УДК 519.81
ББК 22.18

УЧЕТ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ В РАМКАХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО АНАЛИЗА РЕШЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОНЦЕПЦИИ ПРИЕМЛЕМОСТИ

Яцало Б. И.[1], Грицюк С. В.[2],
Мирзеабасов О. А.[3], Василевская М. В.[4]
(*Национальный исследовательский ядерный университет ИАТЭ МИФИ, Обнинск*)

Представлен подход к учету неопределенностей критериев и весовых коэффициентов в рамках многокритериального анализа решений с использованием теории нечетких множеств и вероятностных методов. Предлагаемые методы (FMAA – Fuzzy Multicriteria Acceptability Analysis, ProMAA – Probabilistic Multicriteria Acceptability Analysis) базируются на вычислении индексов приемлемости рангов альтернатив. Обсуждается общий подход к реализации указанных методов и его конкретизация на примере многокритериальной аддитивной модели. Реализация методов FMAA и ProMAA основана на использовании численных методов для оценки функций от нечетких/случайных величин без применения методов Монте-Карло. Описана система поддержки принятия решений DECERNS WebSDSS, реализующая методы FMAA и ProMAA, а также ряд других методов многокритериального анализа решений.

[1] *Борис Иванович Яцало, доктор технических наук* (*yatsalo@iate.obninsk.ru*).
[2] *Сергей Витальевич Грицюк, аспирант* (*s.gritsyuk@gmail.com*).
[3] *Олег Ахмедбекович Мирзеабасов, кандидат технических наук, доцент* (*oam@iate.obninsk.ru*).
[4] *Мария Викторовна Василевская, магистр информатики,* (*mvvasilevskaya@gmail.com*).

Ключевые слова: Многокритериальный анализ решений; анализ неопределенностей; многокритериальный анализ приемлемости; системы поддержки принятия решений; *DECERNS WebSDSS.*

1. Введение

Многокритериальный анализ решений (МКАР; *Multi-Criteria Decision Analysis, MCDA*) на практике, как правило, сталкивается с неопределенностями объективных и субъективных значений критериев и предпочтений. Для анализа различного рода неопределенностей внешнего и внутреннего происхождения [1, 4, 5, 12, 30], включая неполноту, неточность и нечеткость данных, а также их случайный/вероятностный характер, используются соответствующие модели/методы МКАР. Наиболее часто для учета указанных выше неопределенностей в рамках анализа решений и многокритериального анализа в частности используется (однопараметрический) анализ чувствительности (прежде всего влияние изменения весовых коэффициентов на результаты ранжирования альтернатив), вероятностные методы, а также, в ряде случаев, нечеткие множества.

Выделим следующие методы МКАР, учитывающие неопределенности используемых в рамках метода величин.

В рамках классического метода *MAUT* (*Multi-Attribute Utility Theory*) случайные значения критериев, нормированные с использованием частных функций полезности, агрегируются в интегральное значение полезности альтернативы с помощью вычисления ожидаемой полезности; при этом используются точные (т.е. не распределенные) значения весовых коэффициентов (так называемые коэффициенты шкалирования, *scaling factors*) [10, 16, 33]. В ряде задач используется также стохастический метод *UTA* (*UTilites Additives*) с целью извлечения информации из заданного (эталонного) ранжирования альтернатив для построения функций полезности в рамках аддитивной модели [12, 14].

Предложен ряд вариантов стохастических моделей обобщенного метода аналитической иерархии (*AHP*, *Analytic Hierar-*

chy Process) [29] для учета неопределенностей рассматриваемых критериев и методов их сравнения [13, 21, 26].

Ряд обобщений классических моделей из класса *ORT* (теория отношения превосходства, *Outranking Relation Theory*, или *outranking methods*) [27,12] также базируется на применении вероятностных методов и нечетких множеств. В работе [9] дискретные распределения вероятностей используются для описания оценок альтернатив по критериям; для каждой пары альтернатив оценивается распределение степени предпочтения по каждому критерию с последующим вычислением распределения степени превосходства (с использованием медиан распределений) для полного или частичного упорядочения/ранжирования альтернатив. В работе [23] анализ неопределенностей в рамках методов *ORT* базируется на оценках предпочтения пар альтернатив по каждому критерию с использованием методов стохастического доминирования [12, 23]. В работе [25] представлен вероятностный метод *FlowSortPro* для учета неопределенностей, представляющий собой расширение базового метода многокритериальной сортировки альтернатив *FlowSort* [24]; в рамках *FlowSortPro* основные используемые величины (исходные профили, весовые коэффициенты, а также значения альтернатив для рассматриваемых критериев) могут описываться соответствующими распределениями вероятностей с последующим вычислением распределения потока (*net flow*) для каждой альтернативы и ее назначения в одну из предопределенных категорий альтернатив.

В рамках семейства методов *SMAA* (*Stochastic Multicriteria Acceptability Analysis*) реализуется стохастический подход к многокритериальному анализу приемлемости альтернатив на основе вычисляемых индексов приемлемости ранга альтернативы с применением методов Монте-Карло [17–19, 31]; в методах *SMAA* пользователь может задать как распределения значений критериев для рассматриваемых альтернатив, так и распределения весовых коэффициентов.

Многокритериальные методы анализа решений с использованием нечетких величин (нечетких множеств), как расширения соответствующих классических (четких) моделей, представлены нечеткими версиями многокритериальных методов *AHP*, *MAVT*, *PROMETHEE*, *FlowSort* и ряда других [7, 8, 11, 15].

Детальный обзор методов МКАР, в том числе с учетом различного рода неопределенностей, можно найти, например, в [5, 12], см. также [15, 35, 36].

В данной работе рассматриваются два новых подхода к многокритериальному анализу приемлемости (*multicriteria acceptability analysis*, *MAA*): метод *FMAA* (*Fuzzy MAA*), в котором значения критериев и весовые коэффициенты описываются нечеткими величинами, а оценки приемлемости альтернатив реализованы с использованием методов нечеткой логики, а также метод *ProMAA* (*Probabilistic MAA*), в котором реализован вероятностный алгоритм оценки приемлемости на базе аналитической модели сравнения альтернатив без использования методов Монте-Карло.

2. Учет неопределенностей в рамках многокритериального анализа приемлемости

Попарное сравнение альтернатив часто применяется в методах многокритериального анализа решений, в том числе в методах *AHP*, *ORT*, см, например, [12, 29], а также в ряде методов голосования, например, в методе Кондорсе [28]. В предлагаемом подходе к анализу приемлемости попарное сравнение используется для оценки индексов приемлемости рангов альтернатив.

2.1. БАЗОВЫЙ АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ ПРИЕМЛЕМОСТИ

В рамках базового алгоритма, положенного в основу методов *FMAA* и *ProMAA*, конструируются «*события ранга*» для всех рассматриваемых альтернатив с использованием логических операций «И/AND» (знак $\wedge$ в формулах ниже), а также «ИЛИ/OR» ($\vee$) на основе попарного сравнения альтернатив. Учет и анализ неопределенностей в рамках предлагаемых методов основан на оценке *меры* «*события ранга*».

Рассматривается *дискретная многокритериальная задача*, в которой выделено множество альтернатив $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{a}_i, i = 1, \ldots, n\}$ и множество критериев $\boldsymbol{C} = \{C_j, j = 1, \ldots, m\}$. Обозначим через $h_i = h(\boldsymbol{a}_i)$ оценку альтернативы $\boldsymbol{a}_i$, $i = 1, \ldots, n$, в некоторой выбранной шкале, например, в интегральной шкале полезности/*utility* (детализация выбора интегрального критерия обсуждается в разделе 2.2); при этом чем выше значение (полезность) h_i в ряду значений $h_1, h_2, \ldots, h_n$, тем лучше альтернатива $\boldsymbol{a}_i$ (относительно заданного множества альтернатив) и тем выше ее ранг. Под рангом альтернативы будем понимать ее место в упорядоченном по предпочтению списке альтернатив (ранг 1 присваивается лучшей альтернативе, ранг n – худшей).

Принимая во внимание различные источники неопределенностей и подходы к их описанию и использованию, ниже будем рассматривать h_i, $i = 1, \ldots, n$, как нечеткие числа (при описании алгоритма *FMAA*) или случайные величины (алгоритм *ProMAA*).

Рассмотрим событие ранга S_{ik}:

S_{ik} = {Альтернатива i имеет ранг k; $i, k = 1, \ldots, n$}.

События S_{ik} могут быть сформированы следующим образом с использованием логических выражений:

(1) $$S_{i1} = \{\bigwedge_{j \neq i}^{n} (h_i \geq h_j)\},$$

(2) $$S_{i2} = \{\bigvee_{l \neq i}^{n} ((h_i < h_l) \bigwedge_{j \neq i,\, j \neq l}^{n} (h_i \geq h_j))\},$$

(3) $$S_{ik} = \{\bigvee_{\substack{(l_1 < l_2 < \ldots < l_{k-1}) \\ l_s \neq i,\, s = 1, \ldots, k-1}} ((\bigwedge_{s=1}^{k-1} (h_i < h_{l_s}) \bigwedge_{\substack{j \neq i,\, j \neq l_s, \\ s = 1, \ldots, k-1}}^{n} (h_i \geq h_j))\},$$

(4) $$S_{in} = \{\bigwedge_{j \neq i}^{n} (h_i < h_j)\}.$$

Выражение (1) представляет собой утверждение того, что альтернатива $\boldsymbol{a}_i$ превосходит все другие альтернативы, т.е. имеет ранг 1; в выражении (2) утверждается, что может найтись только одна альтернатива, полезность которой превосходит полезность альтернативы $\boldsymbol{a}_i$, и т.д.; в (4), соответственно, утверждается, что полезность альтернативы $\boldsymbol{a}_i$ ниже полезностей всех других альтернатив.

В случае применения модели приемлемости альтернатив без учета неопределенностей (без учета распределений, например, при использовании интегральной ценности в классической модели *MAVT* [5]), только одно из выражений S_{ik}, $k = 1, \ldots, n$, является истинным (принимает значение 1).

Основной задачей учета/анализа неопределенностей с использованием нечетких или случайных величин (значений $h_i = h(\boldsymbol{a}_i)$, $i = 1, \ldots, n$) в рамках концепции приемлемости на базе модели (1)–(4) является оценка меры (степени уверенности или вероятности) высказываний/событий S_{ik}.

2.2. ВЫБОР ИНТЕГРАЛЬНОГО КРИТЕРИЯ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ МАА

Пусть в рамках *дискретной многокритериальной задачи* выделено множество альтернатив $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{a}_i, i = 1, \ldots, n\}$ и множество критериев $\boldsymbol{C} = \{C_j, j = 1, \ldots, m\}$. В общем случае многокритериальная задача выбора/ранжирования альтернатив может быть представлена следующим образом (с некоторыми уточнениями для отдельных многокритериальных моделей; методы Парето-оптимизации [1, 2] в данной работе не рассматриваются):

(5) $h(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{w}) \to max$

(6) $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{w}) \in \boldsymbol{G}; \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$.

Здесь $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{a}) = (C_1(\boldsymbol{a}), \ldots, C_m(\boldsymbol{a}))$ – вектор оценок альтернативы $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$ по критериям C_j, $j = 1, \ldots, m$; $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_m)$ – вектор используемых (при решении конкретной многокритериальной задачи) весовых коэффициентов; $\boldsymbol{g}(\cdot, \cdot)$ – векторная функция, содержащая все используемые в рамках модели, а также конкретной многокритериальной задачи, требования и ограничения (например, $\sum w_i = 1$, $w_j \in [w_j^{min}, w_j^{max}]$, ограничения на критерии, например $C_j \in [C_j^{min}, C_j^{max}]$, используемые при скрининге (т.е. отбраковке/отсеивании) альтернатив); $h(\boldsymbol{a})$ в (5) представляет собой интегральную оценку альтернативы $\boldsymbol{a}$ (в соответствующей шкале) с использованием функции/модели агрегирования $f(\cdot)$ (например, аддитивная *MAVT*/*MAUT*-функция оценки интегральной ценности/полезности [1, 4, 5, 12, 16, 33] или оценка чистого потока в методе *PROMETHEE* [6, 12] и др.).

В рамках классических детерминистских методов дискретного многокритериального анализа (методы *MADM* [5, 12, 22]), например, в рамках методов *MAVT*, *ELECTRE*, *PROMETHEE*, *TOPSIS*, значения критериев $C_j(\boldsymbol{a})$ и весов w_j, $j = 1, \ldots, m$, являются действительными нераспределенными (т.е. четкими, неслучайными) числами. Анализ неопределенностей в таких моделях проводится с использованием методов анализа чувствительности; как правило, используются средства анализа чувствительности к изменению весов.

В большинстве практических задач значение альтернативы $\boldsymbol{a}$ по критерию j, $C_j(\boldsymbol{a})$, $j = 1, \ldots, m$, определяется неоднозначно, что вызвано различного рода неопределенностями.

В рамках многокритериального метода *MAUT* [12, 16, 33], например, значения критериев могут описываться случайными величинами $X_j = C_j(\boldsymbol{a})$, $j = 1, \ldots, m$; величина X_j характеризуется соответствующей плотностью распределения вероятностей $j_j(x)$ (функцией распределения $F_j(x)$). Интегральная полезность альтернатив, например, в рамках аддитивной модели *MAUT* (корректное применение которой сопряжено с необходимостью проверки ряда условий независимости критериев) [16, 33], может быть представлена следующей конкретизацией модели (5), (6):

$$(7) \quad U(\boldsymbol{a}) = \sum_{j=1}^{m} w_j \; U_j(X_j),$$

$$(8) \quad w_j > 0, \; j = 1, \ldots, m; \; \sum_{j=1}^{m} w_j = 1,$$

где $U_j(x)$ – частная функция полезности для критерия (атрибута) j, $j = 1, \ldots, m$; как правило, $0 \le U_j(x) \le 1$ (см. обсуждения о сходстве и возможном различии функций ценности и полезности и рекомендации об использовании функций ценности при практическом применении аддитивных методов *MAVT*/*MAUT*, [5, 12, 33]); весовые коэффициенты w_j представляют собой *коэффициенты масштабирования* (*scaling factors*) [5, 10, 16, 33], являющиеся точными/нераспределенными положительными числами. В то же время, вместо оценки распределения интегральной полезности $U(\boldsymbol{a})$ в рамках метода *MAUT* вычисляются значения *ожидаемой полезности* (*expected utility*)

$$(9)\quad E(U(\boldsymbol{a}))=\sum_{j=1}^{m} w_j\ E(U_j(X_j)),$$

где $E(X)$ – математическое ожидание случайной величины X. Ранжирование альтернатив в рамках метода *MAUT* базируется на ранжировании значений *ожидаемой полезности* альтернатив: альтернатива $\boldsymbol{a}_1$ превосходит альтернативу $\boldsymbol{a}_2$ ($\boldsymbol{a}_1 > \boldsymbol{a}_2$) тогда и только тогда, когда

$$(10)\ E(U(\boldsymbol{a}_1)) > E(U(\boldsymbol{a}_2)),$$

Поскольку, согласно (7), (9), невысокие показатели полезности альтернативы по одним критериям могут быть компенсированы более высокими значениями по другим критериям, метод *MAUT* принадлежит к множеству так называемых *компенсаторных* методов многокритериального анализа [5, 16].

Несмотря на повсеместное использование категории *ожидаемой* полезности, отношение к ней как к универсальному методологическому принципу для обоснования предпочтения, выбора или ранжирования альтернатив не является однозначным [33]. В связи с этим предлагаются и другие методы многокритериального анализа, не ограничивающиеся оценками ожидаемой полезности.

Для реализации базового алгоритма *MAA* (многокритериального анализа приемлемости) в данной работе используется аддитивная модель (7), в которой значения критериев $X_j = C_j(\boldsymbol{a})$, $j = 1, \ldots, m$, могут описываться нечеткими или случайными величинами. В то же время, весовые коэффициенты w_j также могут рассматриваться неопределенными и описываться нечеткими числами (в *FMAA*) или случайными величинами (в *ProMAA*). Методы задания весовых коэффициентов в этих случаях описываются в разделе 2.5.

Для анализа альтернатив в рамках моделей вида (7), (8) предлагаются и другие подходы, не основанные на применении категории ожидаемой полезности. Один из таких методов, *SMAA* (*Stochastic Multicriteria Acceptability Analysis*), предложен в работах [17–19, 31] и реализован как для модели (7),(8), так и для ряда других дискретных моделей МКАР. Методы семейства *SMAA* представляют собой реализацию концепции приемлемости (*MAA*) на базе экстенсивного использования методов Монте-Карло для (приближенного) вычисления статистики рангов альтернатив, учитывая *стохастическую* (вероятностную) природу значения критериев и весовых коэффициентов (с сохранением для случайных значений весов соотношения нормировки (8)).

Ниже предложен методологически другой подход к оценке приемлемости альтернатив, базирующийся на реализации аналитической модели приемлемости (1)–(4), позволяющей последовательно реализовать концепцию приемлемости (без применения методов Монте-Карло) как для вероятностной природы неопределенностей объективных значений критериев и субъективных предпочтений (в том числе вероятностных значений весовых коэффициентов), так и для случаев альтернативного подхода к анализу неопределенностей с использованием теории нечетких множеств.

2.3. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРИЕМЛЕМОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЧЕТКИХ ДАННЫХ И ПРЕДПОЧТЕНИЙ: FMAA

В целом ряде сценариев значения объективных и субъективных показателей многокритериальных задач не могут быть адекватно представлены ни средними значениями (когда выбор среднего ведет к существенной потере информации о возможных значениях критериев и/или росту несогласия среди экспертов по выбору значений), ни распределением вероятностей соответствующих случайных величин (ввиду отсутствия статистических данных и/или несогласия в задании субъективных распределений вероятностей). В этих случаях использование нечетких множеств (*fuzzy sets*) может способствовать решению проблемы формирования значений критериев для множества альтернатив $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{a}_i, i = 1, \ldots, n\}$, а также значений весовых коэффициентов $w_j, j = 1, ..., m$ [4, 7, 8, 11, 15, 22].

Нечеткие числа Z, используемые в рамках данного метода, представляют собой нормализованные, выпуклые и ограниченные нечеткие множества, заданные на универсальном множестве действительных чисел $\mathbf{R}$ с непрерывной функцией принадлежности [20], т.е.

(11) $Z = \{(x, m_Z(x)) : m_Z(x) > 0, c_1 < x < c_2; m_Z(x) = 0, x \notin (c_1, c_2)\}$,

где $m_z(x)$ – непрерывная функция принадлежности элемента/четкого числа x множеству Z, $c_i \in \mathbf{R}$; для синглтона (одноэлементного множества) z имеем соответственно $c_1 = c_2 = c$, $m_z(c) = 1$.

Ниже обсуждается подход к реализации многокритериального анализа приемлемости на базе использования нечетких величин (*FMAA*, сокращенно от *Fuzzy MAA*). В излагаемом подходе значения критериев $a_{ij} = X_j(\boldsymbol{a}_i)$, значения частных функций ценности $V_j(a_{ij})$, а также весовые коэффициенты w_j и интегральная ценность $V(\boldsymbol{a}_i)$ альтернатив $\boldsymbol{a}_i$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, описываются нечеткими числами в соответствии с моделью (7). В качестве функции $V_j(x)$ используется обычная/четкая функция ценности $V_j(x)$, заданная на множестве изменения критерия C_j (для всего множества рассматриваемых альтернатив) в соответствии с принципом расширения [20].

Предлагаемый метод *FMAA* (точнее, *FMAA-V*, учитывая использование аддитивной функции ценности вида (7), расширенной до функции от нечетких аргументов) является адаптацией анализа приемлемости (1)–(4) по отношению к множеству ценностей $\{V(\boldsymbol{a}_i), i = 1, \ldots, n\}$, выражаемых нечеткими числами.

Как и в разделе 2.1, будем использовать обозначение h_i для нечеткого числа $V(\boldsymbol{a}_i)$, положим также $h_{ij} = h_i - h_j$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Функция принадлежности нечеткого числа h_{ij} определяется формулой

(12) $$m_{h_{ij}}(z) = \bigvee_{\substack{x, y: \\ z = x - y}} (m_{h_i}(x) \wedge m_{h_j}(y)),$$

где $x \wedge y = \min(x, y)$, $x \vee y = \max(x, y)$.

В настоящее время существует несколько десятков подходов к сравнению нечетких чисел, основанных как на методах дефаззификации, так и на реализации более сложных процедур сравнения [15, 32]. Для описания степени различия значений ценностей h_i и h_j,альтернатив $\boldsymbol{a}_i$ и $\boldsymbol{a}_j$, представленных нечеткими числами, реализован следующий *интегральный* метод сравнения.

Степень/меру принадлежности нечеткого числа z (11) множеству неотрицательных (нечетких) чисел $\mathbf{F}_{\mathbf{R}\geq 0}$ можно определить следующим образом, используя функцию принадлежности $m_z(x)$:

(13) $$m_{\mathbf{F}_{\mathbf{R}\geq 0}}(z) = \int_{x\geq 0} m_z(x)dx \Big/ \int_{c_1}^{c_2} m_z(x)dx$$

(в (13) предполагается, как и указано в (11), $c_1 < c_2$; для синглтона z мера принадлежности к $\mathbf{F}_{\mathbf{R}\geq 0}$ равна 1 для $z \geq 0$ и 0 для $z < 0$).

Определим меру того, что значение ценности h_i альтернативы $\boldsymbol{a}_i$ превосходит ценность h_j альтернативы $\boldsymbol{a}_j$ (j ¹ i) формулой

(14) $$m_{ij} = m_{\mathbf{F}_{\mathbf{R}\geq 0}}(\ h_{ij})(= m_{h_i \geq h_j} = m(h_{ij} \geq 0)).$$

Из (13), (14) следует, что $m_{ij} + m_{ji} = 1$ и $m(h_{ij} < 0) = 1 - m(h_{ij} \geq 0)$ (в данной работе не обсуждаются вопросы транзитивности сравнения альтернатив по предпочтению на основе введенной меры $m_{h_i \geq h_j}$).

В рамках *FMAA* мера событий S_{ik}, см. (1)–(4), определяет так называемый индекс приемлемости ранга $m(i, k)$ или степень уверенности в том, что альтернатива i имеет ранг k. Индексы приемлемости ранга $m(i, k)$ могут быть определены с использованием методов нечеткой логики (например, с использованием одного из наиболее часто используемых вариантов Лукашевича) [20]:

(15) $$m(i,1) = m(S_{i1}) = m(\bigwedge_{j\neq i}^{n}(h_{ij} \geq 0)) = \min_{j\neq i}\{m(h_{ij} \geq 0)\} = \min_{j\neq i}\{m_{ij}\},$$

(16) $$m(i,2) = m(S_{i2}) = m(\bigvee_{l\neq i}^{n}((h_{il} < 0) \bigwedge_{j\neq i,\, j\neq l}^{n}(h_{ij} \geq 0))) = \max_{l\neq i}\{\min_{j\neq i,\, j\neq l}\{m_{li}, m_{ij}\}\},$$

$$m(i,k) = m(S_{ik}) = m(\underset{\substack{(l_1<l_2<...<l_{k-1}) \\ l_s \neq i, s=1,..,k-1}}{\vee}((\overset{k-1}{\underset{s=1}{\wedge}}(h_{il_s} < 0))\overset{n}{\underset{\substack{j\neq i, j\neq l_s, \\ s=1,..,k-1}}{\wedge}}(h_{ij} \geq 0))) =$$

(17)

$$= \max_{\substack{(l_1<l_2<...<l_{k-1}) \\ l_s \neq i, s=1,..,k-1}} \{\min\{\min_{s=1,..,k-1} m_{l_s i}, \min_{\substack{j\neq i, j\neq l_s, \\ s=1,..,k-1}} m_{ij}\}\}$$

(18) $m(i,n) = m(S_{in}) = \min_{j \neq i}\{(1 - m_{ij})\} = \min_{j\neq i}\{m_{ji}\}$.

Располагая данными о мерах (матрице) $m(i, k) = m(S_{ik})$ событий S_{ik}, эксперты/ЛПР могут выбирать наиболее приемлемую альтернативу. Для интеграции имеющихся показателей приемлемости альтернативы, если эксперты видят в этом необходимость, может быть также использован метод взвешенного суммирования (19) для определения индекса $\boldsymbol{R_i}$ интегральной приемлемости альтернативы $\boldsymbol{a}_i$ (предложенного для стохастического метода *SMAA* [17]):

(19) $R_i = \sum_{k=1}^{n} w_k^{ac} m(i,k)$,

где w_k^{ac} – веса относительной важности рангов, задаваемые экспертами/ЛПР. В то же время, рекомендации по использованию индекса $\boldsymbol{R_i}$ приемлемости альтернативы являются достаточно ограниченными. Возможны также и другие (комплексные) подходы по интеграции индексов приемлемости ранга $\{m(i, k)\}$ и степени предпочтения альтернатив $\{m_{ij}\}$.

Метод задания весовых коэффициентов w_i для моделей *FMAA* вида (7) обсуждается в разделе 2.5.

2.4. *ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ ПРИЕМЛЕМОСТИ: PROMAA*

Вероятностный подход к анализу неопределенностей в рамках МКАР основан на трактовке используемых в (5), (7) величин $X_j = C_j(\boldsymbol{a})$ (значения критериев), а также, для некоторых методов, w_j (значения весовых коэффициентов) как случайных с известными/заданными законами распределения. Дальнейшие процедуры состоят в определении законов распределения интегральных величин $h_i = h(\boldsymbol{a}_i)$, $i = 1, \ldots, n$ (для модели (7), например, в предположении независимости используемых случайных величин, это эффективно достигается с использованием численных методов).

Пусть интегральная оценка альтернативы $h_i = h(\boldsymbol{a}_i)$, полученная на основе (5)/(7), характеризуется соответствующей плотностью распределения вероятностей $j_i(x)$ (функцией распределения $F_i(x)$). В предположении *независимости* (в рамках модели сравнения интегральных полезностей альтернатив) рассматриваемых случайных величин h_i, $i = 1, \ldots, n$, вероятности событий ранга S_{ik} (1)–(4) могут быть оценены следующим образом.

Нетрудно показать, что

(20) $$p_{ij} = P(h_i \geq h_j) = \int F_j(x)\, j_i(x)dx = \int F_j(x)\, dF_i(x) = \int F_j\, dF_i,$$

а также

(21) $$P((h_1 \geq h_2) \wedge (h_1 \geq h_3)) = \int F_3 F_2 dF_1;$$

подчеркнем при этом, что события $(h_1 \geq h_2)$ и $(h_1 \geq h_3)$ в общем случае являются зависимыми, при этом (21) является корректной формулой в случае независимых h_i.

Исходя из выражений (20), (21), для вероятностей событий рангов $P_{ik} = P(S_{ik})$, $i, k = 1, \ldots, n$, называемых индексами приемлемости рангов, имеем следующие оценки:

(22) $$P_{i1} = \mathrm{P}\{S_{i1}\} = \int \prod_{j \neq i}^{n} F_j(x) dF_i(x) = \int \prod_{j \neq i}^{n} F_j\, dF_i,$$

(23) $$P_{i2} = \mathrm{P}\{S_{i2}\} = \sum_{l \neq i}^{n} \int (1 - F_l) \prod_{j \neq i,\, j \neq l}^{n} F_j\, dF_i,$$

(24) $$P_{ik} = \mathrm{P}\{S_{ik}\} = \sum_{\substack{(l_1 < l_2 < \ldots < l_{k-1}) \\ l_s \neq i,\, s = 1,..,k-1}} \int \left(\prod_{s=1}^{k-1} (1 - F_{l_s}) \prod_{\substack{j \neq i,\, j \neq l_s \\ s = 1,..,k-1}}^{n} F_j\, dF_i, \right.$$

(25) $$P_{in} = \mathrm{P}\{S_{in}\} = \int \prod_{j \neq i}^{n} (1 - F_j)\, dF_i.$$

Можно доказать также, что для матрицы $\{P_{ik}\}$ $i, k = 1, \ldots, n$, выполняются условия

(26) $$\sum_{k=1}^{n} P_{ik} = \sum_{i=1}^{n} P_{ik} = 1.$$

В ряде случаев, если эксперты находят это возможным (обоснованным или согласованным), может также использоваться интегральный индекс R_i приемлемости альтернативы [17]:

$$(27)\quad R_i = \sum_{k=1}^{n} w_k^{ac} P_{ik} \ ,$$

где w_k^{ac} – задаваемые экспертами/ЛПР веса относительной важности рангов.

Таким образом, выбор лучшей альтернативы, ранжирование или скрининг альтернатив в рамках *ProMAA* (аналогично *FMAA*) базируется на комплексном анализе матрицы $\{P_{ik}\}$ и/или оценке интегральных показателей приемлемости R_i (27). При этом, например, в рамках *ProMAA-U*/*V* (метода *ProMAA*, основанного на использовании интегральной функции полезности/ценности (7)), эксперты могут также учитывать значения ожидаемых полезностей (9).

Метод задания весовых коэффициентов w_i для *ProMAA-V*, обсуждается в разделе 2.5.

Подчеркнем, что перед выводом формул (20) и (21), на основе которых получены оценки (22)–(25), сделано предположение о независимости случайных величин h_i, $i = 1, \ldots, n$; в случае зависимости необходимо использование совместных распределений или других подходов к корректной оценке индексов приемлемости зависимых величин.

При использовании *ProMAA*, когда для определения интегральной полезности альтернативы $\boldsymbol{a}_i$, $h_i = U(\boldsymbol{a}_i)$, применяется аддитивная модель (7), а весовые коэффициенты w_i (см. раздел 2.5) при этом также могут рассматриваться распределенными/случайными величинами с заданными законами распределения, случайные величины h_i, $i = 1, \ldots, n$, не являются независимыми. Действительно, в предположении независимости всех используемых исходных случайных величин (значений критериев $X_{ij} = C_j(\boldsymbol{a}_i)$ и, соответственно, случайных величин $U_{ji} = U_j(X_{ij})$, а также весовых коэффициентов w_j, $i = 1, \ldots, n$,

$j = 1, \ldots, m$) получаем следующую оценку ковариации для h_i и h_k:

(28) $$Cov(h_i, h_k) = \sum_{j=1}^{m} E(U_{ji})E(U_{jk})Dw_j,$$

где $U_{ji} = U_j(C_j(\boldsymbol{a}_i))$; отметим также, что в рамках *FMAA* и *Pro-MAA* $0 \leq U_j(x) \leq 1$ и (после нормализации распределений весов, см. 2.5) $0 \leq w_j < 1$.

Таким образом, учитывая приведенное выше замечание, оценки индексов приемлемости рангов на основе (22)–(25) являются в общем случае приближенными (точными для случая нераспределенных/постоянных значений весовых коэффициентов в (7)). Дополнительные исследования показывают, что при решении практических задач различие между оценками (22)–(25) и оценками вероятности «событий рангов» на основе методов Монте-Карло при реализации (7) не превышает 2–3%.

В то же время, оценка вероятностей событий (1)–(4) на основе (22)–(25) может иметь свое обоснование. Получая распределения полезностей альтернатив $h_i = U(\boldsymbol{a}_i)$ с использованием модели (7) (в том числе с распределенными коэффициентами), эксперты сравнивают случайные величины h_i, $i = 1, \ldots, n$, на основе (1)–(4) исходя только из оцененных законов распределения h_i без учета их возможной зависимости.

2.5. ЗАДАНИЕ ВЕСОВ В FMAA И PROMAA

В моделях *MAVT*/*MAUT*, так же как и в рамках других классических методов МКАР, весовые коэффициенты w_i рассматриваются как постоянные (нераспределенные) положительные величины. В этих случаях для анализа неопределенностей применяется, как правило, однопараметрический анализ чувствительности к изменению заданного весового коэффициента (с пропорциональным изменением оставшихся весов для сохранения соотношения нормализации весов (8)). В то же время, расширенный анализ неопределенностей, когда веса не рассматриваются постоянными/средними, а распределены в рамках некоторых интервалов, является актуальным и востребованным при решении большинства практических задач МКАР.

Весовые коэффициенты (коэффициенты относительной важности критериев) в рамках методов МКАР могут быть оценены различными методами, включая свинг (*swing*) [5, 10, 33] – метод для определения коэффициентов масштабирования в моделях *MAVT* (с возможностью их практического применения в модели *MAUT* [5,12]), методы голосования для определения весов в методах *ELECTRE*/*PROMETHEE* и др. [3, 5, 22, 27, 33]. При этом весовые коэффициенты в большинстве случаев характеризуются своими неопределенностями, являющимися следствием групповых или индивидуальных субъективных оценок и предпочтений, а также выбранного метода.

При задании числовых значений оценок и предпочтений экспертам в большинстве случаев легче указать диапазон изменения относительной важности весового коэффициента в сравнении с заданием его точного значения. Например, при реализации метода взвешивания *свинг/swing* [5] утверждение «относительная важность/ценность изменения от худшего значения до лучшего для второго по важности критерия составляет 30–60% от соответствующего изменения (от худшего до лучшего значения) для наиболее важного критерия» является более вероятным, чем утверждение, что указанная величина равна в точности 45%. Указанные неопределенности весовых коэффициентом могут быть также естественным следствием группового анализа (как распределение оценок, данных различными членами группы).

Рекомендуемым методом задания весовых коэффициентов в *FMAA*/*ProMAA* (основанных на аддитивной модели с использованием частных функций ценностей) является метод свинг, являющийся обоснованным методом задания весов/коэффициентов масштабирования для методов *MAVT* (который также может быть использован в рамках *MAUT* вместо применения концептуально более сложных методов лотерей [5]):

– наиболее значимому критерию присваивается вес $w_1 = 1$, принимая во внимание значимость свинга/амплитуды (изменения в рамках границ), т.е. увеличение интегральной ценности при изменении значения критерия от худшего к лучшему (обозначим этот критерий как C_1);

– интервал изменения $[w_2^{min}, w_2^{max}]$, $0 \le w_2^{min} \le w_2^{max} \le 1$ назначается весовому коэффициенту w_2 (второму по важности критерию C_2) на основе оценки изменения относительной ценности от худшего значения к лучшему для критерия C_2 в сравнении с соответствующей ценностью изменения для наиболее важного критерия;

– предыдущий шаг повторяется для третьего по важности критерия и т.д.;

– распределения вероятностей (для *ProMAA*) как результат задания субъективных вероятностей (или как результат статистического анализа весов, заданных членами группы экспертов) или (для *FMAA*) функции принадлежности задаются экспертами для всех весовых коэффициентов w_j в интервалах изменения $[w_j^{min}, w_j^{max}]$, $j = 2, \ldots, m$.

В рамках классических методов *MAVT*/*MAUT* заданные веса нормируются согласно (8). Такой подход является обоснованным, включая возможность интерпретации важности весов в процентах, представление интегральной функции ценности и др. [3, 5, 33]. В ряде случаев эксперты могут посчитать более естественным задание базового критерия, чей вес определяется равным 1, а веса относительной важности остальных критериев определяются в долях от заданного веса [5, 22]. Очевидно также, что пропорциональное изменение всех весов w_j, $j = 1, \ldots, m$, ($w_j \to dw_j$, где d – действительное положительное число) не изменяет порядка ранжирования альтернатив в методах *MAVT*/*MAUT*, а также *FMAA*/*ProMAA*.

В текущей реализации методов *FMAA* и *ProMAA* в рамках *DECERNS SDSS* (см. раздел 3.) оригинальные весовые коэффициенты, полученные согласно указанному выше свинг-методу, нормализуются на сумму их средних значений; таким образом, сумма средних значений весовых коэффициентов после нормализации равна 1. Такой подход позволяет сравнивать веса в *FMAA* и *ProMAA* с весами, используемыми в других методах при реализации различных подходов к решению исследуемой многокритериальной задачи.

3. Реализация FMAA и ProMAA

В рамках веб-системы поддержки принятия решений *DECERNS WebSDSS* [34] реализован ряд методов многокритериального анализа, включая *MAVT*, *TOPSIS*, *AHP*, *PROMETHEE*, *MAUT*, *F-MAVT*, *FlowSort*, а также методы *ProMAA* и *FMAA*.

Реализация *ProMAA* основана на эффективном использовании оригинальной библиотеки компьютерных модулей *Rand-Function* (без применения методов Монте-Карло) для оценки плотности/функции распределения случайной величины $x = f(x_1, \ldots, x_m)$ для широкого класса функций $f(\cdot)$ (включая арифметические и алгебраические функции, а также $\exp(\cdot)$, $\ln(\cdot)$) и всех основных типов распределений (независимых) случайных величин x_i. (равномерное, нормальное, логнормальное, дельта-распределение и гистограммы).

Randfunction представляет собой библиотеку *Java*-модулей, разработанных в рамках *DECERNS* и ФЦП проекта [33, 36]. На базе библиотеки *Randfunction* создано также веб-приложение *RandCalculator* для реализации пользователями функций от независимых случайных величин.

Для реализации *FMAA* (и *F-MAVT*) разработана библиотека *FuzzyLib*, на базе которой реализуются функции от нечетких переменных, $x = f(x_1, \ldots, x_m)$ для того же класса функций $f(\cdot)$, указанных выше для случайных величин, и основных типов (входных) нечетких чисел x_i. (синглтоны, треугольные, трапецевидные и кусочно-линейные нечеткие числа). На базе библиотеки *FuzzyLib* создано также веб-приложение *FuzzyCalculator* для реализации пользователями функций от нечетких переменных.

Интерфейс *ProMAA*/*FMAA* и реализованные на базе библиотеки программных модулей *Randfunction*/*FuzzyLib* функции позволяют:

– задать плотности распределения/функции принадлежности исходных критериев $X_j(\boldsymbol{a}_i)$, $j = 1, \ldots, m$, исследуемой многокритериальной задачи для рассматриваемого множества альтернатив $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{a}_i, i = 1, \ldots, n\}$;

– задать плотности распределения/функции принадлежности весовых коэффициентов w_j, $j = 1, \ldots, m$, (см. раздел 2.5 выше);

– вычислить распределения/функции принадлежности величин интегральной ценности/полезности $h_i = U(\boldsymbol{a}_i)$, $i = 1, \ldots, n$, согласно используемой модели;

– вычислить *индексы приемлемости рангов* $P_{ik}/m(i, k)$ (вероятность/нечеткая мера того, что альтернатива $\boldsymbol{a}_i$, $i = 1, \ldots, n$, будет иметь ранг k: $k = 1$ – «лучшая», $k = n$ – «худшая» альтернативы);

кроме того,

– проводить графический и табличный анализ полученных оценок для последующего принятия соответствующих решений;

– проводить анализ чувствительности получаемых результатов к изменению формы используемых частных функций ценности/полезности;

– редактировать значения критериев и весов (диапазоны изменения весов и их распределения) в рамках дополнительного анализа неопределенностей.

Для эффективного вычисления выражений вида (17) и (24) реализованы оригинальные алгоритмы с использованием методов двоичного кодирования входящих в формулу компонентов.

Вычисление выходных результатов в рамках распределенной веб-системы *DECERNS WebSDSS* выполняются на стороне сервера. При использовании *ProMAA*, например, время расчета задачи с 5-ю критериями и 5-ю альтернативами (все критерии и веса, за исключением максимального, рассматриваются распределенными) составляет менее 0,4 секунды (для 10 критериев и 10 альтернатив – менее 1,8 секунды); указанные оценки зависят от характеристик компьютера и включают только время работы процессора (в указанном случае использовался сервер с частотой 3 ГГц).

4. Заключение

Предложенные методы *FMAA* и *ProMAA*, основанные на оценке индексов приемлемости рангов, представляют собой один из подходов к учету неопределенностей объективных значений и субъективных предпочтений в рамках многокритериального анализа решений. Являясь фактически расширением методов *MAVT*/*MAUT*, описанные варианты многокритериального анализа приемлемости *FMAA* и *ProMAA* не используют концепцию ожидаемой полезности. Указанные методы могут быть эффективным средством анализа решений в случаях существенной неопределенности значений критериев и/или весовых коэффициентов; при этом неопределенности могут быть представлены как с использованием вероятностных методов (*ProMAA*), так и с использованием нечетких величин (*FMAA*).

Метод *FMAA* представляет собой оригинальный подход к анализу приемлемости альтернатив, основанный на применении базового алгоритма (1)–(4) и определения меры приемлемости рангов с использованием аппарата нечеткой логики.

Использование нечетких значений объективных показателей и субъективных предпочтений (значения критериев и/или весовых коэффициентов) и их интеграция в рамках методов многокритериального анализа (*FMAA*, *F-MAVT* и др.) в целом ряде случаев может быть более обоснованным, чем моделирование процесса многокритериального анализа с использованием случайных величин/вероятностных методов. Что касается непосредственно использования методологии нечетких чисел и нечеткой логики в рамках многокритериального анализа приемлемости для решения конкретных практических задач, то здесь необходимо проведение дополнительных исследований.

ProMAA также представляет собой оригинальную реализацию многокритериального анализа приемлемости с использованием методов теории вероятностей, и является альтернативным по отношению к *SMAA*-2 подходом к оценке индексов приемлемости рангов [17]. Методы *SMAA* базируются на использовании процедур Монте-Карло; в *ProMAA* вычисляются распределения функций от (независимых) случайных величин на основе реализации соответствующих теоретико-вероятностных методов. Процедуры задания весовых коэффициентов в *SMAA*-2 и *ProMAA-V* (*ProMAA*, основанном на аддитивной модели *MAVT*/*MAUT* (7) и частных функций ценности) являются различными: в *ProMAA* веса задаются в соответствии с методом задания весовых коэффициентов *swing* (раздел 2.5); в *SMAA*-2 веса выбираются из заданных $(m-1)$ интервалов возможного изменения весов в соответствии с законами распределения, где m – число критериев; последний вес определяется из соотношения нормировки весов (8), если при этом выборка из $(m-1)$ весов является допустимой (т.е. допускает вычисление последнего неотрицательного весового коэффициента, лежащего в соответствующем интервале). Указанные различия в алгоритмах задания весов являются одной из причин различия оценок индексов приемлемости в *SMAA* и *ProMAA* (проведенные исследования показывают, что это различие составляет менее 3%).

При использовании *ProMAA*/*FMAA* в рамках многокритериальной системы поддержки принятия решений *DECERNS WebSDSS* [34] пользователи/эксперты могут также сравнивать результаты проведенного анализа (ранжирование альтернатив, результаты анализа неопределенностей, рекомендации для принятия решений или проведения дальнейших исследований), полученные с использованием других методов. В *DECERNS WebSDSS*, кроме *ProMAA* и *FMAA*, реализованы также многокритериальные методы анализа решений *MAVT*, *MAUT*, *AHP*, *TOPSIS*, *PEOMETHEE*, *Fuzzy-MAVT*, *FlowSort*. При этом в рамках *DECERNS WebSDSS* используется одна и та же базовая структура таблицы для задания входных значений (*performance table*), автоматически расширяемая до необходимой степени при выборе метода с более сложной структурой входных данных. Это позволяет (при наличии возможности, необходимости и/или при желании пользователей/экспертов) эффективно переходить от одного метода МКАР к другому и сравнивать полученные результаты в процессе поддержки принятия решений. Безусловно, параметризация субъективных предпочтений, в том числе задание весовых коэффициентов при использовании каждого из выбираемых методов, является задачей экспертов, участвующих в решении многокритериальной задачи.

Возможности реализованных в рамках *DECERNS WebSDSS* методов *ProMAA* и *FMAA* прорабатываются авторами в рамках решения конкретных многокритериальных задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках проекта ФЦП (Информатика) 14.740.11.0360, а также проекта РФФИ 11-07-97529. Авторы выражают благодарность участникам проектов за обсуждение работы и предложения по реализации представленных методов в рамках *DECERNS WebSDSS.*

Литература

1. ЛАРИЧЕВ О.И. *Теория и методы принятия решений*. – М.: Физматкнига, 2006.
2. ЛОТОВ А.В., БУШЕНКОВ В.А., КАМЕНЕВ Г.К., ЧЕРНЫХ О.Л. *Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей*. – М.: Наука, 1997.
3. ПОДИНОВСКИЙ В.В. *Введение в теорию важности критериев*. – М.: Физматлит, 2007.
4. ТРАХТЕНГЕРЦ Э.А. *Компьютерная поддержка принятия решений*. – М.: Синтег, 1998.
5. BELTON V., STEWART T. *Multiple Criteria Decision Analysis: An Integrated Approach*. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.
6. BRANS J.P., VINCKE P. *A preference ranking organization method: the PROMETHEE method for multiple criteria decision-making* // Management Science. – 1985. –Vol. 31. – P. 647–656.
7. CARLSSON C., FULLER R. *Fuzzy multiple criteria decision making: Recent developments* // Fuzzy Sets and Systems. – 1996. – Vol. 78. – P. 139–153.
8. CHANG D.Y. *Applications of the extent analysis method on fuzzy AHP* // European Journal of Operational Research. – 1996. – Vol. 95. – P. 649–655.

9. D'AVIGNON G.R., VINCKE P. *An outranking methods under uncertainty* // European Journal of Operational Research. – 1988. – Vol. 36. – P. 311–321.
10. EDWARDS W., BARRON F.H. *SMARTS and SMARTER: improved simple methods for multiattribute utility measurement* // Organization Behavior and Human Processes. – 1994. – Vol. 60. –P. 306–325.
11. FERNÁNDEZ-CASTRO A.S, JIMÉNEZ M. *PROMETHEE: An Extension through Fuzzy Mathematical Programming* // The Journal of the Operational Research Society. – 2005. – Vol. 56, No. 1. – P. 119–122.
12. FIGUEIRA J., GRECO S., EHRGOTT M. (Eds). *Multiple criteria decision analysis: State of the art surveys*. – New York: Springer Science, Business Media, Inc, 2005.
13. HAINES L.M. *A statistical approach to the analytic hierarchy process with interval judgments* // European Journal of Operational Research. – 1998. – Vol. 110. – P. 112–125.
14. JACQUET-LAGREZE E., SISKOS Y. *Assessing a set of additive utility functions for multicriteria decision making: The UTA method* // European Journal of Operational Research. – 1982. – Vol. 10, No. 2. – P. 151–164.
15. KAHRAMAN C. (Ed). *Fuzzy Multi-Criteria Decision Making. Theory and Applications with Recent Developments* // Series: Springer, Optimization and Its Applications. – 2008. – Vol.16.
16. KEENEY R.L., RAIFFA H. *Decision with Multiple Objectives*. – New York: LJ.Wiley & Sons, 1976.
17. LAHDELMA R., HOKKANEN J., SALMINEN P. *SMAA – Stochastic Multiobjective Acceptability Analysis* // European Journal of Operational Research. – 1998. – Vol. 106. – P. 137–143.
18. LAHDELMA R., SALMINEN P. *SMAA-2: stochastic multicriteria acceptability analysis for group decision making* // Operations Research. – 2001. – Vol. 49, No. 3. – P. 444–454.

19. LAHDELMA R., MAKKONEN S., SALMINEN P. *Multivariate Gaussian criteria in SMAA* // European Journal of Operational Research. – 2006. – Vol. 170, No. 3. – P. 957–970.
20. LEE K.H. *First Course on Fuzzy Theory and Applications*. – Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2005.
21. LEVARY R.R., WAN K. *A simulation approach for handling uncertainty in the analytic hierarchy process* // European Journal of Operational Research. – 1998. – Vol. 106. – P. 116–122.
22. MALCZEWSKI J. *GIS and Multicriteria Decision Analysis*. – New York: John Wiley & Sons Inc, 1999.
23. MARTEL J.-M., ZARAS K. *Stochastic dominance in multicriterion analysis under risk* // Theory and Decision. – 1995. – Vol. 39. – P. 31–49.
24. NEMERY Ph., LAMBORAY Cl. *FlowSort: a flow-based sorting method with limiting and central profiles*. – 2008, TOP 16, 90–113.
25. NEMERY Ph. *FlowSortPro: a probabilistic extension of the multicriteria sorting method FlowSort* // Technical Paper. – 2009. – URL: http://userweb.port.ac.uk/~nemeryp/ (дата обращения 10.08.2010).
26. ROSENBLOOM E.S. *A probabilistic interpretation of the final rankings in AHP* // European Journal of Operational Research. – 1996. – Vol. 96. – P. 371–378.
27. ROY B. *Multicriteria Methodology for Decision Aiding.* **–** Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.
28. SAARI D.G. *Basic Geometry of Voting*. – Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1995.
29. SAATY T.L. *The Analytic Hierarchy Process*. – New York: McGraw-Hill, 1980.
30. STEWART T.J. *Simplified approaches for multi-criteria decision making under uncertainty* // Journal of Multi-Criteria Decision Analysis. – 1995. – Vol. 4. – P. 246–258.
31. TERVONEN T., FIGUEIRA J.R. *A Survey on Stochastic Multicriteria Acceptability Analysis Methods* // Journal of Multi-Criteria Decision Analysis. – 2008. – Vol. 15. – P. 1–14.

32. WANG X., KERRE E. *Reasonable Properties for the Ordering of Fuzzy Quantities* // Fuzzy Sets and Systems. – 2001. – Vol. 118. – P. 375–405.
33. VON WINTERFELDT D., EDWARDS W. *Decision Analysis and Behavioral Research*. – Cambridge: Cambridge University Press, 1986.
34. YATSALO B., DIDENKO V., GRITSYUK S., MIRZE-ABASOV O. *Multi-Criteria Spatial Decision Support System DECERNS: Application to Land Use Planning* // International Journal of Information Systems and Social Change. – 2010. – Vol. 1, No. 1. –P. 11–30.
35. ZADEH L.A. *Generalized theory of uncertainty (GTU) – principal concepts and ideas* // Computational Statistics & Data Analysis. – 2006. – Vol. 51. – P. 15–46.
36. ZIMMERMANN H. *An application-oriented view of modeling uncertainty* // European Journal of Operational Research. – 2000. – Vol. 122. – P. 190–198.

UNCERTAINTY TREATMENT WITHIN MULTICRITERIA DECISION ANALYSIS WITH THE USE OF ACCEPTABILITY CONCEPT

Boris Yatsalo, National Research Nuclear University IATE MEPHI, Obninsk, Russia, Doctor of science (yatsalo@iate.obninsk.ru).
Sergey Gritsyuk, National Research Nuclear University IATE MEPHI, Obninsk, Russia, PhD student (s.gritsyuk@gmail.com).
Oleg Mirzeabasov, National Research Nuclear University IATE MEPHI, Obninsk, Russia, Cand.Sc. (oam@iate.obninsk.ru).
Maria Vasilevskaya, National Research Nuclear University IATE MEPHI, Obninsk, Russia, Master of informatics (mvvasilevskaya@gmail.com).

Abstract: The new approach to uncertainty treatment within multicriteria decision analysis taking into account uncertainties of criteria values and subjective judgments has been presented. The methods suggested (FMAA, Fuzzy Multicriteria Acceptability Analysis, and ProMAA, Probabilistic MAA) are based on assessing rank acceptability indices. The general approach to FMAA/ProMAA implementation along with its specification for multicriteria additive utility models is discussed. Realization of FMAA/ProMAA/is based on the numerical approximation of functions of random/fuzzy variables and the numerical assessment of integrals without Monte Carlo simulations. The decision support system DECERNS WebSDSS which implements FMAA and ProMAA as well as several other multicriteria decision analysis methods has been briefly described.

Keywords: multi-criteria decision analysis; uncertainty analysis; multicriteria acceptability analysis; decision support systems; *DECERNS WebSDSS.*

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Д. А. Новиковым