УДК 519.711.2
ББК 60.54

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ИНФОРМАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ В СОЦИАЛЬНЫХ СЕТЯХ

Федянин Д. Н. [1]
(*Репетит-Центр, Москва*)
Чхартишвили А. Г. [2]
(*Учреждение Российской академии наук Институт проблем управления им. В.А. Трапезнкиова РАН, Москва*)

Игровая модель, используемая в работе, является композицией марковской модели социальной сети и новой модели, описывающей поведение агентов при аккордном стимулировании Центром. В статье описаны равновесия Нэша и условия на типы агентов для социальной сети. На основе этого построено оптимальное управление типами, гарантирующие максимум целевой функции Центра.

Ключевые слова: социальная сеть, равновесие по Нэшу, информационное управление.

1. Введение

В последние годы большой интерес исследователей привлекают социальные сети – см., напр., [4, 6-9], а также обзорную работу [1]. Также можно отметить монографию [5], автор которой анализирует большое число работ по исследованию формирования сетей и их динамики.

Под социальной сетью на качественном уровне понимается социальная структура, состоящая из множества элементов сети или агентов (субъектов – индивидуальных или коллективных,

---

[1] *Денис Николаевич Федянин, магистр (dfedyanin@inbox.ru).*
[2] *Александр Гедеванович Чхартишвили, главный научный сотрудник, доктор физико-математических наук (sandro_ch@mail.ru).*

например, индивидов, семей, групп, организаций) и определенного на нем множества отношений (совокупности связей между агентами, например, знакомства, дружбы, сотрудничества, коммуникации). Формально социальная сеть представляет собой граф $G(N,E)$, в котором $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ – конечное множество вершин и E – множество ребер, отражающих взаимодействие агентов.

При моделировании социальных сетей обычно исходят из предположения о том, что основная характеристика его элемента (его мнение по какому-либо вопросу, «зараженность» чем-либо в моделях распространения эпидемий и т.п.) меняется по некоторому заданному закону исходя из характеристик «соседних» элементов. В таких моделях (назовем их условно моделями первого типа) элемент сети является, по сути, пассивным.

Реже встречаются модели, где элемент сети сам выбирает характеристику (например, действие или бездействие) исходя из своих возможностей и интересов. В таких моделях (назовем их условно моделями второго типа) элемент сети является активным, т.е. обладает своим интересами (например, формализованными в виде целевой функции) и свободой выбора.

В данной работе рассматривается пример комплексной модели, в которой учитывается как пассивный, так и активный аспект элементов социальной сети. Каждый такой элемент характеризуется некоторым параметром, который может меняться под влиянием других агентов и на который может оказывать влияние управляющий орган – Центр. В то же время, каждый агент обладает целевой функцией и выбирает свое действие из множества допустимых действий.

2. Описание теоретико-игровой модели

Пусть имеется конечное множество агентов, $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, каждый из которых характеризуется параметром – типом – r_i (где $0 < r_i < 1$), целевой функцией f_i и выбирает действие x_i (где x_i неотрицательное действительное число). Целевая функция i-го агента имеет следующий вид:

(1) $$f_i(x_1,...,x_n) = x_i(x_1 + ... + x_n - 1) - \frac{x_i^2}{r_i}.$$

Содержательная интерпретация следующая: агенты прикладывают усилия x_i к некоторому совместному действию, которое окажется успешным (дает положительный вклад в целевые функции агентов) в случае, если сумма усилий превышает некоторый порог, который принимается равным 1. Если действие оказалось успешным, то выигрыш агента (первое слагаемое целевой функции) тем больше, чем больше его усилие. С другой стороны, само по себе усилие агента вносит в его целевую функцию отрицательный вклад (второе слагаемое целевой функции), который зависит от типа r_i – чем больше тип, тем «легче» агенту прикладывать усилие (например, это может быть психологически объяснено большей лояльностью, симпатией агента к совместному действию).

Для нахождения равновесия Нэша, при котором все действия положительны (т.е. максимум целевой функции каждого агента достигается в области $x_i > 0$), запишем следующую систему уравнений:

(2) $$\frac{\partial f_i(x_1,...,x_n)}{\partial x_i} = x_i - \frac{2}{r_i}x_i + (x_1 + ... + x_n - 1) = 0, \quad i \in N.$$

Удовлетворяющий этой системе набор действий точек действительно является равновесным по Нэшу, поскольку справедливо соотношение

(3) $$\frac{\partial^2 f_i(x_1,...,x_n)}{\partial x^2{}_i} = 2 - \frac{2}{r_i} < 0.$$

Для решения системы выразим действие x_i через сумму всех действий агентов (здесь и далее суммирование проводится от 1 до n):

(4) $$x_i = \frac{r_i}{2 - r_i}\left(\sum_j x_j - 1\right).$$

Далее просуммируем по всем агентам,

(5) $$\sum_{j=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{2 - r_i}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j - 1\right).$$

и введем следующие обозначения:

(6) $k_i = \dfrac{r_i}{2 - r_i}$,

(7) $\sigma = \sum_i k_i$.

Использую эти обозначения, можно записать

(8) $\sum_j x_j = \dfrac{\sigma}{\sigma - 1}$.

Из последнего соотношения видно, что система уравнений имеет решение при условии

(9) $\sigma > 1$.

При этом условии для равновесных действий агентов получаем выражение

(10) $x_i = k_i \left(\dfrac{\sigma}{\sigma - 1} - 1 \right)$,

(11) $x_i = \dfrac{k_i}{\sigma - 1}$.

Вышеприведенные выкладки доказывают следующее утверждение.

Утверждение 1. Необходимым и достаточным условием существования ненулевого равновесия является условие $\sigma > 1$.

Отметим, что полученное равновесие является неединственным, поскольку в некоторых случаях максимум целевой функции агента достигается на границе области допустимых действий, т.е. при $x_i = 0$. Сформулируем еще два утверждения, которые вместе с утверждением 1 полностью описывают структуру равновесий игры.

Утверждение 2. Набор действий (0, 0, … , 0) является равновесием по Нэшу.

Доказательство. Нетрудно видеть, что

(12) $f_i\ (0, ..., x_i, ..., 0) = x_i (x_i - 1) - \dfrac{x_i^2}{r_i},\quad i \in N$.

Первая и вторая производные этой функции по x_i в нуле отрицательны, поэтому $x_i = 0$ является точкой максимума. Утверждение 2 доказано.

Утверждение 3. Если действие хотя бы одного из агентов равно нулю и система находится в положении равновесия по Нэшу, то это равновесие (0, 0, …, 0).

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что нулю равно действие 1-го агента. Поскольку нуль является точкой максимума по x_1 (так как это равновесное действие), частная производная в нуле отрицательна:

$$(13)\quad \frac{\partial f_1(x_1,...,x_n)}{\partial x_1} = \left(2 - \frac{2}{r_1}\right)x_1 + \sum_{j \neq 1} x_j - 1 < 0,$$

откуда получаем соотношение

$$(14)\quad \left(2 - \frac{2}{r_1}\right)x_1 = 0 < 1 - \sum_{j \neq 1} x_j .$$

Последнее соотношение дает необходимое условие существования равновесия Нэша при нулевом действии 1-го агента:

$$(15)\quad \sum_j x_j < 1.$$

Выпишем теперь производную целевой функции k-го агента:

$$(16)\quad \frac{\partial f_k(x_1,...,x_n)}{\partial x_k} = \left(2 - \frac{2}{r_k}\right)x_k + \sum_{j \neq k} x_j - 1 .$$

Так как действия ограничены только снизу и функция непрерывно дифференцируема, то необходимым условием ненулевого локального максимума является равенство нулю производной, которое можно записать в следующем виде:

$$(17)\quad 2\left(\frac{r_k - 1}{r_k}\right)x_1 = 1 - \sum_{j \neq k} x_j .$$

Последнее равенство противоречиво, поскольку левая его часть отрицательна, а правая – положительна. Утверждение 3 доказано.

3. Задача информационного управления: определение желательных типов агентов

Перейдем теперь к задаче информационного управления. Введем в рассмотрение Центр, который стремится управлять типами агентов таким образом, чтобы привести их в наиболее желательное для него равновесие Нэша. В рамках данной работы будем считать, что задачей Центра является нахождение множества состояний сети (наборов типов агентов), при которых его целевая функция достигает максимального значения.

Некоторые возможные варианты целевых функций Центра подробно рассматриваются в монографии [2]. В данном случае выберем для нашей системы следующую целевую функцию:

(18) $F = -\sum_j x_j .$

Содержательно это означает, то действия агентов для Центра нежелательны, и его задачей является минимизация их суммарных действий. Примером может быть реакция систем защиты на действия злоумышленников.

Очевидно, Центру выгодны нулевые действия агентов. Поэтому он должен стремиться исключить ненулевое равновесие, т.е. сделать его невозможным. Согласно утверждению 1, ненулевое равновесие не существует при условии

(19) $\sigma \le 1.$

Переписывая последнее соотношение для типов агентов, получаем окончательно условие на невозможность ненулевого равновесия:

(20) $\sum_i \frac{r_i}{2 - r_i} \le 1.$

В случае если типы агентов одинаковы, последнее соотношение приобретает после преобразования следующий вид:

(21) $r \le \frac{2}{n+1}.$

Таким образом, мы получили условие на типы агентов, при выполнении которого Центр достигает своей цели. При этом условии в системе не существует ненулевого равновесия по Нэшу и, таким образом, единственным равновесием оказывается нулевое, при котором целевая функция Центра принимает максимальное значение.

4. Задача информационного управления: выбор оптимального воздействия на типы агентов

В данном разделе мы рассмотрим возможности Центра по осуществлению управления посредством изменения начальных мнений (типов) агента. Нетрудно видеть, что в данном случае (см. (6), (10), (17)) Центр заинтересован в уменьшении мнений агентов, поэтому будем рассматривать только воздействия, уменьшающие типы. Зависимость типа агента от воздействия на него Центра должна обладать следующими свойствами:

- быть непрерывной;
- асимптотически стремиться к нулю при увеличении воздействия Центра;
- в нуле равняться типу агента до воздействия Центра;
- монотонно убывать.

Этим условиям удовлетворяет следующая функция:

(22) $r_j^u = r_j^0 e^{-\frac{u_j}{\alpha_j}}$,

где j – номер агента, неотрицательное действительное число u_j – прилагаемое усилие Центра, r_j^0 – начальный тип агента (до воздействия Центра), r_j^u – тип агента после воздействия Центра, положительное действительное число α_j – константа, характеризующая степень влияния Центра на данного агента. Ниже также будет введено ограничение сверху на u_j.

Находясь в одной социальной сети, агенты общаются, обмениваясь мнениями. Такой обмен мнениями приводит к тому, что тип агента изменяется в соответствии с типами агентов, которым он в данный момент доверяет. В том случае, если взаимодействие агентов продолжается достаточно долго, то их мнения стабилизируются – сходятся к единому результирующему типу (условия его существования подробно описаны в [1]).

Результирующий тип можно записать как сумму исходных типов агентов с положительными весами w_j, характеризующими влиятельность агентов (подробнее см. [2-3]):

(23) $r^{\infty} = w_1 r_1^u + \ldots + w_n r_n^u$.

Естественно предположить, что сумма всех усилий Центра ограничена сверху. Обозначим такое суммарное максимальное усилие Центра *U*, которое будем называть ресурсом. Обозначив через *k* количество агентов, на которых может влиять Центр (без ограничения общности можно считать, что это первые *k* агентов), оптимизационную задачу относительно u_j можно записать в следующем виде:

(24) $\sum_{i=1}^{n} w_i r_i^0 e^{-\frac{u_i}{\alpha_i}} \to \min,$

(25) $u_j \geq 0; \forall j \leq k,$

(26) $\sum_{j=1}^{k} u_j = U; u_{k+p} = 0; p = 1,...,n-k.$

Для нахождения решения применяется метод множителей Лагранжа. Функция Лагранжа для поставленной задачи

(27) $L = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i^0 e^{-\frac{u_i}{\alpha_i}} + \lambda(\sum_{j=1}^{k} u_j - U).$

Следовательно, можно записать систему уравнений

(28) $\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u_j} L = -\dfrac{1}{\alpha_i} w_i r_i^0 e^{-\frac{u_j}{\alpha_j}} + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial \lambda} L = \sum_{j=1}^{k} u_j - U = 0. \end{cases}$

Решив уравнения, запишем следующее выражение для

(29) $u_i = \alpha_i \ln \dfrac{\alpha_i w_i r_i^0}{\lambda}.$

Теперь можно выразить λ из второго уравнения, подставив полученное выше выражение для u_i,

(30) $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \ln \dfrac{\alpha_i w_i r_i^0}{\lambda} - U = 0,$

После преобразования оно может быть записано как

(31) $\ln \lambda = \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \right)^{-1} \left(\sum \alpha_i \ln \alpha_i w_i r_i^0 - U \right).$

Таким образом, выражение для λ

$$(32)\quad \lambda = e^{-\left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\right)^{-1}\left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_i \ln \alpha_i w_i r_i^0 + U\right)}.$$

Это позволяет выписать оптимальные управляющие воздействия, которые при существующем ограничении обеспечивают наименьший результирующий тип агентов

$$(33)\quad u_i = \alpha_i \left(\ln \alpha_i w_i r_i^0 - \ln \lambda\right),$$

$$(34)\quad u_i = \left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\right)^{-1}\alpha_i U + \left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\right)^{-1}\sum_{p=1}^{k}\alpha_p \ln \alpha_p w_p r_p^{\,0} - \alpha_i \ln \alpha_i w_i r_i^0.$$

Решение системы дает условие на количество ресурса, при котором оптимальное управление Центра может гарантировать отсутствие ненулевых равновесий Нэша:

$$(35)\quad \sum_{i=1}^{k} e^{-\frac{U}{\alpha_i}\left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\right)^{-1}} w_i r_i^0 e^S \le \frac{2}{n+1} - \sum_{i=k+1}^{n} w_j r_j^{\,0},$$

где

$$(36)\quad S = \ln \alpha_i w_i r_i^0 - \frac{1}{\alpha_i}\left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\right)^{-1}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i \ln \alpha_i w_i r_i^0.$$

В случае одинаковых значений α (что соответствует одинаковым возможностям Центра по влиянию на каждого агента) это соотношение можно записать в более простом виде:

$$(37)\quad \begin{aligned} U \ge \alpha\Bigg(&\sum_{j=1}^{k} \ln w_j r_j^0 + \left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\right)\ln\left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\right) + \\ &+\left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\right)\ln\left(\frac{2}{n+1} - \sum_{j=k+1}^{n} w_j r_j^{\,0}\right)\Bigg). \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили условие на суммарное количество ресурсов, при выполнении которого Центр способен предотвратить активность агентов, т.е. сделать нулевое равновесие Нэша единственным. Иными словами, если Центр располагает ресурсом U таким, что выполняется условие (35) (с учетом (36)), то он может при помощи управляющих воздействий (34) добиться бездействия (т.е. выбора нулевых действий) агентов.

В то же время, при недостатке ресурса (т.е. при невыполнении условия (35)) существует ненулевое равновесие Нэша, в котором агенты осуществляют нежелательное для Центра коллективное действие.

5. Заключение

В данной работе рассмотрена модель информационного управления в социальной сети, описывающая воздействие Центра на мнения (типы) агентов с целью добиться выгодного для Центра исхода взаимодействия агентов. Выгода для Центра в данной модели состоит в том, чтобы добиться от агентов отказа от действий. При этом была существенно использована описанная в [2-3] модель изменения мнений агентов в результате взаимодействия.

В общем случае интерес представляет описание взаимосвязи между возможностями Центра по воздействию на мнения членов социальной сети и результатами их взаимодействия. По-видимому, в общем случае эта задача не может быть решена в явном виде, поэтому перспективным направлением дальнейших исследований является рассмотрение содержательных частных случаев.

Литература

1. ГУБАНОВ Д.А., НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Модели влияния в социальных сетях* // Управление большими системами. Выпуск 27. М.: ИПУ РАН, 2009. С. 205-281.
2. ГУБАНОВ Д.А., НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства* – М.: Физматлит, 2010.
3. ГУБАНОВ Д.А., НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Модели информационного влиянии и информационного управления в социальных сетях* // Проблемы управления. 2009, №5, С. 28-35.
4. BUCHANAN J. *An Economic Theory of Clubs* // Economica (Blackwell Publishing). – 1965. – №32 (125) pp. 1–14.

5. JACKSON M. *Social and Economic Networks* // Princeton: Princeton University Press, 2008. – 520 p.
6. MEINZEN-DICK R., DI GREGORIO M. *Collective action and property rights for sustainable development.* // International Food Policy Research Institute (IFPRI). – 2004. – 36 p.
7. NEWMAN M. *Coauthorship networks and patterns of scientific collaboration* // Proceedings of the National Academy of Sciences. – 2004. – №101. – pp. 5200 – 5205.
8. OSTROM E. *Governing the Commons: The Evolution of Institutions for Collective Action* (*Political Economy of Institutions and Decisions*) // Cambridge University Press. – 1990. – 298 p.
9. SCHNETTLER S. *A structured overview of 50 years of small-world research* // Social Networks. – 2009. – 31(3). – pp. 165-178.

ON A PROBLEM OF INFORMATION CONTROL IN SOCIAL NETWORKS

Alexander Chkhartishvili, Chief Researcher, Dr. of Physics and Mathematical Sciences, Institute of Control Sciences of RAS.
Denis Fedyanin, Master of Science, “Repetit-Center”, Moscow.

Abstract: The game-theoretical model used in this paper is the composition of the Markov model of social networks and the new model describing behavior of agents under group incentives provided by the principal. The article describes the Nash equilibrium and the conditions on the types of agents in a social network. Then the optimal information control mechanism of agents’ types is built to maximize the payoff of the principal.

Keywords: social network, Nash equilibrium, information control.

Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Д. А. Новиковым