УДК 517.9
ББК 22.18

ДИСКРЕТНАЯ АРБИТРАЖНАЯ ПРОЦЕДУРА С НЕРАВНОМЕРНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ВЕРОЯТНОСТЕЙ[1]

Менчер А.Э.[2]
(*Забайкальский государственный гуманитарно-педагогический университет имени Н.Г. Чернышевского, Чита*)

Рассматривается антагонистическая игра, связанная с арбитражной схемой Фарбера. Для случаев, когда предложения арбитра сосредоточены в трех и четырех точках с неравномерным распределением вероятностей, найдено равновесие в смешанных стратегиях.

Ключевые слова: арбитражная схема, дискретное распределение, смешанные стратегии, равновесие.

Введение

Рассмотрим бескоалиционную игру с нулевой суммой, связанную с моделью арбитражной процедуры с конечным числом предложений. Игроки L и M, именуемые, соответственно, как работник и работодатель, ведут переговоры об установлении заработной платы. Игрок L делает предложение x, а игрок M — предложение y; x и y — произвольные действительные числа.

Для достижения соглашения между игроками используется арбитражная схема Фарбера [1]. Если $x \leqslant y$, то конфликта нет и игроки соглашаются на выплату жалованья, равного $\frac{x+y}{2}$. Если же $x > y$, стороны апеллируют к арбитру A. Обозначим решение арбитра через z. Тогда из предложений x и y

[1] *Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2009. – Т. 1. № 4. – С. 78–92».*

[2] *Александр Эммануилович Менчер, кандидат физико-математических наук, доцент (MentcherAE@zabspu.ru).*

выбирается то, которое ближе к точке z. В такой игре функция выигрыша есть математическое ожидание случайной величины $H_z(x, y) : H(x, y) = EH_z(x, y)$, где

$$H_z(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{2}, & \text{если } x \leqslant y, \\ x, & \text{если } x > y, |x-z| < |y-z|, \\ y, & \text{если } x > y, |x-z| > |y-z|, \\ z, & \text{если } x > y, |x-z| = |y-z|. \end{cases}$$

Пусть $-\infty < y \leqslant 0 \leqslant x < +\infty$, а z – дискретная случайная величина. Если $z = 0$ с вероятностью, равной 1, то, очевидно, что точкой равновесия в игре является пара чистых стратегий $(0, 0)$. В статьях [2], [3] для случаев, когда z с равной вероятностью принимает значения -1 и 1, либо -1, 0 и 1, соответственно, найдено равновесие в смешанных стратегиях.

В настоящей работе рассматриваются ситуации, в которых предложения арбитра сосредоточены в трех и четырех точках и имеют неравномерное распределение. В обоих рассматриваемых случаях будем искать равновесие в игре среди смешанных стратегий. Обозначим через $f(x)$ и $g(y)$ смешанные стратегии игроков L и M, соответственно. Имеем:

$$f(x) \geqslant 0, \int\limits_0^{+\infty} f(x)dx = 1; g(y) \geqslant 0, \int\limits_{-\infty}^{0} g(y)dy = 1.$$

Благодаря симметрии, цена игры равна нулю, а оптимальные стратегии симметричны относительно оси ординат, то есть: $g(y) = f(-y)$. Следовательно, достаточно построить оптимальную стратегию только для одного из игроков, например, L.

1. Оптимальные стратегии при трех предложениях

Пусть арбитр выбирает одно из трех значений: $-1, 0, 1$, соответственно, с вероятностями $\frac{1-p}{2}$, p, $\frac{1-p}{2}$. Случаи $p=1$, $p=0$ и $p=\frac{1}{3}$ отмечены во введении.

Мы будем искать равновесие в игре в общем случае: $0<p<1$.

Теорема 1. *Если $p \in [p_0, 1)$, где p_0 – положительный корень уравнения $p^4+8p^3+4p^2+4p-1=0$, то для игрока L оптимальной является стратегия*

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant x < c, \\ \dfrac{1+p}{4p}\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{x^3}}, & \text{если } c<x<c+2, \\ 0, & \text{если } c+2 \leqslant x < +\infty, \end{cases} \tag{1}$$

где $c=\dfrac{(1-p)^2}{2p}$.

Доказательство. Будем искать оптимальную стратегию для игрока L в следующей форме:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant x < c, \\ \varphi(x), & \text{если } c<x<c+2, \\ 0, & \text{если } c+2 \leqslant x < +\infty, \end{cases} \tag{2}$$

где функция $\varphi(x)$ положительна и непрерывно дифференцируема в интервале $(c, c+2)$. Обозначим через $H(f(x), y)$ функцию выигрыша игрока M при выбранной игроком L стратегии $f(x)$. Функция $H(f(x), y)$ непрерывна на всей полуоси $(-\infty, 0]$. Стратегия (2) будет оптимальной, если $H(f(x), y)=0$ для $y \in [-(c+2), -c]$ и $H(f(x), y) \geqslant 0$ для $y \in (-\infty, -(c+2)) \cup (-c, 0]$.

Пусть $y \in [-(c+2), -c]$, тогда $-y \in [c, c+2]$ и

$$H(f(x), y)=\frac{1-p}{2}y+ \\ +p\left[\int\limits_{c}^{-y} xf(x)dx+\int\limits_{-y}^{c+2} yf(x)dx\right]+\frac{1-p}{2}\int\limits_{c}^{c+2} xf(x)dx. \tag{3}$$

Если теперь $f(x)$ – оптимальная стратегия, то из (3) получаем

$$H(f(x), -c-0) = -\frac{1+p}{2}c + \frac{1-p}{2}\int\limits_c^{c+2} xf(x)dx = 0,$$

$$H(f(x), -(c+2)+0) = -\frac{1-p}{2}(c+2) + \frac{1+p}{2}\int\limits_c^{c+2} xf(x)dx = 0,$$

откуда следуют соотношения для математического ожидания стратегии $f(x)$:

(4) $$\int\limits_c^{c+2} xf(x)dx = \frac{1-p}{1+p}(c+2) = \frac{1+p}{1-p}c = \sqrt{c(c+2)}.$$

Далее, для оптимальности стратегии $f(x)$ необходимо, чтобы $H'(f(x), y) = H''(f(x), y) = 0$ в интервале $(-(c+2), -c)$. Имеем:

(5) $$H'(f(x), y) = \frac{1-p}{2} + p\left[2yf(-y) + \int\limits_{-y}^{c+2} f(x)dx\right],$$

(6) $$H''(f(x), y) = p(3f(-y) - 2yf'(-y)),$$

откуда приходим к уравнению

$$3f(-y) - 2yf'(-y) = 0.$$

Положим $x = -y$, тогда $x \in (c, c+2)$, $f(x) = \varphi(x)$ и

$$3\varphi(x) + 2x\varphi'(x) = 0.$$

Решением этого уравнения является функция

(7) $$\varphi(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{x^3}}.$$

Определим константы c и α. Из (5) получаем

$$0 = H'(f, -c-0) = \frac{1+p}{2} - \frac{2\alpha p}{\sqrt{c}},$$

$$0 = H'(f, -(c+2)+0) = \frac{1-p}{2} - \frac{2\alpha p}{\sqrt{c+2}}.$$

Тогда

$$c = \frac{(1-p)^2}{2}, \alpha = \frac{1+p}{4p}\sqrt{c}. \tag{8}$$

Из (2), (7) и (8) следует, что $f(x)$ имеет вид (1).

Проверим выполнение условий оптимальности.

Пусть $y \in [-(c+2), -c]$. Так как при построении стратегии $f(x)$ были использованы равенства $H''(f(x), y) = 0$ в интервале $(-(c+2), -c)$, $H'(f(x), -c-0) = 0$ и $H(f(x), -c-0) = 0$, то в силу непрерывности функции $H(f(x), y)$ заключаем, что $H(f(x), y) = 0$ при $y \in [-(c+2), -c]$.

Исследуем теперь поведение функции $H(f(x), y)$ вне отрезка $[-(c+2), -c]$.

Пусть $y \in (-\infty, -(c+4)]$, тогда $-y \in [(c+4), +\infty)$ и

$$H(f(x), y) = \int\limits_{c}^{c+2} xf(x)dx = \sqrt{c(c+2)} = \frac{1-p^2}{2p} > 0.$$

Пусть $y \in [-(c+4), -(c+2)]$, тогда $-y \in [c+2, c+4]$, $-2-y \in [c, c+2]$ и

$$H(f(x), y) =$$
$$\frac{1-p}{2}\left[\int\limits_{c}^{-2-y} xf(x)dx + \int\limits_{-2-y}^{c+2} yf(x)dx\right] + \frac{1+p}{2}\int\limits_{c}^{c+2} xf(x)dx,$$

$$H'(f(x), y) = \frac{1-p}{2}\left[2(1+y)f(-2-y) + \int\limits_{-2-y}^{c+2} f(x)dx\right] =$$

$$= -\frac{(1-p^2)\sqrt{c}}{4p}\left[\frac{1}{\sqrt{(-2-y)^3}} + \frac{1}{\sqrt{c+2}}\right].$$

Так как $H(f(x), -(c+2)-0) = 0$ и $H'(f(x), y) < 0$ в интервале $(-(c+4), -(c+2))$, то $H(f(x), y) > 0$ при $y \in [-(c+4), -(c+2)]$.

Пусть $y \in [-c, -(c-2)] \cap [-c, 0]$, тогда $-y \in [c-2, c] \cap [0, c]$, $2 - y \in [c, c+2] \cap [2, c+2]$ и

$$H(f(x), y) = \frac{1+p}{2} + \frac{1-p}{2}\left[\int\limits_{c}^{2-y} xf(x)dx + \int\limits_{2-y}^{c+2} yf(x)dx\right],$$

$$H'(f(x), y) = \frac{1+p}{2} + \frac{1-p}{2}\left[2(-1+y)f(2-y) + \int\limits_{2-y}^{c+2} f(x)dx\right] =$$

$$= \frac{1+p}{2} + \frac{(1-p^2)\sqrt{c}}{4p}\left[\frac{1}{\sqrt{(2-y)^3}} - \frac{1}{\sqrt{c+2}}\right].$$

.

Далее, так как $H(f(x), -c+0) = 0$, а функция $H'(f(x), y)$ является строго возрастающей, то, если $H'(f(x), -c+0) \geqslant 0$, то $H(f(x), y) > 0$ при $y \in (-c, -(c-2)] \cap (-c, 0]$.

Имеем:

$$H'(f(x), -c+0) = \frac{1+p}{2} + \frac{(1-p^2)\sqrt{c}}{4p}\left[\frac{1}{\sqrt{(c+2)^3}} - \frac{1}{\sqrt{c+2}}\right] =$$

$$= \frac{p^2+4p-1}{4p} + \frac{(1-p)^2}{2(1+p)^2} = \frac{p^4+8p^3+4p^2+4p-1}{4p(1+p)^2}.$$

Для дальнейшего исследования заметим, что функция $c = c(p) = \dfrac{(1-p)^2}{2p}$ строго убывает в интервале $(0, 1)$.

Если $p^2 + 4p - 1 \geqslant 0$, то $p \geqslant \sqrt{5} - 2$, $0 < c \leqslant \sqrt{5} - 1 < 2$, $H'(f(x), -c+0) > 0$ и исследование условий оптимальности окончено.

Пусть теперь $p^2 + 4p - 1 < 0$. Рассмотрим функцию $F(p) = p^4 + 8p^3 + 4p^2 + 4p - 1$ на отрезке $[0, 1]$. Так как $F(0) = -1 < 0$, $F(1) = 16 > 0$ и $F'(p) = 4p^3 + 24p^2 + 8p + 4 > 0$, то существует единственная точка $p_0 \in (0, 1)$ такая, что $F(p_0) = 0$, $F(p) < 0$ при $p \in (0, p_0)$ и $F(p) > 0$ при $p \in (p_0, 1)$.

Уточним границы для констант p_0 и c. В самом деле, если $c \geqslant 2$, то $p \leqslant 3 - 2\sqrt{2}$. Имеем: $F(3 - 2\sqrt{2}) = 1448 - 1024\sqrt{2} \approx -0,15468786 < 0$.

Так как, очевидно, что $F(\sqrt{5} - 2) > 0$, то $p_0 \in (3 - 2\sqrt{2}, \sqrt{5} - 2)$ и $c \in (0, 2)$ при $p \in (p_0, 1)$.

Таким образом, $[-c, -(c-2)] \cap [-c, 0] = [-c, 0]$. Легко проверить, что $p_0 \in (\frac{1}{6}, \frac{1}{5}) \subset (3 - \sqrt{2}, \sqrt{5} - 2)$. Окончательно заключаем, что $H(f(x), y) > 0$ для $y \in (-\infty, -(c+2)) \cup (-c, 0]$ и теорема доказана.

2. Оптимальные стратегии при четырех предложениях

Пусть арбитр выбирает одно из четырех значений: -3, -1, 1, 3, соответственно, с вероятностями $\dfrac{1}{2} - p$, p, p, $\dfrac{1}{2} - p$. Ясно, что $0 \leqslant p \leqslant \dfrac{1}{2}$. Случай $p = \dfrac{1}{2}$ отмечен во введении, а случай $p = 0$ приводит к аналогичным результатам, так что мы будем искать равновесие в игре в ситуации, где $0 < p < \dfrac{1}{2}$.

Теорема 2. *Если $p \in \left(p_0, \dfrac{1}{2}\right)$, где p_0 – положительный корень уравнения $32p^5 + 16p^4 + 24p^3 + 8p^2 - 8p + 1 = 0$ из интервала $\left(\dfrac{1}{\sqrt{35}}, \dfrac{1}{5}\right)$, то для игрока L оптимальной является стратегия*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant x < c, \\ \dfrac{\sqrt{c+1}}{4p\sqrt{(x+1)^3}}, & \text{если } c < x < c+2, \\ \dfrac{\sqrt{c+3}}{4p\sqrt{(x-1)^3}}, & \text{если } c+2 < x < c+4, \\ 0, & \text{если } c+4 \leqslant x < +\infty, \end{cases} \tag{9}$$

где $c = \dfrac{\sqrt{p^2+1}}{p} - 2$.

<u>**Доказательство.**</u> Будем искать оптимальную стратегию для игрока L в следующей форме:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant x < c, \\ \varphi(x), & \text{если } c < x < c+2, \\ \psi(x), & \text{если } c+2 < x < c+4, \\ 0, & \text{если } c+4 \leqslant x < +\infty, \end{cases} \tag{10}$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ положительны и непрерывно дифференцируемы в соответствующих интервалах. Обозначим через $H(f(x), y)$ функцию выигрыша игрока M при выбранной игроком L стратегии $f(x)$. Функция $H(f(x), y)$ непрерывна на всей полуоси $(-\infty, 0]$. Стратегия (10) будет оптимальной, если $H(f(x), y) = 0$ для $y \in [-(c+4), -c]$ и $H(f(x), y) \geqslant 0$ для $y \in (-\infty, -(c+4)) \cup (-c, 0]$

Пусть $y \in [-(c+4), -(c+2)]$, тогда $-y \in [c+2, c+4]$, $-2-y \in [c, c+2]$ и

$$H(f(x), y) = \left(\frac{1}{2} - p\right) y + p \left(\int\limits_c^{-2-y} x f(x) dx + \int\limits_{-2-y}^{c+4} y f(x) dx \right) + \\ + \frac{1}{2} \int\limits_c^{c+4} x f(x) dx. \tag{11}$$

Если теперь $f(x)$ – оптимальная стратегия, то из (11) получаем

$$H(f(x), -(c+2) - 0) = \\ = -\left(\frac{1}{2} - p\right)(c+2) - p(c+2) + \frac{1}{2} \int\limits_c^{c+4} x f(x) dx = 0,$$

откуда следует равенство для математического ожидания стратегии $f(x)$:

$$\int\limits_c^{c+4} x f(x) dx = c + 2. \tag{12}$$

Далее, для оптимальности стратегии $f(x)$ необходимо, чтобы $H'(f(x),y) = H''(f(x),y) = 0$ в интервале $(-(c+4), -(c+2))$. Имеем:

$$H'(f(x),y)=\frac{1}{2}-p+p\left(2(1+y)f(-2-y)+\int\limits_{-2-y}^{c+4} f(x)dx\right), \tag{13}$$

$$H''(f(x),y) = p(3f(-2-y) - 2(1+y)f'(-2-y)), \tag{14}$$

откуда приходим к уравнению

$$3f(-2-y) - 2(1+y)f'(-2-y) = 0.$$

Положим $x = -2-y$, тогда $x \in [c, c+2]$, $f(x) = \varphi(x)$ и

$$3\varphi(x) + 2(x+1)\varphi'(x) = 0.$$

Решением этого уравнения является функция

$$\varphi(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{(x+1)^3}}. \tag{15}$$

Определим константу α. Из (13) получаем

$$0 = H'(f(x), -(c+2)-0) = \frac{1}{2} - \frac{2\alpha p}{\sqrt{c+1}},$$

Тогда

$$\alpha = \frac{\sqrt{c+1}}{4p}. \tag{16}$$

Далее, пусть $y \in [-(c+2), -c]$, тогда $-y \in [c, c+2]$, $2-y \in [c+2, c+4]$ и

$$H(f(x),y) = \frac{1}{2}y + p\left(\int\limits_{c}^{2-y} xf(x)dx + \int\limits_{2-y}^{c+4} yf(x)dx\right) + \\ + \left(\frac{1}{2}-p\right)\int\limits_{c}^{c+4} f(x)dx. \tag{17}$$

Имеем:

$$H'(f(x),y) = \frac{1}{2} + p\left(2(-1+y)f(2-y) + \int\limits_{2-y}^{c+4} f(x)dx\right), \tag{18}$$

$$H''(f(x),y) = p(3f(2-y) - 2f(-1+y)f'(2-y)), \tag{19}$$

откуда приходим к уравнению

$$3f(2-y) - 2(-1+y)f'(2-y)) = 0.$$

Положим $x = 2 - y$, тогда $x \in [c+2, c+4]$, $f(x) = \psi(x)$ и

$$3\psi(x) + 2(x-1)\psi'(x) = 0.$$

Решением этого уравнения является функция

$$\psi(x) = \frac{\beta}{\sqrt{(x-1)^3}}. \tag{20}$$

Определим константу β. Из (18) получаем

$$0 = H'(f(x), -(c+2) - 0) = \frac{1}{2} - \frac{2p\beta}{\sqrt{c+3}},$$

тогда

$$\beta = \frac{\sqrt{c+3}}{4p}. \tag{21}$$

Найдем константу c. Имеем:

$$1 = \int\limits_{c}^{c+4} xf(x)dx = \int\limits_{c}^{c+2} \frac{\sqrt{c+1}}{4p\sqrt{(x-4)^3}}dx + \int\limits_{c+2}^{c+4} \frac{\sqrt{c+3}}{4p\sqrt{(x-1)^3}}dx,$$

откуда

$$\sqrt{\frac{c+3}{c+1}} - \sqrt{\frac{c+1}{c+3}} = 2p.$$

Полагая $t = \sqrt{\dfrac{c+1}{c+3}}$, приходим к квадратному уравнению $t^2 + 2pt - 1 = 0$, положительный корень которого равен $\sqrt{p^2+1} - p$. Наконец,

$$c = \frac{\sqrt{p^2+1}}{p} - 2. \tag{22}$$

Отметим, что функция $c = c(p)$ строго убывает на полуоси $(0, +\infty)$. Так как по условию задачи $p < \frac{1}{2}$, то $c(p) > c(\frac{1}{2}) = \sqrt{5} - 2 > 0$.

Проверим выполнение условий оптимальности.

Пусть $y \in [-(c+4), -(c+2)]$. Так как при построении стратегии $f(x)$ были использованы равенства $H''(f(x), y) = 0$ в интервале $(-(c+4), -(c+2))$, $H'(f(x), -(c+2)-0) = 0$ и $H(f(x), -(c+2)-0) = 0$, то в силу непрерывности функции $H(f(x), y)$ заключаем, что $H(f(x), y) = 0$ при $y \in [-(c+4), -(c+2)]$. Аналогично приходим к выводу, что $H(f(x), y) = 0$ при $y \in [-(c+2), -c]$.

Исследуем теперь поведение функции $H(f(x), y)$ вне отрезка $[-(c+4), -c]$.

Пусть $y \in (-\infty, -(c+10)]$, тогда $-y \in [c+10, +\infty)$ и

$$H(f(x), y) = \int\limits_{c}^{c+4} xf(x)dx = c+2 = \frac{\sqrt{p^2+1}}{p} > 0.$$

Пусть $y \in [-(c+10), -(c+8)]$, тогда $-y \in [c+8, c+10]$, $-6-y \in [c+2, c+4]$ и

$$H(f(x), y) = \left(\frac{1}{2} - p\right)\left[\int\limits_{c}^{-6-y} xf(x)dx + \int\limits_{-6-y}^{c+4} yf(x)dx\right] + \\ + \left(\frac{1}{2} + p\right)\int\limits_{c}^{c+4} xf(x)dx,$$

$$H'(f(x), y) = \left(\frac{1}{2} - p\right)\left[2(3+y)f(-6-y) + \int\limits_{-6-y}^{c+4} f(x)dx\right] = \\ = -\left(\frac{1}{2} - p\right)\frac{\sqrt{c+3}}{2p}\left(\frac{4}{\sqrt{(-7-y)^3}} + \frac{1}{\sqrt{c+3}}\right) < 0.$$

Пусть $y \in [-(c+8), -(c+6)]$, тогда $-y \in [c+6, c+8]$, $-6-y \in [c, c+2]$ и

$$H(f(x),y) = \left(\frac{1}{2}-p\right)\left[\int\limits_{c}^{-6-y} xf(x)dx + \int\limits_{-6-y}^{c+4} yf(x)dx\right] + \\ + \left(\frac{1}{2}+p\right)\int\limits_{c}^{c+4} xf(x)dx,$$

$$H'(f(x),y) = \left(\frac{1}{2}-p\right)\left[2(3+y)f(-6-y) + \int\limits_{-6-y}^{c+4} f(x)dx\right] = \\ = \left(\frac{1}{2}-p\right)\frac{1}{2p}\left[(2p-1) - \frac{2\sqrt{c+1}}{\sqrt{(-5-y)^3}}\right] < 0.$$

Пусть $y \in [-(c+6), -(c+4)]$, тогда $-y \in [c+4, c+6]$, $-2-y \in [c+2, c+4]$ и

$$H(f(x),y) = \left(\frac{1}{2}-p\right)y + p\left[\int\limits_{c}^{-2-y} xf(x)dx + \int\limits_{-2-y}^{c+4} yf(x)dx\right] + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_{c}^{c+4} xf(x)dx,$$

$$H'(f(x),y) = \left(\frac{1}{2}-p\right)+p\left[2(1+y)f(-2-y) + \int\limits_{-2-y}^{c+4} f(x)dx\right] = \\ = -p - \frac{\sqrt{c+3}}{\sqrt{(-3-y)^3}} < 0.$$

Так как $H(f(x), -(c+4)-0) = 0$, то функция $H(f(x),y) > 0$ на полуоси $(-\infty, -(c+4))$.

Далее, пусть $y \in [-c, -(c-2)] \cap [-c, 0]$, тогда $-y \in [c-2, c] \cap [0, c]$, $2 - y \in [c, c+2] \cap [2, c+2]$ и

$$H(f(x), y) = \frac{1}{2}y + p\left[\int\limits_{c}^{2-y} xf(x)dx + \int\limits_{2-y}^{c+4} yf(x)dx\right] + \\ + \left(\frac{1}{2} - p\right)\int\limits_{c}^{c+4} xf(x)dx,$$

$$H'(f(x), y) = \frac{1}{2} + p\left[2(-1+y)f(2-y) + \int\limits_{2-y}^{c+4} f(x)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[(2p-1) + \frac{2\sqrt{c+1}}{\sqrt{(3-y)^3}}\right] = p + \frac{\sqrt{c+1}}{\sqrt{(3-y)^3}} > 0.$$

Если $c \leqslant 2$, то исследование окончено; при этом $p \in \left[\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{2}\right)$.

Пусть теперь $p \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{15}}\right)$, тогда $c > 2$ и пусть $y \in [-(c-2), -(c-4)] \cap [-(c-2), 0]$, тогда $-y \in [c-4, c-2] \cap [0, c-2]$, $6 - y \in [c+2, c+4)] \cap [6, c+4]$ и

$$H(f(x), y) = \left(\frac{1}{2} + p\right)y + \left(\frac{1}{2} - p\right)\left[\int\limits_{c}^{6-y} xf(x)dx + \int\limits_{6-y}^{c+4} yf(x)dx\right],$$

$$H'(f(x), y) = \frac{1}{2} + p + \left(\frac{1}{2} - p\right)\left[2(-3+y)f(6-y) + \int\limits_{6-y}^{c+4} f(x)dx\right] = \\ = 1 + p - \frac{1}{4p} + \frac{1-2p}{2p}\frac{\sqrt{c+3}}{\sqrt{(5-y)^3}}.$$

Так как $H'(f(x),y)$ строго возрастает в области задания, то $H'(f(x),y) > H'(f(x),-(c-2)+0)$. Имеем:

$$H'(f(x),-(c-2)+0) = \frac{4p^2+4p-1}{4p} + \frac{1-2p}{2p(c+3)}.$$

Пусть $4p^2 + 4p - 1 \geqslant 0$, тогда $p \geqslant \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$, $c \leqslant c\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-1} - 2 = 2\sqrt{2}+1 < 4$, $[-(c-2),-(c-4)] \cap [-(c-2),0)] = [-(c-2),0)]$ и исследование окончено.

Рассмотрим случай $p \in \left(0, \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$. Решим неравенство

$$H'(f(x),-(c-2)+0) \geqslant 0.$$

Имеем:

$$1 + p - \frac{1}{4p} + \frac{1-2p}{2}\left(\sqrt{p^2-1} - p\right) \geqslant 0,$$

$$\frac{1-2p}{2}\sqrt{p^2+1} \geqslant \frac{(1-2p)p}{2} - 1 - p + \frac{1}{4p},$$

$$(2p(1-2p)\sqrt{p^2+1})^2 \geqslant [2p^2(1-2p) - 4p - 4p^2 + 1]^2$$

и, наконец,

$$-32p^5 - 16p^4 - 24p^3 - 8p^2 + 8p - 1 \geqslant 0.$$

Исследуем поведение функции $F(p) = -32p^5 - 16p^4 - 24p^3 - 8p^2 + 8p - 1$ на отрезке $\left[0, \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right]$. Имеем: $F(0) = -1 < 0$, $F\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right) > 0$,

$$F'(p) = -160p^4 - 64p^3 - 72p^2 - 16p + 8,$$

$$F''(p) = -640p^3 - 192p^2 - 144p - 16 < 0.$$

Следовательно, $F'(p)$ строго убывает на отрезке $[0, \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}]$ и, если $F'\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right) > 0$, то $F'(p) > 0$ на этом отрезке и функция $F(p)$ строго возрастает. Имеем: $F'\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right) = -152 + 108\sqrt{2} \approx 0,735 > 0$.

Далее, из неравенства $c \leqslant 4$ следует, что $p \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{35}}$. Найдем $F\left(\dfrac{1}{\sqrt{35}}\right)$: $F\left(\dfrac{1}{\sqrt{35}}\right) = \dfrac{8928 - 1521\sqrt{35}}{35^2\sqrt{35}} < 0$.

Тогда существует точка $p_0 \in \left(\dfrac{1}{\sqrt{35}}, \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$ такая, что $F(p_0) = 0$, $F(p) < 0$ при $p \in \left(\dfrac{1}{\sqrt{35}}, p_0\right)$ и $F(p) > 0$ при $p \in \left(p_0, \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$.

Наконец, заметим, что $F\left(\dfrac{1}{5}\right) > 0$. Таким образом, $p_0 \in \left(\dfrac{1}{\sqrt{35}}, \dfrac{1}{5}\right)$ и, поскольку $c < 4$, то $[-(c-2), -(c-4)] \cap [-(c-2), 0] = [-(c-2), 0]$ и исследование окончено.

Так как $H(f(x), -c+0) = 0$, то для $p \in (p_0, 1)$ функция $H(f(x), y) > 0$ при $y \in (-c, 0]$. Теорема доказана.

Литература

1. FARBER H. *An analysis of final-offer arbitration* // Journal of conflict resolution. – 1980. – Vol. 35. – P. 683–705.
2. MAZALOV V.V., ZABELIN A.A., KARPIN A.S. *Equilibrium in arbitration game* // Probabilistic Methods in Discrete Mathematics. – 2002. – P. 41–46.

3. MAZALOV V.V., MENTCHER A.E., TOKAREVA J.S. *On a discrete arbitration procedure in three points*// Game Theory and Applications. – 2005. – Vol. XI. – P. 87–91.

DISCRETE ARBITRATION PROCEDURE WITH NONUNIFORM DISTRIBUTION

Alexsander Mentcher, Faculty of Physics and Mathematics, Zabaikalsky State Humanitarian Pedagogical University named after N. Tchernishevsky, Chita, Cand. Sc., docent (MentcherAE@zabspu.ru)

Abstract: We consider a zero-sum game related to an arbitration scheme. The arbitrator's offers are concentrated in three or four points with nonuniform distribution. The equilibrium in mixed strategies is derived.

Keywords: arbitration scheme, discrete distribution, mixed strategies, equilibrium.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А. А. Печниковым