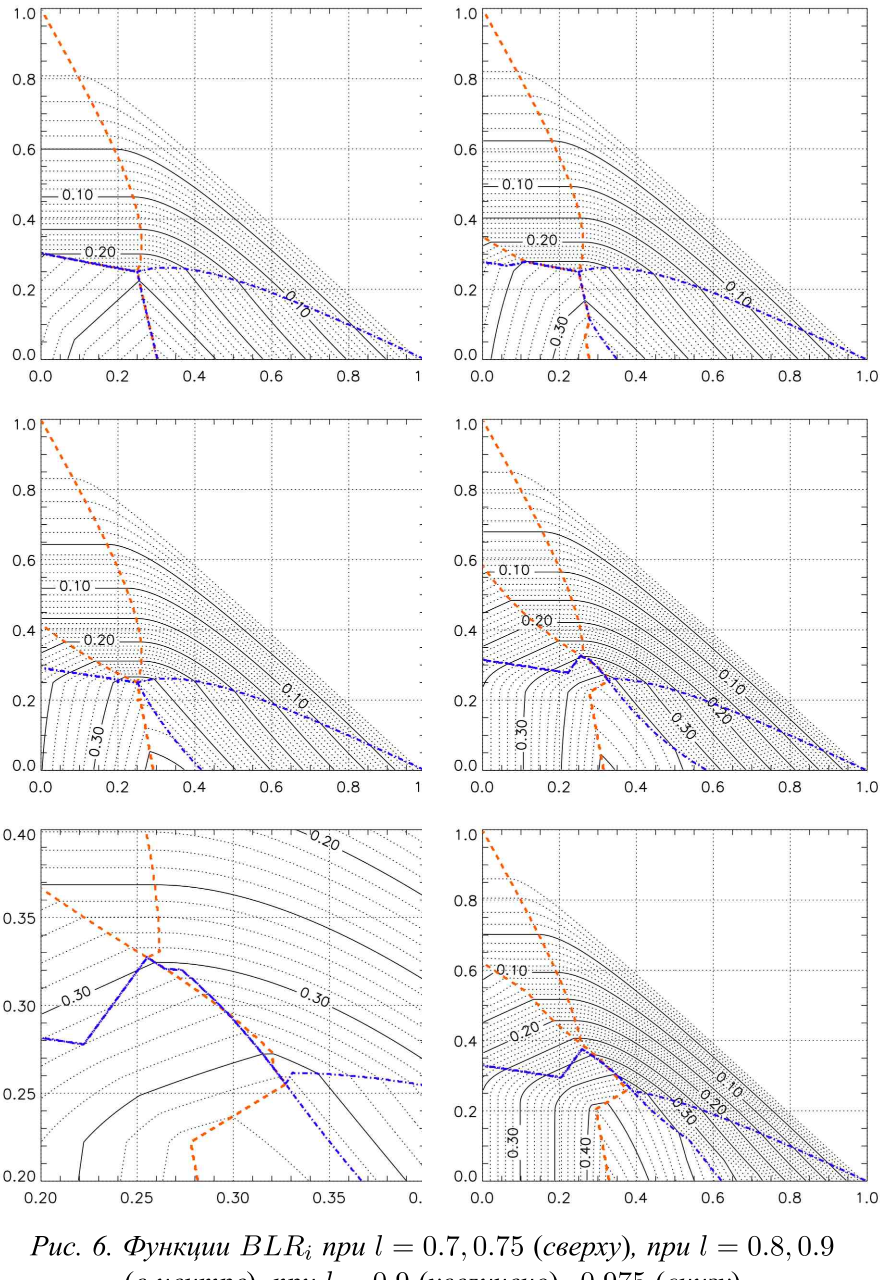

Рис. 6. Функции BLR_i при $l = 0.7, 0.75$ (сверху), при $l = 0.8, 0.9$ (в центре), при $l = 0.9$ (увеличено) , 0.975 (снизу)

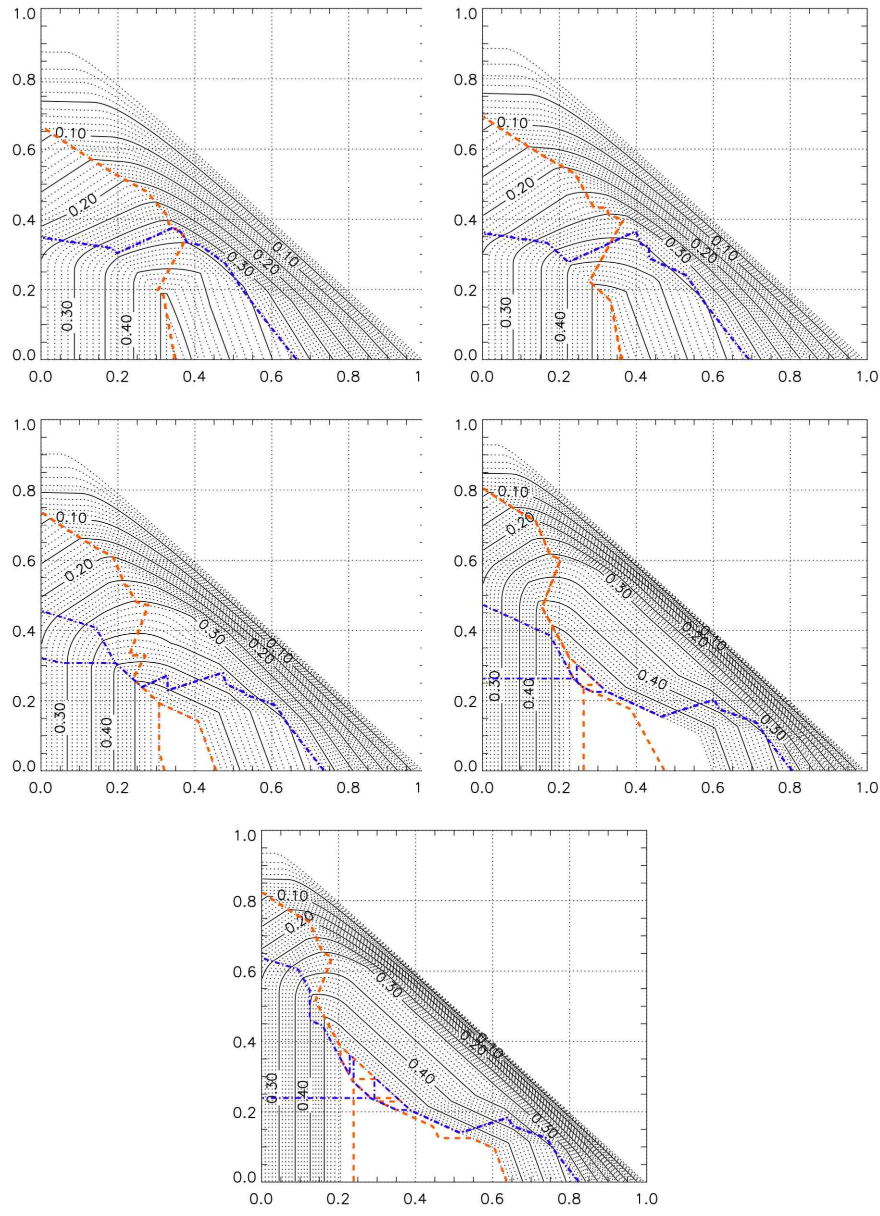

Рис. 7. Функции BLR_i при $l = 1.1, 1.2$ (сверху), при $l = 1.4, 1.9$ (в центре), при $l = 2.1$ (снизу)

ется поддержание на границе покупательских областей нулевого конкурентного давления (условие отрыва). Этот случай можно интерпретировать как равновесие раздела сфер влияния, причем здесь существует множество возможностей установить границу областей, в рамках определенных условием теоремы ограничений. Наконец при достаточно большом расстоянии между магазинами они совершенно не влияют друг на друга. Численное исследование игры цен выявило еще один тип ценового равновесия – одностороннее РБС, в котором один из игроков определяет цену исходя из ограничения угрозы демпинга, а для второго максимум его целевой функции является безопасной стратегией. Таким образом, выявлены 5 типов ценовых равновесий на пространственных рынках: демпинговое равновесие, одностороннее демпинговое равновесие, обычное ценовое равновесие (Хотеллинга), равновесие раздела сфер влияния и независимое существование фирм на достаточно протяженном рынке.

Также в [3] был обнаружен интересный пример при $a = b = 0.2,\ d = 0.4$, в котором в ходе конкуренции две фирмы делят большой рынок на два маленьких монопольных рынка, устанавливая на них более высокие цены. Стратегии игроков-продавцов являются равновесными по Нэшу как в подыгре цен, так и в подыгре расположений. Если рассматривать эту ситуацию с точки зрения покупателей, то вариант дуополии доминируется по Парето монопольным вариантом наличия одного магазина. Конкуренция при таких условиях на пространственно распределенном рынке вызывает повышение цен. Рассмотренный пример иллюстрирует интересную возможность. При разделе пространственного рынка определенной протяженности, не слишком маленькой и не слишком большой, у продавцов появляется стремление разделить большой рынок на два маленьких локальных рынка. При этом конкурентное давление друг на друга невелико (в равновесиях Хотеллинга и РБС) или отсутствует (в равновесиях отрыва), и цены на маленьких слабо зависящих друг от друга, даже при отсутствии искусственных барьеров, пространственных рынках устанавливаются более высокие.

При численном исследовании был найден еще один пример возникновения повышенных цен при некоторых расположениях игроков a и b. Интерпретация этого эффекта может быть следующей. Если на пространственно протяженных рынках у какого-либо участника есть свой ограниченный, но защищенный от конкуренции сектор (для данной конкретной постановки задачи это участок от магазина до ближайшего края отрезка, при значениях $a \approx 0.2$), то такому участнику может оказаться выгодным назначить высокие цены таким образом, чтобы получить достаточный доход со своего ограниченного «внутреннего» рынка и компенсировать тем самым потерю «внешнего» (расположенного между конкурирующими магазинами).

Наконец, при анализе полного решения подыгры расположений с неэластичным спросом проявилась общая, неожиданно сложная картина зависимости решения задачи от основного параметра – протяженности рынка l (в ряде исследований вместо протяженности рассматривается эквивалентный параметр – величина транспортных тарифов при фиксированной протяженности). Расчеты представляют весьма сложную и нетривиальную картину изменения решения между двумя крайними тривиальными случаями: точечным рынком, на одном конце, при $l = 0$, и независимым существованием двух торговых точек, на противоположном, при $l \geqslant 2$. Этот промежуток значений протяженности рынка $l \in [0, 2]$ включает в себя, согласно модели, 16 различных случаев. Для авторов оказалось неожиданным, что при простых и естественных предположениях задачи Хотеллинга с эластичным рынком, решение получилось настолько сложным и даже причудливым. Наиболее интересной оказалась зависимость двух важных параметров рынка, остроты пространственной конкуренции между фирмами и наличия симметричных равновесий от протяженности рынка. Эти зависимости предлагают ответ на дискутирующийся в литературе вопрос о соотношении на пространственных рынках двух тенденций – к унификации и к дифференциации стратегий конкурентов.

Имеет смысл более подробно остановиться на симметричных решениях. Симметричные решения задаются таблицей 1, их график изображен на рис. 8. Для симметричных решений можно взять величину $a^*/l = b^*/l$ в качестве параметра, характеризующего степень остроты пространственной конкуренции между магазинами, зависящей от протяженности рынка. Можно заметить, что для значений протяженности $l \leqslant 0.8$ и для $l \geqslant 4/3$ этот параметр постоянен и равен 0.25, при $l \in [0.8, 8/7]$ он возрастает до максимума, при $l \in [8/7, 4/3]$ – снова убывает до постоянного значения. То есть полученные результаты можно проинтерпретировать таким образом, что при указанных (средних) значениях протяженности рынка острота пространственной конкуренции сначала усиливается, а потом снова падает до стандартного значения 0.25. Этот весьма интересный вывод модели можно использовать как гипотезу для проверки адекватности модели, для поиска такого эффекта повышения остроты пространственной конкуренции в прикладных экономических областях и задачах. Таким образом, исследование предлагает достаточно неожиданный ответ на широко дискутирующийся вопрос о соотношении на пространственных рынках тенденций к унификации или дифференциации местоположений конкурирующих фирм.

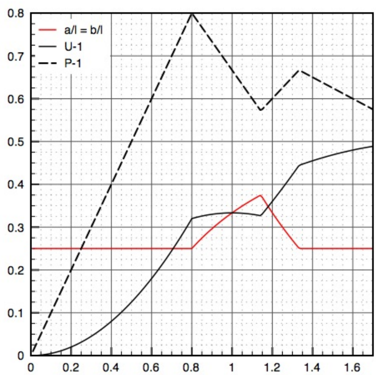

Рис. 8. Симметричное решение игры расположений

Таблица 1. Симметричные решения игры расположений .

l	$l \leqslant 0.8$	$l \in [0.8, \frac{8}{7}]$	$l \in [\frac{8}{7}, \frac{4}{3}]$	$l \in [\frac{4}{3}, 2]$	$l \geqslant 2$
a, b	$l/4$	$(2l-1)/3$	$1-l/2$	$l/4$	$\frac{1}{2} \leqslant a, b \leqslant \frac{l-1}{2}$
$p^*_{1,2}$	l	$(4-2l)/3$	$l/2$	$1-l/4$	0.5
$u^*_{1,2}$	$l^2/2$	$l(2-l)/3$	$l^2/4$	$l(4-l)/8$	0.5

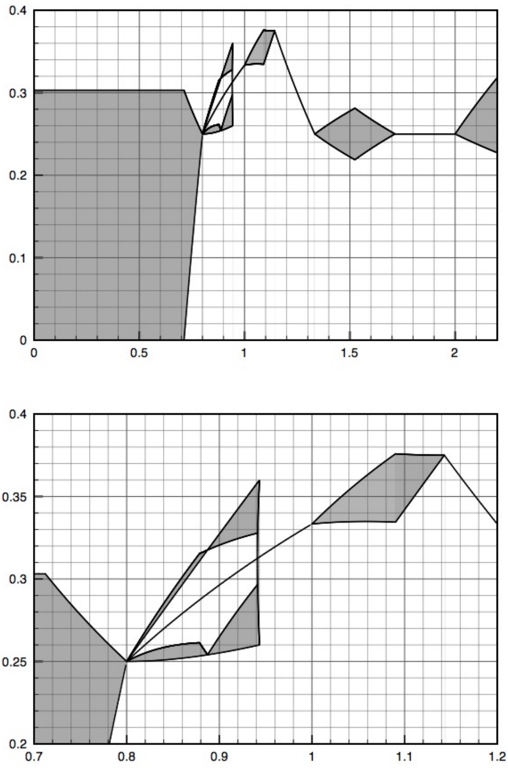

Рис. 9. Несимметричное решение игры расположений

Если же рассматривать решение в целом, его симметричные и несимметричные части (рис. 9 представляет проекцию этого решения на плоскость $(l, a/l)$), то прежде всего обращает на себя внимание его причудливость. Для некоторых определенных значений протяженности рынка имеются несимметричные решения, в других имеется только единственное симметричное решение, например при $l \in [\frac{8}{7}, \frac{4}{3}]$. То есть от протяженности рынка зависит не только общая острота пространственной конкуренции, но и такое важное свойство рынка, как возможность несимметричных равновесий. Этот эффект также может быть использован для поиска экономических эффектов при идентификации модели.

Несмотря на простоту исходной постановки задачи, решение оказалось очень трудоемким и технически сложным. В процессе решения трудности вызывали естественные сомнения относительно чрезмерной усложненности получившейся модели. Тем не менее, богатство обнаруженных эффектов, имеющих интересные содержательные интерпретации, а также нетривиальность этих эффектов (то есть невозможность их найти, не исследуя модель до конца, только из соображений здравого смысла), оправдывают избранный подход к задаче. Применение нового, недавно предложенного понятия равновесия в безопасных стратегиях к классической задаче оказалось продуктивным. Обнаруженные теоретические эффекты дают возможность идентифицировать параметры модели на прикладных экономических задачах и открывают возможность перехода от теоретических моделей к прикладным исследованиям.

Литература

1. ИСКАКОВ М.Б. *Равновесие в безопасных стратегиях* // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 3. – С. 139-153.
2. ИСКАКОВ М.Б. *Равновесие в безопасных стратегиях и равновесия в угрозах и контругрозах в некооперативных играх* // Автоматика и телемеханика. – 2008. – №2. – С. 114-134.

3. ИСКАКОВ М.Б., ПАВЛОВ П.А. *Равновесие в безопасных стратегиях в модели пространственной конкуренции Хотеллинга* // Управление большими системами. Выпуск 26.1. – М.: ИПУ РАН, – 2009. С.287-318.
4. D'ASPREMONT C., JASKOLD GABSZEWICZ J., THISSE J.-F. *On Hotelling's "Stability in Competition"* // Econometrica, Vol. 47, №. 5 (Sep., 1979), pp. 1145-1150.
5. HOTELLING H. *Stability in Competition* // The Economic Journal, Vol. 39, №. 153. (Mar., 1929), pp. 41-57.

NUMERICAL SOLUTION OF HOTELLING'S GAME IN SECURE STRATEGIES

Mikhail Iskakov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc. (mih_iskakov@mail.ru).
Alexey Iskakov, Dr. (isk_alex@mail.ru).

Abstract: We study the price-location game in the classical model of spatial competition proposed by H.Hotelling in 1929 with the linear transport costs and elastic demand. We employ the concept of equilibrium in secure strategies (ESS) which allows to solve the subgame of choosing prices for any locations. The numerical solution of the two-stage location-price Hotelling game is presented. The obtained results are interpreted and interesting economic effects of the model are discussed.

Keywords: Hotelling, spatial competition, equilibrium in Secure Strategies.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А. Г. Чхартишвили