УДК 519.837.4 + 517.977.8
ББК 22.18

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЙ АНАЛИЗ ОДНОЭТАПНЫХ И ДВУХЭТАПНЫХ АУКЦИОНОВ ОДНОРОДНОГО ТОВАРА[1] [2]

Васин А.А.[3]**, Гусев А.Г.**[4]**,**
Шарикова А.А.[5]
(*Факультет вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва*)

Один из возможных путей снижения «рыночной власти» компаний – введение возможности заключения форвардных контрактов. На примере симметричной олигополии с постоянными предельными издержками рассматривается модель функционирования спотового и форвардного рынков электроэнергии, организованных как аукционы Курно. Производители стремятся максимизировать свою прибыль, используя стратегии, соответствующие совершенному подыгровому равновесию (СПР) двухэтапной игры. В первой части статьи мы рассматриваем двухэтапную модель торгов при отсутствии арбитража и с ограниченными производственными мощностями. Во второй части работы исследована двухэтапная модель с пропорциональным правилом рационирования потребителей. В такой модели существует равновесие в смешанных коррелированных стратегиях, а поведение производителей определяется эндогенной случайной величиной, определяющей разные ситуации на спотовом рынке.

---

[1] *Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ по проекту 08-01-00249 и гранта НШ 693.2008.1.*

[2] *Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2009. – Т. 1. № 4. – С. 3–30».*

[3] *Александр Алексеевич Васин, доктор физико-математических наук, профессор* (*vasin@cs.msu.su*).

[4] *Антон Георгиевич Гусев, аспирант* (*vmik@hotbox.ru*).

[5] *Агата Андреевна Шарикова, аспирант* (*agatha.sharikova@ubs.com*).

Ключевые слова: форвардный рынок, олигополия Курно, рыночная власть, совершенное подыгровое равновесие.

Введение

Проблема использования рыночной власти крупными компаниями и связанного с этим отклонения рынка от состояния конкурентного равновесия имеет важное теоретическое и практическое значение. Рынок электроэнергии, характеризующийся значительной концентрацией производства, барьерами для входа на рынок и высокими требованиями к надежности компаний, предоставляет производителям реальные возможности получения сверхприбыли за счет использования рыночной власти в ущерб потребителям и суммарному общественному благосостоянию. Дробление рынка производства электроэнергии на мелкие компании нежелательно как с точки зрения издержек производства, так и с точки зрения надежности поставок электроэнергии. Альтернативным способом снижения рыночной власти является развитие рынка форвардных контрактов.

Начиная с работы [2], в ряде статей рассматривалось влияние рынка форвардных контрактов на уровень конкуренции в условиях олигополии. Большинство этих работ рассматривали рынок электроэнергии.

В работе [3] рассматривается рынок двух производителей с постоянными предельными издержками. Производители конкурируют по Курно на N последовательных рынках форвардных контрактов, а затем на одном спотовом рынке. Авторы предполагают, что активность арбитражеров уравнивает цены на всех $N + 1$ этапах, а неопределенность, связанная с будущим, отсутствует. В работе показано, что наличие возможности торговать на форвардном рынке увеличивает конкуренцию среди производителей, и что при увеличении числа этапов форвардных торгов N объем выпуска на таком рынке стремится к конкурентному состоянию. В последующей работе [7] показано, что такой результат возможен только в ситуации, когда форвардные позиции фирм являются общедоступной информацией, и что в противном случае возникает исход Курно.

Newbery [10] и Green [6] рассматривают равновесия на аукционах функций предложения на спотовом рынке, в духе модели [8]. Newbery анализирует случайные гладкие монотонные заявки производителей на спотовом рынке и показывает, что при условии отсутствия ограничений по входу на рынок и риск-нейтральных потребителях, в ситуации СПР в данной модели любому генератору невыгодно предлагать ненулевой объем. Green [5] анализирует аукцион с линейными функциями предложения. Автор показал, что коалиция пары крупных генераторов может поднять цены на спотовом рынке существенно выше уровня предельных издержек. В случае конкуренции по Бертрану-Эджворту производители реализуют большую часть произведенного ими товара. Тогда как в случае конкуренции по Курно в СПР производителям невыгодно продавать произведенный товар.

В работе [9] показано, что в случае конкуренции по Бертрану-Эджворту на спотовом рынке возможность заключения форвардных контрактов может увеличить рыночную власть производителей и снизить суммарное общественное благосостояние. Авторы установили, что в равновесии в такой модели каждый производитель будет покупать форвардные контракты на весь объем собственного производства, поднимая тем самым цену на спотовом рынке.

James Bushnell [5] рассматривает двухэтапную модель симметричной олигополии на рынке электроэнергии с аукционом Курно на спотовом и форвардном рынках в условиях отсутствия арбитража. В работе показано, что в случае постоянных предельных издержек введение форвардного рынка с известными форвардными стратегиями производителей снижает рыночную власть последних (оцениваемую индексом Лернера) так же, как увеличение числа производителей в модели с n до n^2.

В указанной модели некоторые предположения не соответствуют реальности, а именно: 1) ограничение производственных мощностей не является существенным; 2) на форвардном рынке товар покупают потребители наиболее высокими резервными ценами. В реальности ограниченность производственных мощностей имеет существенное значение при ценообразовании (например, на рынках электроэнергии в пиковые периоды), а потребители обычно имеют равные возможности при покупке товара на форвардном рынке. Поэтому в рамках данного исследования рассматривается влияние указанных ограничений на равновесия. Спотовый рынок организован как аукцион Курно, при этом спрос на спотовом рынке соответствует остаточному спросу после торгов на форвардном рынке. Мы сравниваем цену конкурентного равновесия (Вальраса), равновесные по Нэшу цены одноэтапной модели Курно и одноэтапной модели Бертрана-Эджворта и цену СПР двухэтапного аукциона Курно. Отметим, что самый распространенный способ организации спотового рынка электроэнергии – это аукцион функций предложения единой цены, причем допустимые функции предложения – кусочно-постоянные. В работе [10] показано, что для этого аукциона исход, соответствующий устойчивым равновесиям Нэша, совпадает с исходом Курно. Аукцион оплаты по заявкам, применяемый в Великобритании, соответствует в этом смысле аукциону Бертрана-Эджворта (см. [13]).

В данной работе мы рассматриваем случай симметричной олигополии с постоянными предельными издержками. При заданной доле продаж наиболее крупной компании достигается максимальная разница между ценой Курно и ценой Вальраса ([11]). В разделе 1 данной работы представлены результаты касательно существования и характеристик равновесий по Нэшу для одноэтапных аукционов Курно и Бертрана-Эджворта. В разделе 2 анализируются две двухэтапные модели конкуренции по Курно.

Первый вариант отличается от модели Бушнелла лишь ограниченностью производственных мощностей. Найдены СПР, в зависимости от которых и указана область параметров, в которой СПР не существует. В зависимости от соотношения максимальной мощности и параметров функции спроса проведен сравнительный анализ равновесия двухэтапного аукциона и равновесий одноэтапных аукционов Курно и Бертрана-Эджворта.

В случае равенства цен на форвардном и спотовом рынках естественно предположить, что любой потребитель, чья резервная цена превосходит рыночную цену, может с равной вероятностью купить товар на любом из этих рынков. В этом случае остаточный спрос, реализующийся на спотовом рынке соответствует правилу пропорционального рационирования потребителей (см. [4]). Мы покажем, что СПР в чистых стратегиях для такой модели не существует. В то же время обосновано существование СПР в коррелированных смешанных стратегиях. Вводится случайная величина, определяющая стратегии игроков на спотовом рынке и принимающая два значения. При реализации первого значения, на спотовом рынке устанавливается низкая цена и высокие объемы продажи («медвежий рынок»). Для второго значения случайной величины на спотовом рынке реализуется высокая цена и низкие объемы («бычий рынок»). Определены условия существования такого СПР и дана оценка отклонения соответствующей цены от цены конкурентного равновесия, близкая к полученной в [5].

1. Анализ одноэтапных моделей

Рассмотрим рынок однородного товара с конечным числом производителей A. Каждый производитель a характеризуется функцией затрат $C^a(q)$ с неубывающими предельными издержками. Поведение потребителей характеризуется функцией спроса $D(p)$, которая непрерывно дифференцируема, убывает по p и известна всем агентам. Напомним известные модели принятия решений для такого рынка. Функция предложения Вальраса определяет оптимальный объем производства фирмы a в зависимости от цены p: $S^a(p) \overset{def}{=} Arg\max\limits_{q}(pq - C^a(q))$. Цену, при которой достигается равенство функции спроса на рынке с суммарной функцией предложения Вальраса, назовем *ценой Вальраса* $\tilde{p}$. В модели олигополии Курно, стратегией производителя a является его объем производства $q_a \in [0, Q_a]$. Производители устанавливают свои объемы одновременно. Рыночная цена $p(\vec{q})$ уравнивает спрос и существующее предложение: $p(\vec{q}) = D^{-1}(\sum\limits_{a\in A} q_a)$. Функция выигрыша производителя a имеет вид $f^a(\vec{q}) = q_a p(\vec{q}) - C^a(q_a)$. Васин, Васина [10] установили следующее условие первого порядка для существования равновесия по Нэшу в данной модели. Пусть $(q_a*, a \in A)$ - набор равновесных по Нэшу объемов производства, а $p^* = D^{-1}(\sum\limits_{a \in A} q_a)$ – цена, соответствующая этим объемам (цена Курно). Тогда

$$(1) \quad (p^* - C_-^{a'}(q_a^*))|D'(p^*)| \leqslant q_a^* \leqslant (p^* - C_+^{a'}(q_a^*))|D'(p^*)|\,, \quad \text{если } C^{a'}(0) < p^*,$$

$$(2) \qquad q_a^* = 0 \text{ при } C^{a'}(0) \geqslant p^*.$$

Цена Курно определяется из уравнения $\sum\limits_a S_C^a(p^*) = D(p^*)$, где функция предложения Курно $S_C^a(p)$ определяется как решение системы (1), (2).

Рассмотрим симметричную олигополию с n фирмами-производителями и постоянными предельными издержками c. Пусть максимальная производственная мощность каждой фирмы ограничена: $q_a \leqslant \bar{q}$, $a = 1, ..., n$, а суммарный спрос на рынке задан функцией $D(p) = \max\{0, \bar{D} - dp\}$. Тогда цена Вальраса $\tilde{p} = c$ при $0 \leqslant D(c) \leqslant n\bar{q}$, и $\tilde{p} = \frac{\bar{D} - n\bar{q}}{d}$ при $D(c) > n\bar{q}$.

Утверждение 1. *Для данной симметричной олигополии при $Q^* \overset{def}{=} \frac{n}{n+1}(\bar{D} - cd) \leqslant n\bar{q}$ цена Курно равна $p^* = \frac{\bar{D}+cnd}{d(n+1)}$, суммарный объем производства равен Q^*. При $n\bar{q} < Q^*$ цена Курно равна $p^* = \frac{\bar{D}-n\bar{q}}{d} = \tilde{p}$, суммарный объем производства равен $n\bar{q}$.*

Доказательство. Из системы (1), (2) суммарная функция предложения Курно равна $\sum\limits_a S_C^a = \min\{(p-c)nd, n\bar{q}\}, p > c$. На рис. 1 показаны два возможных варианта пересечения суммарной функции предложения Курно с суммарной функцией спроса.

В первом случае $Q^* \leqslant n\bar{q}$, суммарная функция предложения Курно равна суммарному спросу при $p* = \frac{\bar{D}+cnd}{d(n+1)}$, а суммарный объем производства равен Q^*. Во втором случае $n\bar{q} < Q^*$, суммарное предложение равно суммарному спросу при $p^* = \frac{\bar{D}-n\bar{q}}{d} = \tilde{p}$, а суммарный объем производства равен $n\bar{q}$.

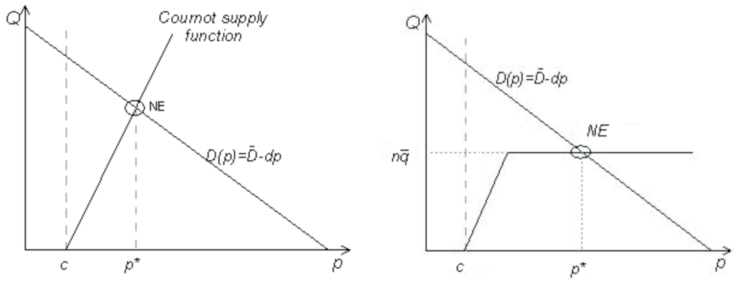

Рис. 1. a. Неактивное ограничение производственной мощности. *b. Активное ограничение производственной мощности.*

Рассмотрим теперь аналогичную олигополию с конкуренцией по Бертрану - Эджворту. Стратегией производителя a в такой модели является цена s_a. Набор $s = (s_a, a \in A)$ определяет фактическое предложение $\hat{Q}(s) = (\hat{Q}_p(s), p \in P(s))(s)$, где $\hat{Q}_p(s) = n(p)\bar{q}$, $n(p)$ – количество производителей, назначающих цену $s_a = p$, $P(s)$ - вектор установленных производителями цен, а $\hat{Q}_p$ – количество товара, предлагаемого по цене p. Потребители становятся в очередь и покупают товар в порядке возрастания цены на него, учитывая свои резервные цены. Функция остаточного спроса $D(p, \hat{Q})$ показывает, сколько товара потребители готовы купить по цене p при фактическом предложении $\hat{Q}$, после того, как весь товар по ценам $p' < p$ будет распродан. При условии приоритета богатых потребителей эта функция имеет вид $D(p, \hat{Q}) = \max\{0, \bar{D} - \sum\limits_{p'<p} \hat{Q}_{p'}\}$. В случае пропорционального правила рационирования, функция остаточного спроса при этом имеет вид $D_{pr}(p, \hat{Q}) = D(p)(1 - \sum\limits_{p'<p} \frac{\hat{Q}_{p'}}{D(p')})$. По функции остаточного спроса для любых стратегий производителей однозначно определяется максимальная продажная цена $R(s) = \max\{p \in P(s) | D(p, \hat{Q}(s)) > 0\}$ максимальная цена, при которой остаточный спрос еще положительный. В качестве выигрышей производителей рассмотрим их прибыли:

$$f^a(s) = \begin{cases} 0,\ s_a > R(s), \\ (s_a - c)\bar{q},\ s_a < R(s), \\ (s_a - c)\ \min\{\bar{q}, D(R(s), \hat{Q}(s))/n(R(s))\}, \end{cases}$$

где $n(R(s))$ – количество производителей, назначающих $s_a = R(s)$.

Следующее утверждение характеризует равновесия Нэша рассматриваемой одноэтапной игры:

Утверждение 2. *При $(n-1)\bar{q} > \bar{D} - cd$ набор стратегий $(s_a = c,\ a \in A)$ является равновесием Нэша в данной модели, соответствующим конкурентному равновесию. При $(n+1)\bar{q} \leqslant \bar{D} - cd$ набор стратегий $(s_a = \tilde{p} = \frac{\bar{D} - n\bar{q}}{d},\ a \in A)$ является равновесием Нэша при условии приоритета богатых потребителей. При $\frac{\bar{D}-cd}{(n+1)} < \bar{q} < \frac{\bar{D}-cd}{n-1}$ равновесий Нэша в рассматриваемой модели не существует. В условиях пропорционального правила последний набор стратегий является равновесием Нэша тогда и только тогда, когда $\bar{D} - cd \geqslant 2n\bar{q}$.*

Доказательство. См. Приложение.

2. Анализ двухэтапных моделей

2.1. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Рассмотрим симметричную олигополию с n фирмами - производителями с постоянными предельными издержками c. Производители участвуют в торгах на форвардном рынке, а затем в торгах на спотовом рынке, организованных в форме аукциона Курно. Стратегией производителя a является пара $q_a = (q_a^f, q_a^s(q^f))$, где q_a^f - объем предложения фирмы a на форвардном рынке, $\sum\limits_a q_a^f = q^f$ - суммарный объем товара, проданного на форвардном рынке, а q_a^s - объем предложения фирмы a на спотовом рынке, зависящий от q^f. Суммарный объем производства каждой фирмы ограничен: $q_a^f + q_a^s(q_a^f) \leqslant \bar{q}$, $a = 1, ..., n$. Каждая фирма стремится максимизировать свою суммарную прибыль. Активность арбитражеров при любых стратегиях $q_a, a \in A$, обеспечивает равенство цен на форвардном и спотовом рынках: $p^s = p^f = p$.

2.2. МОДЕЛЬ С ПРИОРИТЕТОМ БОГАТЫХ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ

Пусть предлагаемый на форвардном рынке объем достается потребителям с наиболее высокими резервными ценами. При таком правиле рационирования функция остаточного спроса по итогам форвардных торгов имеет вид $D(p, q^f) = \max\{0, D(p) - q^f\}$. Для любого набора стратегий $(q_a,\ a \in A)$, цена на спотовом рынке удовлетворяет соотношению $D(p) - q^f = \sum\limits_a q_a^s(q^f)$. В СПР цена $p^s(q^f)$ на спотовом рынке определяется из равенства функции остаточного спроса функции остаточного предложения Курно: $D(p^s) - q^f = \min\{nd(p^s - c), n\bar{q} - q^f\}$.

Обозначим через $\hat{p}$ и $\hat{q}$ соответственно цену и суммарный объем предложения в СПР. Следующее утверждение описывает три типа СПР, которые существуют в рассматриваемой модели в зависимости от соотношения между суммарной максимальной производственной мощностью $n\bar{q}$ и значением спроса по цене, равной предельным издержкам $\bar{D} - cd$. Как и ранее, через $\tilde{p}$ и p^* обозначены соответственно цена Вальраса и цена Курно для одноэтапной модели аукциона.

Утверждение 3. а) *Если максимальная производственная мощность фирмы удовлетворяет соотношению $(n+1)\bar{q} \leqslant \bar{D} - cd$, то для любого $q_a^f \leqslant \bar{q}$, $a \in A$ в рассматриваемой двухэтапной модели существует СПР с активным ограничением производственных мощностей такое, что $\hat{p} = \tilde{p} = p^*,\ q_a^f + q_a^s = \bar{q},\ a \in A$.*

б) *Если $n\bar{q} < \bar{D} - cd < (n+1)\bar{q}$, то существует локальное СПР с аналогичными характеристиками, но $p^* > \hat{p} = \tilde{p}$. Однако это локальная СПР не является истинным равновесием, так как производитель с максимальным объемом предложения на форвардном рынке может увеличить свою прибыль путем переброски всего объема своего предложения на спотовый рынок.*

в) *СПР с неактивным ограничением производственных мощностей существует в том и только том случае, когда* $\bar{D} - cd \leqslant \frac{n^2+1}{n}\bar{q}$. *В этом случае* $\hat{p} = \frac{\bar{D}+n^2cd}{d(n^2+1)}$. *Объемы предложения каждой фирмы равны* $\hat{q}_a^f = \frac{(n-1)(\bar{D}-cd)}{n^2+1}, \hat{q}_a^s = \frac{\bar{D}-cd}{n^2+1}$.

Доказательство. См. Приложение.

Рис. 2 показывает типы СПР рассматриваемой модели в зависимости от соотношения между значением спроса по цене, равной предельным издержкам $\bar{D} - cd$, и суммарного максимального объема предложения $n\bar{q}$.

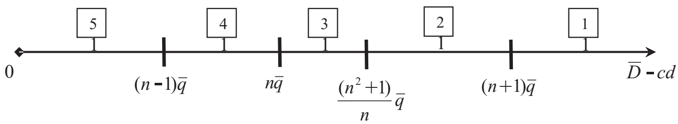

Рис. 2. Виды СПР для двухэтапной модели с ограниченными производственными мощностями.

1) При $(n+1)\bar{q} \leqslant \bar{D} - cd$ в модели существует равновесие Нэша, которому соответствует конкурентное равновесие одноэтапной модели с ценой $\hat{p} = \frac{\bar{D}-Q}{d}$ равной цене Вальраса. При этом ограничения производственных мощностей являются активными: $q_a^* = \bar{q}$. Для любого $\hat{q}_a^f < \bar{q}$, $a \in A$, аналогичное СПР с $\hat{q}_a^f + \hat{q}_a^s = \bar{q}$ существует для двухэтапной модели.

2) При $\frac{n^2+1}{n}\bar{q} \leqslant \bar{D} - cd < (n+1)\bar{q}$ существует локальное равновесие соответствующее конкурентному исходу. Однако это равновесие не является устойчивым в данной модели, а всем производителям оказывается при этом выгодно покинуть форвардный рынок. Таким образом, СПР в данном случае не существует.

3) При $n\bar{q} \leqslant \bar{D} - cd < \frac{(n^2+1)}{n}\bar{q}$ существует описанное выше локальное СПР. Кроме того, в этой области существует равновесие Бушнелла (с неактивными ограничениями производственной мощности): суммарный объем предложения каждого производителя a равен $\hat{q}_a = \frac{n(\bar{D}-cd)}{n^2+1}$, равновесная цена равна $\hat{p} = \frac{\bar{D}+n^2cd}{d(n^2+1)} < p^*$.

4) При $(n-1)\bar{q} \leqslant \bar{D} - cd < n\bar{q}$ существует равновесие Бушнелла (см. выше).

5) При $0 \leqslant \bar{D} - cd < (n-1)\bar{q}$ также существует равновесие Бушнелла. Однако в этом случае двухэтапный аукцион Курно оказывается неоптимальным способом организации торгов, поскольку аукцион Бертрана-Эджворта дает равновесие, совпадающее с конкурентным.

2.3. МОДЕЛЬ С ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМ ПРАВИЛОМ РАЦИОНИРОВАНИЯ

При равенстве цен $p^s = p^f = p$, естественно предположить, что любой производитель с резервной ценой $p^r > p^f$ с равной вероятностью, не зависящей от p^s, покупает товар на форвардном рынке. Производители с более низкими резервными ценами ($p^r < p^f$) товар покупать не будут. Рис. 3 иллюстрирует остаточную функцию спроса, которая возникает при таком правиле рационирования потребителей. Для данной функции остаточного спроса в игре описывающей спотовый рынок, существуют два локальных равновесия. Первое из этих равновесий соответствует области крутого наклона функции остаточного спроса («рынок медведей»). Суммарная функция предложения Курно при этом равна $S_1(p) = nd(p-c)$, а остаточный спрос равен $D^0_{pr}(p, q^f) = \max\{0, \bar{D} - dp - q^f)$.(В этом разделе рассматривается модель без ограничений на производственные мощности). Равновесная цена в этом случае равна

$$p_1 = p^* - \frac{q^f}{d(n+1)} \tag{3}$$

Объем предложения по цене p_1 равен

$$q^{s_1} = nd(\Delta p - \frac{q^f}{d(n+1)}), \text{ где } \Delta p = p - c. \tag{4}$$

Второе равновесие соответствует области пологого наклона функции остаточного спроса: $D^2_{pr}(p, q^f) = D(p)(1 - \frac{q^f}{D(p^f)})$. Равновесная цена и соответствующий объем предложения в этом случае равны:

$$p_2 = p^* > p_1, \quad q^{s_2} = nd\Delta p\Big(1 - \frac{q^f}{nd\Delta p + \frac{wq^f}{n+1}}\Big) < q^{s_1} \tag{5}$$

(«рынок быков», см. рис. 3).

Эти результаты следуют из необходимого условия (1), (2) существования равновесия Курно. Следующее утверждение устанавливает важную особенность рассматриваемого двухэтапного рынка.

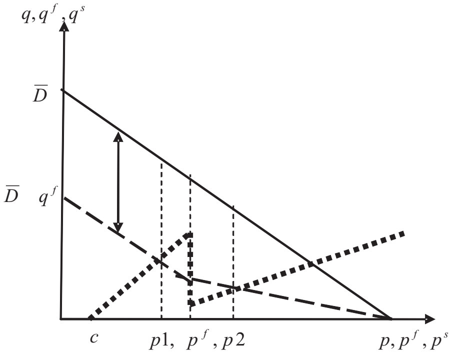

Рис. 3. Функция предложения Курно на спотовом рынке для двухэтапной модели с правилом пропорционального рационирования.

Утверждение 4. *В данной модели СПР в чистых стратегиях не существует.*

Доказательство. От противного, предположим, что существует СПР со стратегиями $(q_a^f, q_a^s(q^f)), a \in A$. Тогда ситуация $(q_a^s(q^f), a \in A)$ соответствует локальному равновесию Нэша на «бычьем рынке» или локальному равновесию Нэша на «медвежьем рынке». Либо $q^s = 0$, что возможно, если остаточный спрос при $p = c$ равен 0. Но набор $q_a^f, a \in A$, для которого $\sum q_a^f \geqslant D(c)$, не является равновесием Нэша одноэтапного аукциона Курно. Учитывая условие отсутствия арбитража, получим $p^f = p^s = p_1$ в первом случае, и $p^f = p^s = p_2$ во втором случае. Заметим, что такие стратегии не являются СПР, так как любой производитель с $q_a^s(q^f) > 0$ может увеличить свою прибыль, уменьшив свой объем предложения q_a^s на спотовом рынке в первом случае, и увеличив q_a^s во втором случае. (Это следует из условий первого порядка для существования локального равновесия Нэша и из-за разного наклона функции остаточного спроса справа и слева от точки $p^f = p^s$).

Какого рода равновесия существуют для такой модели? Равновесие в смешанных стратегиях. Однако, практика показывает, что независимые смешанные стратегии не применяются на подобных рынках. Другая интересная возможность – это попытаться найти СПР в смешанных коррелированных стратегиях.

Предположим, что при известном объеме предложения на форвардном рынке q^f, стратегии производителей на спотовом рынке определяются случайной величиной, которая может принимать два значения: $\omega = 0$ и $\omega = 1$ с вероятностями w и $1-w$ соответственно, $w \in (0,1)$. Пусть при $\omega = 0$ реализуется равновесие с низкой ценой, а при $\omega = 1$ - равновесие с высокой ценой. Тогда при условии риск-нейтральности арбитражеров условие отсутствия арбитража означает, что $p^f = wp_1 + (1-w)p_2 = p^* - \frac{wq^f}{d(n+1)}$, $w \in (0,1)$.

Теперь найдем равновесие на форвардном рынке при условии, что стратегии производителей на спотовом рынке уже известны. Суммарная прибыль производителя a равна $\pi_a = \pi_a^f + \omega\pi_a^{s_1} + (1-\omega)\pi_a^{s_2}$, где $\pi_a^f = (p^f - c)q_a^f = \frac{\bar{D}-dc-\omega q^f}{d(n+1)}q_a^f = (\Delta p - \frac{wq^f}{d(n+1)})q_a^f$,

$$\pi_a^{s_1} = (p_1 - c)q_a^{s_1} = \frac{(\bar{D} - dc - q^f)^2}{d(n+1)^2} = d\Big(\Delta p - \frac{q^f}{d(n+1)}\Big)^2,$$

$$\pi_a^{s_2} = (p_2 - c)q_a^{s_2} = \Big(\frac{\bar{D} - dc}{d(n+1)}\Big)^2 d\Big(1 - \frac{q^f}{nd\Delta p + \frac{wq^f}{n+1}}\Big) =$$

$$= d(\Delta p)^2\Big(1 - \frac{q^f}{nd\Delta p + \frac{wq^f}{n+1}}\Big).$$

Условия первого порядка для нахождения равновесия принимают вид:

$$(6)\quad \frac{\partial \pi_a}{\partial q_a^f} = \Delta p\Big(1 - \frac{2w}{n+1}\Big) + \frac{wq^f}{d(n+1)}\Big(\frac{2}{n+1} - 1 - \frac{1}{n}\Big) - \\ - \frac{(1-w)n\Delta p^3}{(n\Delta p + \frac{w}{d(n+1)}q^f)^2} = 0$$

Утверждение 5. *В рассматриваемой двухэтапной модели СПР в смешанных коррелированных стратегиях существует при* $w \in (w_1(n), w_2(n))$*, при этом нижние и верхние границы интервала указаны в табл. 1. Для любого* w *из найденного интервала СПР определяется из* (3)–(5)*, а равновесный объем предложение каждого производителя на форвардном рынке* $\hat{q}_a^f$ *находится как максимальный корень уравнения* (6)*. Значение суммарного предложения на форвардном рынке составляет* $\hat{q}^f = \frac{d}{w}\Delta p(\frac{n^5+(1-w)(n^4-2n^2-1)+n^3(1-2w)}{n^2(1+n^2)})$ *с точностью* $o((1-w)^2)$*.*

Доказательство. См. Приложение.

Таблица 1.

n	w_1	w_2
2	0,687	0,793
3	0,772	0,863
5	0,866	0,917
7	0,907	0,940
10	0,937	0,957

В табл. 2 представлены соотношения равновесных цен для исследуемой и классической моделей олигополии по Курно. Видно, что возможность заключения форвардных контрактов снижает рыночную власть производителей. В табл. 3 показано соответствующее этому факту увеличение суммарного предложения для случая двухэтапной модели по сравнению с одноэтапной моделью.

Таким образом, результаты о соотношении равновесных цен и объемов оказались близки к результатам Бушнелла. Отличие в том, что в двухэтапной модели с правилом пропорционального рационирования существует неопределенность: ожидаемая (а

Таблица 2.

n	$\dfrac{p^f - c}{p^* - c}$	$\dfrac{p^f - c}{p^* - c}\Big\vert_{w_1}$	$\dfrac{p^f - c}{p^* - c}\Big\vert_{w_2}$
2	$\dfrac{13+23w}{60}$	0,480	0,520
3	$\dfrac{7+29w}{90}$	0.326	0.367
5	$\dfrac{19+206w}{975}$	0,202	0,213
7	$\dfrac{37+747w}{4900}$	0,146	0,150
10	$\dfrac{301+11799w}{111100}$	0,102	0,104

Таблица 3.

n	$\dfrac{q}{q^*}\Big\vert_{w_1}$	$\dfrac{q}{q^*}\Big\vert_{w_2}$
2	1,333	1,276
3	1,273	1,228
5	1,18	1,169
7	1,133	1,128
10	1,095	1,093

не фактическая) цена на спотовом рынке совпадает с ценой на форвардном рынке, при этом, как правило, на спотовых торгах реализуется цена более низкая, чем цена на форвардных торгах.

3. Заключение

Для симметричной олигополии с постоянными предельными издержками и ограниченными производственными мощностями были найдены условия, при которых введение возможности заключения форвардных контрактов снижает рыночную власть производителей и увеличивает суммарное общественное благосостояние. В частности:

1) В случае, когда суммарная производственная мощность существенно превосходит спрос по цене равной предельным издержкам, т. е. когда даже уход с рынка производителей не способен повлиять на равновесную цену, оптимальным является проведение аукциона Бертрана-Эджворта, в котором реализуется конкурентное равновесие с ценой, равной предельным издержкам. При этом введение форвардного рынка может только увеличить рыночную власть производителей.

2) В случае, когда спрос по цене, равной предельным издержкам, существенно превосходит суммарную производственную мощность (так что ограничение производственной мощности является активным), введение форвардного рынка никак не влияет на цены и уже исход одноэтапного аукциона Курно (и аукциона функций предложения единой цены) является конкурентным равновесием.

3) В ситуации, когда ограничение производственной мощности неактивно, получаются результаты, подобные работе [5], т. е. введение форвардного рынка ограничивает рыночную власть производителей примерно так же, как увеличение числа производителей на рынке с n до n^2. Имеет место понижение цен и повышение выпуска. В случае пропорционального рационирования потребителей в модели существует СПР в коррелированных смешанных стратегиях, а на спотовом рынке имеет местно эндогенная неопределенность: как правило, на спотовых торгах реали-

зуется «рынок медведей» с более низкими ценами, реже – «рынок быков» с более высокими ценами.

4) В промежуточной области, близкой к 2), в двухэтапном аукционе Курно СПР не существует.

Так как на рынке электроэнергии соотношение между функцией предложения Вальраса и суммарной производственной мощностью часто меняется, оптимальным с точки зрения увеличения суммарного благосостояния может оказаться применение различных типов аукционов для организации торгов в пиковые и непиковые периоды.

Одной из важных задач для дальнейшего исследования является обобщение полученных результатов на случай, когда существует несколько типов производственных мощностей.

Литература

1. ВАСИН А.А., ВАСИНА П.А. *Рынки и аукционы однородного товара* // Препринт # 2005/047. – М.: Российская Экономическая Школа, 2005. – 51 С.
2. ALLAZ B., VILA J.-L. *Cournot competition, forward markets and efficiency* // – Center HEC-ISA and Stern School of Business, NY University, 1989.
3. ALLAZ B., VILA J.-L. *Cournot competition, futures markets and efficiency* // J. of Economic Theory. – 1993. – № 1. – P. 1–16.
4. ALLEN B., HELLWIG M. *Bertrand-Edgeworth oligopoly in large markets*// Review of Economic Studies. – 1986. – Vol. 53. – P. 175–204.
5. BUSHNELL J. *Oligopoly equilibria in electricity contract markets*// CSEM Working Paper, University of California Energy Institute. – 2005. – WP-148.
6. GREEN R. *The Electricity contract market in England and Wales*// J. of Industrial Economics. – 1999. – Vol. XLII. – P. 107–124.

7. HUGHES J.S., KAO J.L. *Strategic forward contracting and observability* // Int. J. of Industrial Organization. – 1997. – P. 121–133.
8. KLEMPERER P.D., MEYER M.A. *Supply function equilibrium in oligopoly under uncertainty* // Econometrica. – 1989. – Vol. 57. – P. 1243–1277.
9. MAHENC P., SALANIE F. *Softening competition through forward trading* // J. of Economic Theory. – 2004. – № 2. – P. 282–293.
10. NEWBERY D.M. *Competition, contracts, and entry in the electricity spot market* // RAND J. of Economics. – 1998. – Vol. 29, № 4. – P. 726–749.
11. VASIN A.A., VASINA P.A. *Models of supply functions competition with application to the network auctions* // – Moscow: EERC, 2005.
12. VASIN A.A., VASINA P.A. *Electricity markets analysis and design* // Working paper # 2006/053. – Moscow, New Economic School, 2006. – 23 p.
13. WOLFRAM C. *Electricity markets: should the rest of the world adopt the United Kingdom's reforms?* // Regulation. – 1999. – Vol. 22, № 4. – P. 48–53.

4. Приложение

4.1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 2.

Из необходимого условия для существования равновесия в модели Бертрана-Эджворта $s_a = \tilde{p}$, $a \in A$ в ситуации равновесия для модели симметричной олигополии. Таким образом, могут реализовываться две возможные ситуации, показанные на рис. 4. В случае а) $\bar{D} - cd \leqslant n\bar{q}$ - ограничения производственных мощностей являются неактивными, и $\tilde{p} = c$. В этом случае, равновесие существует тогда и только тогда, когда $\bar{D} - cd \leqslant (n-1)\bar{q}$. В такой ситуации увеличение цены одним из производителей порождает ситуацию, в которой остальные производители полностью покры-

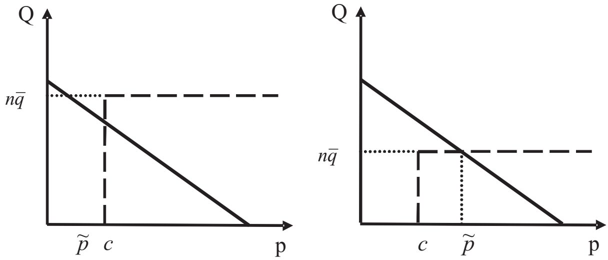

Рис. 4. a. Неактивное ограничение производственной мощности. b. Активное ограничение производственной мощности.

вают весь спрос на рынке по цене c – таким образом, назначение более высокой цены оказывается производителю невыгодно. И наоборот, при $n\bar{q} \geqslant \bar{D} - cd > (n-1)\bar{q}$ любой производитель может увеличить свой выигрыш назначая цену $s_a > c$, так как остаточный спрос положителен в некоторой окрестности c.

Если $\bar{D} - cd > n\bar{q}$, то $\tilde{p} = \frac{\bar{D} - n\bar{q}}{d}$ (рис. 4b). Набор стратегий ($\bar{s}_a = \tilde{p}, a \in A$) будет равновесным по Нэшу в случае, когда ни одному из производителей не выгодно увеличивать заявленную им цену, т. е. $(\tilde{p} - c)\bar{q} \geqslant (s_a - c)D(s_a, \hat{Q}(\bar{s})) = \left\{\begin{array}{l} ((n-1)\bar{q}\,(s_a - c) \text{ при } p = \tilde{p}, \\ \bar{q} \text{ при } s_a > p \end{array}\right\} = (s_a - c)(\bar{D} - ds_a - (n-1)\bar{q})$ для любого $s_a > \tilde{p} \quad \Leftrightarrow \quad (s_a - p)\bar{q} \leqslant d(s_a - p)(s_a - c)\ \forall s_a \geqslant \tilde{p} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{q} \leqslant d(\tilde{p} - c) = \bar{D} - n\bar{q} - cd \quad \Leftrightarrow \quad (n+1)\bar{q} \leqslant \bar{D} - cd$.

При пропорциональном правиле рационирования остаточный спрос равен $D_{pr}(p, \hat{Q}) = D(p)(1 - \sum\limits_{p' < p} \frac{\hat{Q}_{p'}}{D(p')})$. Отсюда условие существования равновесия Нэша имеет вид: $(\tilde{p} - c)\bar{q} \geqslant \frac{1}{n}(s_a - c)(n\bar{q} + d\tilde{p} - ds_a) \Leftrightarrow \quad (\tilde{p} - c)\bar{q} \geqslant (s_a - c)\bar{q} - \frac{d(s_a - c)(s_a - \tilde{p})}{n} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d(s_a - c)}{n}(s_a - \tilde{p}) \geqslant (s_a - \tilde{p})\bar{q} \quad \forall\, s_a \geqslant \tilde{p} \Leftrightarrow \quad d(\tilde{p} - c) \geqslant n\bar{q} \quad \Leftrightarrow \bar{D} - cd \geqslant 2n\bar{q}$.

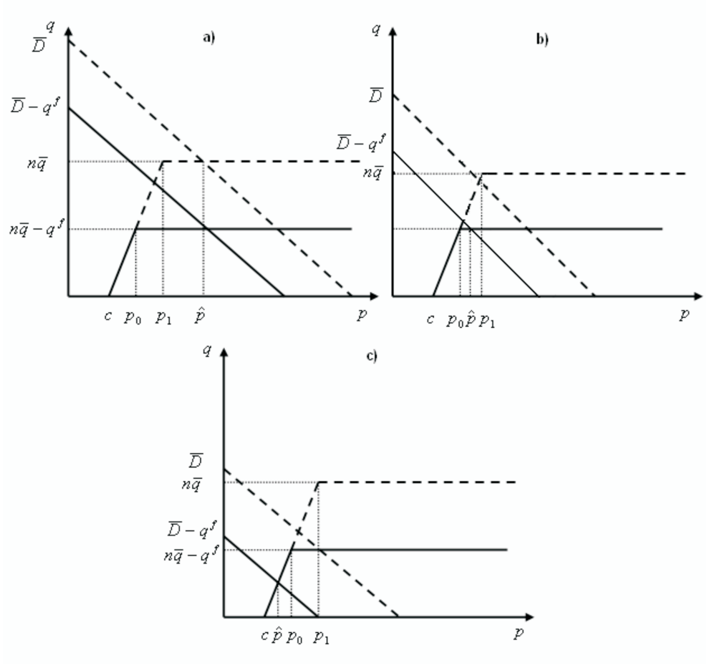

Рис. 5.

4.2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 3.

Пусть торги на форвардном рынке завершились, и суммарный объем товара, проданный на форвардной рынке составил $q^f = \sum\limits_a q_a^f$, $a = \overline{1,n}$. Тогда остаточный спрос на спотовом рынке равен $D(p,q^f) = \bar{D} - dp - q^f$, а функция суммарного предложения Курно на спотовом рынке равна $S_C(p,q^f) = \begin{cases} nd(p-c),\, c \leqslant p \leqslant p_0 \\ n\bar{q} - q^f,\, p > p_0 \end{cases}$, $p_0 = \frac{n\bar{q}+ncd-q_f}{nd}$.

а) Пусть $(n+1)\bar{q} \leqslant \bar{D} - cd$. Найдем значение объема q^f продаж на форвардном рынке, при котором функция остаточного спроса на спотовом рынке пересекает функцию суммарного остаточного предложения Курно на горизонтальном участке. В этом случае цена на спотовом рынке совпадает с ценой на форвардном рынке (рис. 5a): $\hat{p} = p^s = p^f = \frac{\bar{D}-n\bar{q}}{d} = \tilde{p}$, суммарный объем товара, проданного на спотовом рынке равен $\hat{q}^s = n\bar{q} - q^f$. Так как $D(p_1) = n\bar{q}$, производители продадут весь предложенный ими объем на рассматриваемом двухэтапном аукционе. Заметим, что цена p_1 не зависит от объема q^f продаж на форвардном рынке. Поэтому, производителю a невыгодно изменять объем q_a^f своего предложения на форвардном рынке, так как такое отклонение не изменит равновесную цену. При этом прибыль производителя $\hat{\pi}_a = (\hat{p} - c)(q_a^f + q_a^s) = \frac{\bar{D}-cd-n\bar{q}}{d}\bar{q}$ остается неизменной, так как $\frac{\partial \pi_a}{\partial q_a^f} = 0 \; \forall\, q_a^f \in [0, \bar{q}]$. Таким образом, при $(n+1)\bar{q} \leqslant \bar{D} - cd$ для любого значения q^f в рассматриваемой двухэтапной модели существует СПР с исходом, соответствующим равновесию в одноэтапной модели Курно при активном ограничении на производственные мощности: $\hat{q}_a^f + \hat{q}_a^s = \bar{q}$ для любого $a \in A$.

б) Пусть $\bar{D} - cd < (n+1)\bar{q}$. Найдем суммарный объем q^f предложения на форвардном рынке, при котором функция остаточного спроса пересекает функцию суммарного предложения Курно на спотовом рынке на горизонтальном участке последней. При $\bar{D} - cd < (n+1)\bar{q}$ такое пересечение возможно при $p_0 \leqslant \hat{p} \leqslant p_1$ (рис. 5b) $\Leftrightarrow$

$$(7) \quad \frac{n\bar{q} + ncd - q_f}{nd} \leqslant \frac{\bar{D} - n\bar{q}}{d} \leqslant \frac{\bar{q} + cd}{d} \quad \Leftrightarrow$$
$$(n+1)n\bar{q} - n(\bar{D} - cd) \leqslant q^f.$$

Учитывая, что $q^f \leqslant n\bar{q}$, получим следующее условие существования СПР: $n\bar{q} \leqslant D - cd \leqslant (n+1)\bar{q}$.

Не ограничивая общности, предположим, что производитель a предлагает на форвардном рынке максимальный объем товара q_a^f, $q_a^f > \frac{q^f}{n}$. Рассмотрим ситуацию, когда все производители, кроме производителя a выбирают локально равновесные стратегии, найденные выше, а производитель a перебрасывает весь объем своего предложения на форвардном рынке на спотовый рынок таким образом, что неравенство (7) не выполнено: $\sum\limits_{b \neq a} \hat{q}_b^f < (n+1)n\bar{q} - n(\bar{D} - cd)$. В этом случае функция остаточного предложения Курно на спотовом рынке имеет вид (рис. 6):

$$S^C(p) = \begin{cases} 0,\ p < c \\ (p-c)nd,\ p \in [c; p_0) \\ (p-p_0)d + n\bar{q} - \sum\limits_b \hat{q}_b^f,\ p \in [p_0; p_1) \\ n\bar{q} - \sum\limits_{b \neq a} \hat{q}_b^f,\ p \geqslant p_1\,, \end{cases}$$

где $p_0 = c + \frac{n\bar{q} - \sum\limits_b \hat{q}_b^f}{nd}$, $p_1 = c + \frac{\bar{q}}{d}$. Тогда новая равновесная цена p' удовлетворяет соотношению: $(p'-p_0)d + n\bar{q} - \sum\limits_b \hat{q}_b^f = \bar{D} - dp' - \sum\limits_{b \neq a} \hat{q}_b^f \quad \Leftrightarrow p'd - cd - \bar{q} + \frac{\sum\limits_b \hat{q}_b^f}{n} + n\bar{q} - \sum\limits_b \hat{q}_b^f = \bar{D} - dp' - \sum\limits_{b \neq a} \hat{q}_b^f$. Учитывая, что $\sum\limits_b \hat{q}_b^f = n\hat{q}_b^f$, получаем новую равновесную цену p' и новый объем q_a суммарного предложения производителя a: $p' = \frac{1}{2d}\left(\bar{D} + cd - (n-1)\bar{q}\right)$, $q_a = \frac{1}{2}((\bar{D} - cd) - (n-1)\bar{q})$. При этом прибыль производителя a составит: $\pi'_a(q_a) = (p'-c)q_a = \frac{\left(\bar{D} - cd - (n-1)\bar{q}\right)^2}{4d}$. Если $\pi'_a(q_a^{f'}) > \hat{\pi}_a$, то производителю выгодно изменить объем своего предложения на форвардном рынке тогда и только тогда, когда

$$\frac{\left(\bar{D} - cd - (n-1)\bar{q}\right)^2}{4d} > \frac{\bar{D} - cd - n\bar{q}}{d}\bar{q}. \tag{8}$$

При $\bar{D} - cd < (n+1)\bar{q}$ неравенство (8) выполнено, и производитель a имеет возможность увеличить свою прибыль. Таким образом, при $n\bar{q} \leqslant \bar{D} - cd \leqslant (n+1)\bar{q}$ найденное локальное равновесие является неустойчивым в рассматриваемой модели.

Заметим, что в случае отклонения одного из производителей, прибыль остальных производителей возрастает.

в) Пусть теперь $\bar{D} - cd < n\bar{q}$. Суммарный объем q^f предложения на форвардном рынке, при котором функция остаточного спроса пересекает функцию суммарного предложения Курно на спотовом рынке на наклонном участке, удовлетворяет нера-

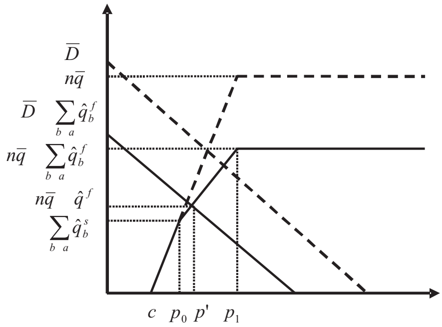

Рис. 6.

венству: $\hat{p} < p_0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\bar{D}+ncd-q^f}{d(n+1)} < \frac{n\bar{q}+ncd-q^f}{nd} \quad \Leftrightarrow \quad q^f < (n+1)n\bar{q} - n(\bar{D} - cd)$.

Объемы предложения на спотовом рынке при цене $\hat{p}$ равны: $\hat{q}_a^s = d(\hat{p} - c) = \frac{\bar{D}-cd-q^f}{n+1}$, $a \in A$. Эта ситуация соответствует двухэтапной модели, рассмотренной Бушнеллом. Определим оптимальный объем предложения q_a^f: предположим, что все производители, кроме производителя a выбирают свои форвардные стратегии q_b^f, $b \neq a$, а производитель a предлагает объем q_a^f на форвардном рынке. Прибыль производителя a равна: $\pi_a(\hat{p}, q_a) = (q_a^s + q_a^f)(\hat{p} - c) = \left(\frac{\bar{D}+ncd-q_a^f-\sum\limits_{b\neq a} q_b^f}{d(n+1)} - c\right)\left(q_a^f + \frac{\bar{D}-cd-q_a^f-\sum\limits_{b\neq a} q_b^f}{n+1}\right)$.

Производитель a выбирает стратегию q_a^f так, чтобы максимизировать свою прибыль. Тогда условие первого порядка имеет вид: $\frac{\partial \pi_a(\hat{p}, q_a^f, q_a^s(q_a^f))}{\partial q_a^f} = 0$. Так как мы рассматриваем случай симметричной олигополии, то: $-\frac{1}{d(n+1)}\left(q_a^f + \frac{\bar{D}-cd-nq_a^f}{n+1}\right) + \left(\frac{\bar{D}+ncd-nq_a^f}{d(n+1)} - c\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 0 \Leftrightarrow -q_a^f - (\bar{D} - cd) + n(\bar{D} - cd) - n^2 q_a^f = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{q}_a^f = \frac{n-1}{n^2+1}(\bar{D} - cd)$, $\hat{q}_a^s(q_a^f) = \frac{\bar{D}-cd}{n^2+1}, \hat{p} = \frac{\bar{D}+n^2cd}{d(n^2+1)}$. Так как $q_a = q_a^f + q_a^s \leqslant \bar{q}$, то при $\bar{D} - cd \leqslant \frac{(n^2+1)\bar{q}}{n}$ существует равновесия Бушнелла.

4.3. Доказательство утверждения 5.

Произведем замену $\frac{wq^f}{d(n+1)} + n\Delta p = z$. Тогда условие первого порядка (6) принимает вид кубического уравнения:

$$(9)\ \ \Phi(z) = -z^3\left(\frac{1+n^2}{n(n+1)}\right) + z^2\Delta p\left(2+n-\frac{2(w+n)}{n+1}\right) - (1-w)n\Delta p^3 = 0$$

Проанализируем поведение этой функции, изучая ее производную $\Phi'(z) = -3z^2\left(\frac{1+n^2}{n(n+1)}\right) + 2z\Delta p\left(2+n-\frac{2}{n+1}(w+n)\right)$. Локальный минимум функции достигается при $z_1 = 0$, локальный максимум – при $z_2 = \frac{2}{3}n\Delta p\left(\frac{n^2+n+2(1-w)}{1+n^2}\right)$, а функция $\Phi(z)$ имеет вид, показанный на рис. 7. Из логических ограничений на объемы предложения $q^f, q_a^{s_1}, q_a^{s_2}$ (должны быть неотрицательными) имеем в пересчете для z следующие ограничения:

$$(10)\qquad n\Delta p \leqslant z \leqslant n\Delta p\frac{n+1}{n+1-w}.$$

Заметим, что $\Phi(n\Delta p) = \frac{\Delta p(n^2-nw+w-1)}{n} > 0$ для любого $n > 1$ и $\Delta p > 0$, $\Phi'(n\Delta p) = \frac{-n^2+2n+4(1-w)-3}{n+1} < 0$ на найденном выше интервале. Таким образом, единственное подходящее нам решение (3) – это максимальный корень рассматриваемого кубического уравнения, при условии, что этот корень удовлетворяет второму неравенству из (10).

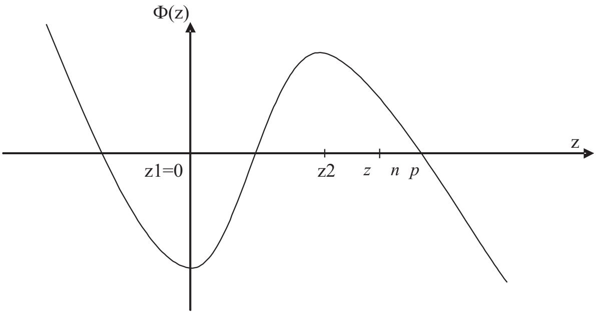

Рис. 7. График функции $\Phi(z)$.

Необходимо определить интервал значений w, при которых решение кубического уравнения существует и является равновесием. При $w = 1$ получим $\Phi((n+1)\Delta p) = \frac{-n^2-2n-1}{n} < 0$. Отсюда, верхняя граница для w - это 1. Нижняя граница допустимого интервала может быть определена с помощью итерационного метода, или разложением функции $\Phi(z)$ в ряд Тейлора, учитывая что $\varepsilon = 1 - w$. В результате вычислений, с точностью до 10^{-3} получены следующие нижние граничные значения для w в зависимости от n: $\underline{w}(2) = 0{,}637; \underline{w}(3) = 0{,}742; \underline{w}(5) = 0{,}832; \underline{w}(7) = 0{,}875; \underline{w}(10) = 0{,}909$.

При фиксированном w из допустимого интервала, аналогичными методами можно найти $z(w,n)$, учитывая что $\Phi(z)$ - гладкая монотонная функция на интервале (10). Суммарный объем предложения q^f на форвардном рынке, цены p^f и p_1, объемы предложения на спотовом рынке q^{s_1}, q^{s_2}определяются по следующим формулам:

$$\hat{p}^f = p^s = wp_1 + (1-w)p_2 = p^* - \frac{wq^f}{d(n+1)} =$$

$$= p^* - \Delta p\Big(\frac{n^5 + (1-w)(n^4 - 2n^2 - 1) + n^3(1-2w)}{n^2(1+n^2)(n+1)}\Big)$$

$$p_1 = p^* - \frac{1}{w}\Delta p\Big(\frac{n^5 + (1-w)(n^4 - 2n^2 - 1) + n^3(1-2w)}{n^2(1+n^2)(n+1)}\Big),$$

$$p_2 = p^*,$$

$$\hat{q}^f = \frac{d}{w}\Delta p\Big(\frac{n^5 + (1-w)(n^4 - 2n^2 - 1) + n^3(1-2w)}{n^2(1+n^2)}\Big),$$

$$q^{s_1} = nd\Big(\Delta p - \frac{q^f}{d(n+1)}\Big),$$

$$q^{s_2} = nd\Delta p\Big(1 - \frac{q^f}{nd\Delta p + \frac{wq^f}{n+1}}\Big).$$

На спотовом рынке из-за существования двух разных участков функции спроса, образовавшихся в результате пропорционального рационирования потребителей, для производителя может оказаться выгодным отклониться от найденных нами выше локально равновесных стратегий и изменить свой объем производства таким образом, что новая цена будет отвечать другому участку функции спроса. Вообще говоря, найденные нами выше равновесия могут оказаться локальными, но не глобальными. Ниже мы рассматриваем оба возможных варианта отклонения и исследуем равновесия на устойчивость к большим отклонениям.

Исследование устойчивости локального равновесия по Нэшу в случае реализации низкой цены на спотовом рынке. Для производителя может оказаться выгодным отклониться от найденной нами выше стратегии – объема q^{s_1}. Он может начать сокращать свой объем, тем самым увеличивая равновесную цену. Для линейной функции спроса необходимое условие равновесия является достаточным. Поэтому сокращение объема предложения данного игрока, недостаточное для того, чтобы новая цена превзошла форвардную цену, не позволит производителю увеличить свою прибыль. Но заметим, что правый участок функции спроса у нас более пологий, следовательно, на этом участке сокращение объема приводит к более значительному увеличению цены. Таким образом найденная ранее пара (равновесные объемы, равновесная цена) может не быть равновесие в рассматриваемой модели.

Сравнивая ожидаемые выигрыши в случае применения найденной локально равновесной стратегии и в случае вышеописанного отклонения, можно найти условия существования равновесия в рассматриваемой модели. Прибыль производителя в случае использования найденной локально равновесной стратегии составит $\pi_I = q_1(p_1 - c) = d(p_1 - c)^2$, так как $q_1 = d(p_1 - c)$. В случае вышеописанного отклонения, новые локально равновесные объемы могут быть получены из условий первого порядка, и равны $v_1^{\text{new}} = Kd(p_1^{\text{new}} - c) = \frac{K}{2}(\bar{D} - dc) - \frac{n-1}{2}q_1$, где $K = 1 - \frac{q^f}{D(p^f)}$ доля неудовлетворенного спроса после проведения форвардных торгов. Ожидаемый выигрыш в данной ситуации равен $\widetilde{\pi_{II}} = Kd(p_1^{\mathrm{new}} - c)^2$. Отсюда условие устойчивости равновесия имеет вид: $d(p_1 - c)^2 \geqslant Kd(p_1^{\mathrm{new}} - c)^2$. Локальное равновесие с низкой ценой является равновесием в рассматриваемой модели, если $w \in (w_1^1(n), w_2^1(n)) \subset (\underline{w}(n), 1)$, где $w_1^1(n), w_2^1(n)$ определяются из следующего неравенства: $f_1(q^f, n, w) = \frac{1}{4}\Bigg(1 - \frac{(n+1)q^f}{n+wq^f}\Bigg)\Bigg(1 - \frac{(n-1)(1-q^f)}{(n+1)(1-\frac{(n+1)q^f}{n+wq^f})}\Bigg)^2 - \Big(\frac{1-q^f}{n+1}\Big)^2 \leqslant 0$, где $q^f = q^f(w)$.

Приблизительные значения $w_1^1(n), w_2^1(n), \underline{w}(n)$ для $n = 2, 3, 5, 7$ и 10 приведены в табл. 4. Без ограничения общности, положим $\bar{D} - dc = 1$. Так как $n - q^f(n + 1 - w) > 0$, достаточно проверить выполнение неравенства $\phi_1(q^f, n, w) = (q^f)^2((n-3)w^2+4w)+q^f(4w^2-6(n+1)w+4n)+4nw-3n+1 \leqslant 0$. При $w = 1$ это неравенство для q^f не выполнено, так как $Discrim\phi_1 = 16(n^2 - w)(1 - w)^3 \geqslant 0 \; \forall w \in [0, 1]$,$Discrim\phi_1 = 0$ при $w = 1$. Численное решение неравенства: $q^f(w, n) \in \left(\frac{-2w^2+3w(n+1)-2n-2\sqrt{(n^2-w)(1-w)^3}}{w((n-3)w+4)}, \frac{-2w^2+3w(n+1)-2n+2\sqrt{(n^2-w)(1-w)^3}}{w((n-3)w+4)}\right)$ определяет интервал значений $(w_1^1(n), w_2^1(n)) \subset (\underline{w}(n), 1)$ величины w, при которых рассматриваемое локальное равновесие для случая $\omega = 0$ является устойчивым равновесием (см. табл. 4).

Исследование устойчивости локального равновесия по Нэшу в случае реализации высокой цены на спотовом рынке проводится аналогично вышеизложенному случаю: нужно рассмотреть ситуацию, когда при фиксированных стратегиях остальных игроков, производитель увеличивает объем своего предложения столь существенно, равновесная цена резко уменьшается и имеет место равновесие с низкой ценой (имеет место переход на крутой участок функции остаточного спроса). Сравнивая ожидаемые выигрыши в случае применения найденной локально равновесной стратегии и в случае вышеописанного отклонения, можно найти условия существования равновесия в рассматриваемой модели. Новый локальный максимум в этом случае равен $v_2^{\mathrm{new}} = d(p_2^{\mathrm{new}} - c) = \frac{1}{2}(1 - q^f - \frac{n-1}{n+1}(1 - \frac{q^f}{n+wq^f}))$, соответствующая прибыль равна $\widetilde{\pi}_I = v_2^{\mathrm{new}}(p_2^{\mathrm{new}} - c) = \frac{1}{4d}(1 - q^f - \frac{n-1}{n+1}(1 - \frac{(n+1)q^f}{n+wq^f}))^2$, в то время как прибыль без отклонения от локального равновесия равна $\pi_{II} = q_2(p^* - c) = \frac{1}{d(n+1)^2}(1 - \frac{q^f}{n+wq^f})$. Отсюда, локальное равновесие будет равновесием в рассматриваемой модели тогда и только тогда, когда $\frac{1}{4}((1 - q^f)(n+1) - (n-1)(1 - \frac{(n+1)q^f}{n+wq^f}))^2 - (1 - \frac{q^f}{n+wq^f}) \leqslant 0$, где $q^f = q^f(w)$. Это неравенство определяет нижнюю границу $w_1^2(n)$ интервала допустимых значений ω, $\omega \in (w_1^2(n), 1)$, при которых существует равновесие Нэша в рассматриваемой модели (см. табл. 1). Пересечение полученных допустимых интервалов для каждого конкретного n дает интервал $(w_1(n), w_2(n))$значений ω при котором рассматриваемые локальные равновесия образуют СПР для двухэтапной модели (см. табл. 4).

Таблица 4.

n	$\underline{w}$	w_1^1	w_2^1	w_1^2
2	0,637	0,655	0,793	0,687
3	0,742	0,722	0,863	0,764
5	0,832	0,866	0,917	0,840
7	0,875	0,907	0,940	0,879
10	0,909	0,	0,957	0,911

GAME-THEORETIC ANALYSIS OF ONE-STAGE AND TWO-STAGE HOMOGENEOUS GOOD AUCTIONS

Alexander Vasin, Moscow State University, Moscow, Dr.Sc., professor (vasin@cs.msu.su),
Anton Gusev, Moscow State University, Moscow, post-graduate student (vmik@hotbox.ru),
Agatha Sharikova, Moscow State University, Moscow, post-graduate student (Agatha.Sharikova@ubs.com).

Abstract: Forward market is a known instrument for reduction of market power of large producers. This paper examines a two-stage oligopoly environment with constant marginal cost. The outcome at both the forward and the spot market is a Cournot outcome dependent on correspondent demand and supply at the market. Producers aim to maximize their profits via choosing subgame perfect equilibrium of the two-stage game as their strategies. In the first part of the current research we extend the model by Bushnell (2005) considering a capacity constraint. Our results show that the optimal way of market organization in such a model strongly depends on the difference between the maximal production volume and the demand volume at price equal to the marginal cost. In the second part of the paper we consider proportional rationing instead of surplus maximizing rationing at the forward market. We show that for such a model there exists only an SPE in correlated mixed strategies. Producers' behavior should depend on some random variable that determines one of two possibilities for the spot market: either the "bear market", or the "bull market". We compare this SPE with Nash equilibria of one-stage markets.

Keywords: forward market, Cournot oligopoly, market power, subgame perfect equilibrium.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Д. А. Новиковым