УДК 517.958
ББК 22.161.5

ИССЛЕДОВАНИЕ УСЛОВИЙ ПРИЧИННОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМ ОБЪЕКТОМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ (ОСОБЫЕ СЛУЧАИ). ЧАСТЬ II

Солнечный Э. М.[1], Черёмушкина Л. А.[2]
(*Учреждение Российской академии наук
Институт проблем управления РАН, Москва*)

Для одного из особых видов граничных условий на одномерно распределённый объект теплопроводности конечной длины получены оценки норм операторов, входящих в достаточное условие детерминированности, причинности и устойчивости системы управления объектом с помощью нелинейной обратной связи.

Ключевые слова: система управления, причинность, устойчивость, распределенные динамические системы, линейный объект теплопроводности, теория функций комплексного переменного.

1. Введение

Настоящая работа опирается на изложенную в [4] методику исследования условий детерминированности, причинности и устойчивости системы, состоящей из линейного распределённого объекта и, вообще говоря, нелинейной обратной связи. Работа содержит исследование ограниченности операторов, входящих в полученное в [4] достаточное условие причинности и устойчивости системы управления одномерно распределённым объек-

[1] *Энгель Михайлович Солнечный, доктор физико-математических наук (Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, тел. (495) 334-92-29).*
[2] *Людмила Александровна Черёмушкина (Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, тел. (495) 334-92-29).*

том теплопроводности конечной длины $l > 1$, и определение оценок норм этих операторов.

Объект, рассматриваемый в данной работе, описывается уравнениями

$$(1.1)\qquad \begin{cases} c\dfrac{\partial \Delta T}{\partial t} = -\dfrac{\partial \Delta q}{\partial x}, \\ \Delta q = -l\ \dfrac{\partial \Delta T}{\partial x}; \end{cases}$$

с граничными условиями вида

$$(1.2)\qquad C_0 y\,|_{x=0} + C_l y\,|_{x=l} = u\,,$$

где $y = \begin{pmatrix} \Delta T \\ \Delta q \end{pmatrix}$; $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$; u − отклонение входного воздействия на объект от его установившегося значения; ΔT, Δq – отклонение соответственно температуры T и потока тепла q (в направлении возрастания x) от их установившихся значений; t – время; x – координата вдоль длины объекта ($x \in \mathbf{L} = [0,\ l]$); c – теплоемкость теплопередающей среды на единицу длины; λ – коэффициент теплопроводности среды; $C_0 = (c_{0rs})$ и $C_l = (c_{lrs})$, где $r, s = 1, 2,$ – заданные числовые квадратные матрицы 2-го порядка.

При этом в рассматриваемом в данной работе особом случае матрицы C_0 и C_l полагаются такими, что определяемые через элементы этих матриц коэффициенты $a_0 = \det C_0 + \det C_l$ и $a_1 = \det((c_{0r1})(c_{lr2})) = c_{011}c_{l21} - c_{l11}c_{021}$ не равны нулю. Здесь $p = 1, 2$, т.е. (c_{0p1}), (c_{lp1}) – первые столбцы матриц C_0 и C_l соответственно. Два же других коэффициента $a_2 = \det((c_{0p1})(c_{lp2}))$ и $a_{12} = \det((c_{0p1})(c_{lp2})) - \det((c_{0p2})(c_{lp1}))$, $p = 1, 2$, равняются нулю: $a_2 = 0$, $a_{12} = 0$ (см. [4]).

Один из простейших видов матриц C_0, C_l, удовлетворяющих этим условиям, представлен в следующем примере:

$$(1.3)\qquad \begin{cases} \qquad\qquad \Delta T\big|_{x=0} & = \quad u_1, \\ b\Delta q\big|_{x=0} + \Delta T\big|_{x=l} & = \quad u_2; \end{cases}$$

где $b \neq 0$.

В настоящей работе, являющейся продолжением работы [5], проводится:

1. Исследование расположения полюсов передаточной функции Y объекта от u к y, т.е. нулей её знаменателя D, имеющего для рассматриваемой задачи вид

$$D = a_0 - \frac{a_1}{k} S_l = \frac{a_1}{k} P, \tag{1.4}$$

где $k = \sqrt{cl/q}$; q – константа, имеющая размерность времени; $S_l = (al/\sqrt{q})(\operatorname{sh}\hat{z}/\hat{z})$; $a = \sqrt{c/l}$; $\hat{z}(p) = al\sqrt{p}$ – однозначная ветвь функции $z(p) = al\sqrt{p}$ комплексного переменного p с областью значений $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^+ \bigcup \{z = it : t \geq 0\} \subset \mathbf{C}$. Здесь $\mathbf{C}$ – комплексная плоскость, $\mathbf{C}^+ = \{z = s + it : s > 0\}$; σ, τ – вещественные числа; $P(p) = g - \operatorname{sh}(al\sqrt{p})/al\sqrt{p}$; $\hat{P}(\hat{z}) = g - \operatorname{sh}\hat{z}/\hat{z}$; $g = ka_0/a_1$.

Параметр γ будем далее считать отрицательным (что означает отрицательность произведения a_0a_1). Такой выбор γ гарантирует отсутствие у функции $D(p)$, вещественных положительных нулей (наличие таких нулей у функции $D(p)$ означало бы неустойчивость изучаемого объекта).

2. Определение пространства $\mathbf{U}$ входных воздействий, для которого гарантирована устойчивость объекта, под которой здесь понимается ограниченность оператора $u \to y$. Как следует из выражения для передаточной функции Y объекта (см. [4], формула (2.2)), устойчивость объекта гарантирована при ограниченности сужений на $\mathbf{U}$ операторов

$$\underline{R_{J_xD}} \ (J = H, S; x \in \mathbf{L}),$$

имеющих передаточные функции

$$R_{J_xD} = \frac{J_x}{D} \ (J = H, S), \tag{1.5}$$

где $H_x(p) = \operatorname{ch}\left(\frac{x}{l} al\sqrt{p}\right)$; $S_x(p) = \frac{al}{al\sqrt{p}\sqrt{q}} \operatorname{sh}\left(\frac{x}{l} al\sqrt{p}\right)$.

Пространство **U** ищется в классе пространств $\mathbf{Q}_{(-i,j)}$ (i, j = 1, 2, ...) функций-оригиналов φ [1], равномерно ограниченных при $t > 0$, имеющих i ограниченных первообразных $\varphi^{(-r)}$, $0 \le r \le i$, и j ограниченных (обобщенных) производных $\varphi^{(-s)}$, $0 \le s \le j$. Для краткости $\mathbf{Q}_{(0,j)}$ обозначаем $\mathbf{Q}_j$, а $\mathbf{Q}_{(0,0)}$ обозначаем **Q**. Норма в пространстве $\mathbf{Q}_{(-i,j)}$:

$$(1.6)\qquad \|j\|_{\mathbf{Q}_{(-i,j)}} = \max_{r=0\div i,\, s=0\div j}\left(\operatorname*{vrai\,sup}_{t>0}\left|j^{(-r)}\right|q^{-r}, \operatorname*{vrai\,sup}_{t>0}\left|j^{(s)}\right|q^{s}\right).$$

Функции $R_{J_x D}$ входят как в выражение для передаточной функции объекта Y, так и в достаточное условие детерминированности, причинности и устойчивости замкнутой системы «объект–обратная связь» (см. [4], формула (2.2)), имеющее вид:

$$(1.7)\qquad L_X < 1\,.$$

В (1.7) обозначено (см. [4], формула (2.4)):

$$L_X = m_2 L_{F_{1,\mathbf{U}}} + m_1 L_{F_{2,\mathbf{U}}}\,,$$

$$m_a = (|c_{0a2}| + |c_{la2}|) N_{H,\mathbf{U}} + \frac{|c_{0a1}| + |c_{la1}|}{k} N_{S,\mathbf{U}}\,,$$

$$N_{J,\mathbf{U}} = \sup_{\xi\in\mathbf{L}} \left\|\underline{R_{J_z D}}\right\|_{\mathbf{B}_\mathbf{U}}, \; J = H, S;$$

$\mathbf{B}_\mathbf{U}$ – пространство линейных ограниченных операторов $\mathbf{U} \to \mathbf{Q}$; $L_{F_{a},\mathbf{U}}$ – константа, входящая в условии липшицевости обратной связи:

$$(1.8)\qquad \left\|F_a(\Delta T_1, f) - F_a(\Delta T_2, f)\right\|_\mathbf{U} \le L_{F_a,\mathbf{U}} \left\|\Delta T_1 - \Delta T_2\right\|_\mathbf{X},\; a = 1, 2\,,$$

где $F_\alpha(\Delta T, f)$ – реализуемый обратной связью оператор (вообще говоря, нелинейный) $\mathbf{X} \to \mathbf{U}$; f – внешнее воздействие, действующее на обратную связь; **X** – пространство ограниченных функций ΔT: $\mathbf{L} \to \mathbf{Q}$ с нормой

$$\left\|\Delta T\right\|_\mathbf{X} = \sup_{x\in\mathbf{L}} \left\|\Delta T(x)\right\|_\mathbf{Q}\,.$$

3. Вычисление оценок для норм сужений операторов

$$(1.9)\qquad \underline{R_{J_x P}}\,,\; J = H, S\,,$$

имеющих передаточные функции

(1.10) $$R_{J_x P} = \frac{J_x}{P} = \frac{a_1}{k} R_{J_x D},$$

на пространство **U** и рассматриваемых как операторы $\mathbf{U} \to \mathbf{Q}$. Как видно из выражений для L_X, m_α и $N_{J,\mathbf{U}}$, эти оценки необходимы для определения (по достаточности) класса **FB** обратных связей, для каждой из которых гарантированы детерминированность, причинность и устойчивость замкнутой системы.

2. Исследование полюсов функций $R_{J_x P}$ ($J = H$, S)

Введём в рассмотрение функцию $h(\tau) = \sin\tau/\tau$ вещественного переменного τ. Так как функция h – чётная, достаточно считать τ положительным.

В интервалах $\mathbf{I}_n = (\pi(2n-1), 2\pi n)$, $n \geq 1$, функция h принимает отрицательные значения и имеет минимумы в точках $\bar{t}_n$, являющихся решениями уравнения $\tau = \mathrm{tg}\,\tau$; точка $\bar{t}_n$ располагается в интервале $\mathbf{J}_n = (\pi(2n-1), \pi(2n-0{,}5))$. Минимальное значение функции h в интервале $\mathbf{I}_n$:

(2.1) $$\bar{h}_n = \min_{\mathbf{J}_n} \frac{\sin t}{t} = h(\bar{t}_n) = \cos\bar{t}_n = -\frac{1}{\sqrt{1+\bar{t}_n^{\,2}}}.$$

Обозначим через N_γ наибольшее из чисел n, для которых $g \geq \bar{h}_n$ (если $g < \bar{h}_1$, считаем $N_\gamma = 0$), через h^* обозначим величину $\bar{h}_{N_g} = h(\bar{t}_{N_g})$, а через t^* − величину $\bar{t}_{N_g}$.

Т е о р е м а 1. *При любом* $g \in (\bar{h}_1, 0)$ *в области* $\hat{\mathbf{C}}$ *функция* $\hat{P}(\hat{z})$ *имеет* $2N_\gamma$ *простых чисто мнимых нулей вида* $\hat{z}^0_{nk} = it_{nk}$, $k = 1, 2$, *где* τ_{nk} − *решения уравнения*

(2.2) $$\frac{\sin t}{t} = g,$$

находящиеся в интервале $\mathbf{I}_n = (\pi(2n-1), 2\pi n)$, *а при* $g = h^*$, *где*

$$h^* = \bar{h}_{N_g} = -\frac{1}{\sqrt{1+(t^*)^2}}, \quad t^* = \bar{t}_{N_g},$$

функция $\hat{P}$ *имеет нуль 2-го порядка* $\zeta^* = i\tau^*$. *Этим нулям при* $g \in (\bar{h}_1, 0)$ *соответствуют простые вещественные отрицательные нули*

(2.3) $$p_{nk} = -\left(\frac{t_{nk}}{al}\right)^2$$

функций P *и* D, *а при* $\gamma = h^*$ – *нуль 2-го порядка*

(2.4) $$p^* = -\left(\frac{t^*}{a\,l}\right)^2.$$

Кроме того, функция $\hat{P}$ *при любом* $g < 0$ *имеет в* $\hat{\mathbf{C}}$ *счётное число пар простых комплексных нулей вида* $z_n^0 = s_n^0 \pm it_n^0$, *у которых* $s_n^0 > 0$, $t_n^0 \in \mathbf{M}_n$, $\mathbf{M}_n = (p(2n-1), \bar{t}_n)$, $n \geq N_g + 1$. *Этим парам нулей функции* $\hat{P}(\hat{z})$ *соответствуют пары сопряжённых комплексных нулей*

(2.5) $$p_n^0 = \left(\frac{z_n^0}{al}\right)^2$$

функции $P(p)$. *При* $g > \tilde{g}_1 = -4{,}5697$ *все нули функции* $\hat{P}$ *удовлетворяют условию* $|\operatorname{Re} z_{nk}^0| < |\operatorname{Im} z_{nk}^0|$, *поэтому все нули функции* $P(p)$ *располагаются в полуплоскости* $\mathbf{C}^- = \{p\colon \operatorname{Re} p < 0\}$. *Если же* $g < \tilde{g}_1$, *то* $P(p)$ *приобретает такие нули вида* $z_n^0 = s_n^0 \pm it_n^0$, *у которых* $s_n^0 \geq t_n^0$, *что означает неустойчивость объекта управления.*

Доказательство теоремы см. в приложении П1.

Исходя из требования устойчивости объекта и опираясь на теорему 1, в дальнейшем будем полагать $g > \tilde{g}_1$. Как показывают вычисления, минимумы функции $h(\tau)$ в первых трех интервалах $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3$ достигаются в точках

$$\bar{t}_1 = 4{,}49341,\quad \bar{t}_2 = 10{,}90412,\quad \bar{t}_3 = 17{,}22076$$

и, соответственно, равны

$$\bar{h}_1 = -0{,}21723,\ \bar{h}_2 = -0{,}09133,\ \bar{h}_3 = -0{,}05797.$$

Поэтому при $|\gamma| > 0{,}21723$ функция $\hat{P}$ не имеет чисто мнимых нулей ($N_g = 0$), а функция P, соответственно, не имеет вещественных нулей. При $0{,}01933 < |\gamma| \le 0{,}21723$ имеем $N_g = 1$. При меньших значениях $|\gamma|$ величину N_g можно оценить следующим образом.

Т е о р е м а 2. *При* $|\gamma| \le 0{,}0194$ *величина* N_g *находится в диапазоне*

(2.6) $$N_g \in \left(\frac{1}{2p\,|g\,|} - \frac{3}{4}, \frac{1}{2p\,|g\,|} + \frac{1}{2} \right).$$

Если при этом $|g\,| \in \mathbf{\Gamma}_1 = (|\,\bar{h}_{N_g+1}\,|, 1/\,r_{N_g}\,]$, *где* $r_{N_g} = p\,(2N_g - 0{,}5)$, *то*

(2.7) $$N_g = \operatorname{int}\left(\frac{1}{2p\,|g\,|} + \frac{1}{4} \right),$$

где $\operatorname{int}(x)$ − *целая часть числа* x.

Если же $|g\,| \in \mathbf{\Gamma}_2 = (1/\,r_{N_g}, h^*]$, где $h^* = |\,\bar{h}_{N_g}\,|$, *то*

(2.8) $$N_g = \operatorname{int}\left(\frac{1}{2p\,|g\,|} + \frac{1}{2} \right).$$

Доказательство теоремы см. в приложении П2.

3. *Разложение операторов на составляющие по полюсам их передаточных функций* $R_{J_x P}$ *(J = H, S)*

Введём в рассмотрение функции

(3.1) $$F_J = \frac{R_{J_x P}}{\Theta}, \quad J = H, S\,,$$

где $\Theta(p) = \theta p$, θ – см. раздел 1, и систему $\{\mathbf{G}_n, n \ge 1\}$ окружностей

(3.2) $$\mathbf{G}_n = \{p \in \mathbf{C} : |\,p\,| = r_n^{\,2}/(a\,l)^2\}, \text{ где } r_{N_g} = p\,(2N_g - 1/2)\,.$$

Л е м м а. *Значения функций* F_J ($J = H, S$) *на окружностях* $\mathbf{G}_n$ *стремятся к нулю при* $n \to \infty$.

Доказательство леммы дано в приложении П3. Лемма позволяет применить к функциям F_J теорему Коши [1, п. 71].

Т е о р е м а 3. *Функция F_J представима в виде суммы ряда, составленного из главных частей её разложений в ряд Лорана в окрестностях полюсов* p_n^0 $(n \ge 1)$:

(3.3) $$F_J = W_{J0} + W_{J\mathrm{r}} + \tilde{W}_{J\mathrm{r}N_g} + W_J^* + W_{J\mathbf{c}},$$

где $W_{J0}(p) = \dfrac{C_{J0}}{p}$; $W_{J\mathrm{r}} = \sum\limits_{n=1}^{N_g-1} \tilde{W}_{J\mathrm{r}n}$;

$$\tilde{W}_{J\mathrm{r}n}(p) = \sum_{k=1}^{2} \frac{C_{Jnk}}{p - p_{nk}},\ n = 1, \ldots, N_g;$$

$$W_J^*(p) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad g \in (\bar{h}_{N_{g+1}}, h^*), \\ \dfrac{C_{J1}^*}{p - p^*} + \dfrac{C_{J2}^*}{(p - p^*)^2} & \text{при} \quad g = h^*; \end{cases}$$

$$W_{J\mathbf{c}}(p) = \sum_{n=N_g+1}^{\infty} \left(\frac{C_{Jn}^0}{p - p_n^0} + \frac{\bar{C}_{Jn}^0}{p - \bar{p}_n^0} \right);$$

$p \in \mathbf{C}$, p_{nk}, p_n^0, p^*, h^* – *см. формулировку теоремы* 1;

$$C_{H0} = \frac{1}{q(g-1)}; \quad C_{S0} = \frac{al}{q^{3/2}} \frac{x}{l} \frac{1}{g-1};$$

$$C_{Hnk} = \frac{2}{q} \frac{\cos((x/l)t_{nk})}{g + s_{nk}\sqrt{1 - g^2 t_{nk}^2}}; \quad C_{Snk} = \frac{2al}{q^{3/2}} \frac{\sin((x/l)t_{nk})}{t_{nk}(g + s_{nk}\sqrt{1 - g^2 t_{nk}^2})};$$

$s_{n1} = 1$ *при* $n \in [1, N_g]$; $s_{n2} = -1$ *при* $n \in [1, N_g - 1]$;

$s_{N_g 2} = sign(|g| - 1/r_{N_g})$;

$$C_{H1}^* = \frac{4}{t^* q} \sqrt{1 + (t^*)^2} \left(\frac{\cos((x/l)t^*)}{3t^*} - \frac{x}{l} \sin((x/l)t^*) \right);$$

$$C_{S1}^* = \frac{4al}{(t^*)^2} \frac{\sqrt{1 + (t^*)^2}}{q^{3/2}} \left(\frac{4}{3} \frac{\sin((x/l)t^*)}{t^*} - \frac{x}{l} \cos((x/l)t^*) \right);$$

$$C_{H2}^* = \frac{8}{(al)^2 q} \cos((x/l)t^*) \sqrt{1 + (t^*)^2};$$

$$C_{S2}^{*} = \frac{8}{a\,lq^{3/2}} \frac{\sin((x/l)t^{*})}{t^{*}} \sqrt{1+(t^{*})^{2}}\ ;$$

$$C_{Hn}^{0} = \frac{2}{q} \frac{\mathrm{ch}((x/l)z_{n}^{0})}{g-\mathrm{ch}\,z_{n}^{0}},\quad C_{Sn}^{0} = \frac{2a\,l}{q^{3/2}} \frac{\mathrm{sh}((x/l)z_{n}^{0})}{z_{n}^{0}(g-\mathrm{ch}\,z_{n}^{0})}\ .$$

Доказательство теоремы дано в приложении П4.

Из (3.3) следуют разложения для функций $R_{J_x P}$ ($J = H, S$):

$$R_{J_x P} = C_{J0}q + \Theta(W_{J\,\mathrm{r}} + \tilde{W}_{J\,\mathrm{r}N_g} + W_J^{*} + W_{J\mathbf{c}})\ . \tag{3.4}$$

Функции $C_{J0}q$, $\tilde{W}_{J\,\mathrm{r}n}$ ($n = 1, \ldots, N_g$), $W_{J\,\mathrm{r}}$, W_J^{*} и $W_{J\mathbf{c}}$ являются соответственно передаточными функциями операторов

$\underline{C_{J0}q}$, $\underline{\tilde{W}_{J\,\mathrm{r}n}}$ ($n = 1, \ldots, N_g$), $\underline{W_{J\,\mathrm{r}}}$, $\underline{W_J^{*}}$ и $\underline{W_{J\mathbf{c}}}$;

эти операторы входят в пространство **B** ограниченных операторов $\mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ (см. раздел 1). Норма оператора с передаточной функцией $C_{J0}\theta$ в пространстве **B** равна, естественно, $C_{J0}\theta$. Оператор с передаточной функцией Θ, который пропорционален оператору обобщённого дифференцирования, входит в пространство $\mathbf{B}_1$ операторов $\mathbf{Q}_1 \to \mathbf{Q}$ ($\mathbf{Q}_1$ – см. раздел 1), и его норма в пространстве $\mathbf{B}_1$ равна 1.

Ниже будут рассмотрены вопросы вычисления или оценки норм остальных операторов с передаточными функциями, входящими в правую часть (3.14).

4. Вычисление норм операторов $\underline{\tilde{W}_{J\,\mathrm{r}n}}$ ($n \le N_\gamma$, $J = H, S$) и оценка норм операторов $\underline{W_{J\,\mathrm{r}}}$

Т е о р е м а 4. *Нормы операторов* $\underline{\tilde{W}_{J\,\mathrm{r}n}}$ ($n = 1, \ldots, N_g$) *в пространстве* **B** *вычисляются следующим образом*:

$$\|\underline{W_{H\,\mathrm{r}n}}\|_{\mathbf{B}} = \frac{2(al)^2}{q} \left| \sum_{k=1}^{2} \frac{c_{Hk}}{b_k t_{nk}^{2}} \cos((x/l)t_{nk}) \right|, \tag{4.1}$$

$$\|\underline{W_{S\,\mathrm{r}n}}\|_{\mathbf{B}} = \frac{2(al)^3}{q^{3/2}} \left| \sum_{k=1}^{2} \frac{c_{Sk}}{b_k t_{nk}^{3}} \sin((x/l)t_{nk}) \right|, \tag{4.2}$$

где $c_{Jk}=\begin{cases} 1 & при \quad Q_J\le 1, \\ 2Q_J^{-r_k}-1 & при \quad Q_J>1; \end{cases}$ $k=1,2$; $r_k=\dfrac{t_{nk}^2}{t_{n2}^2-t_{n1}^2}$;

$J=H,S$; $Q_H=-\dfrac{b_1}{b_2}\dfrac{\cos((x/l)t_{n2})}{\cos((x/l)t_{n1})}$; $Q_S=-\dfrac{b_1}{b_2}\dfrac{t_{n1}}{t_{n2}}\dfrac{\sin((x/l)t_{n2})}{\sin((x/l)t_{n1})}$;

$b_k=g+s_{nk}t_{nk}\sqrt{t_{nk}^2-g^2}$; s_{nk} – *см. формулировку теоремы* 3; *значения* t_{n1}, t_{n2} ($t_{n1}\in\mathbf{M}_n=(p(2n-1),\bar{t}_n)$, $t_{n2}\in\mathbf{L}_n=(\bar{t}_n,2pn)$) *вычисляются путем численного решения уравнения* (2.2) *в интервалах* $\mathbf{M}_n$ *и* $\mathbf{L}_n$.

Доказательство теоремы дано в приложении П5.

Т е о р е м а 5. *При* $|g|<0{,}04$ *нормы операторов* $\underline{W_{J\,\mathrm{r}}}$ $(J=H,S)$ *в пространстве* **B** *могут быть оценены сверху с помощью следующих соотношений*:

(5.1) $\quad \|\underline{W_{J\,\mathrm{r}}}\|_{\mathbf{B}}<k_J(M_{J1}+M_{J2})$,

где $k_H=\dfrac{2}{q}\dfrac{(al)^2}{p^2}$; $k_S=\dfrac{2}{q^{3/2}}\dfrac{(al)^3}{p^3}m_{N_g}$;

$$m_{N_g}=\min\left(1,\left|2p(N_g-1)x/l\right|\right);$$

$$M_{H2}=\frac{1}{|g|}\left(\frac{7}{9}-\frac{1}{4N_g-5}\right);\quad M_{S2}=\frac{1}{|g|}\left(\frac{11}{27}-\frac{1}{(4N_g-5)^2}\right);$$

$$M_{J1}=r_J+m_{J1}+m_{J2};\quad r_J=\begin{cases} 0 & при \quad n_J=N_g-1, \\ \dfrac{p(2n_J+3/2)}{(2n_J+1)^{b_J}} & при \quad n_J\le N_g-2; \end{cases}$$

$$n_H=\mathrm{int}\left(\frac{1-2pg+\sqrt{1-4pg}}{|8pg|}\right);\quad n_S=\mathrm{int}\left(\frac{2-3pg+\sqrt{4-6pg}}{|12pg|}\right);$$

$$b_H=2,\quad b_S=3;$$

$$m_{J1}=\frac{2}{3p+2g}+\frac{B_J}{2}\ln\frac{2+3pg}{2+(4n_J-1)pg}+$$
$$+\frac{A_{J1}}{2}\ln(2n_J-1)+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{b_J}\frac{A_{Ji}}{i-1}\left(1-\frac{1}{(2n_J-1)^i}\right);$$

$$m_{J2} = 0 \text{ } \textit{при} \text{ } n_J \geq N_g - 2 \text{, } \textit{а в случае} \text{ } n_J \leq N_g - 3$$

$$m_{J2} = \frac{p(4N_g - 5)}{(2N_g - 3)^{b_J}(2 + pg(4N_g - 5))} +$$

$$+ \frac{B_J}{2}\ln\frac{2 + pg(4n_J + 7)(4n_J + 7)}{2 + pg(4N_g - 5)} + \frac{A_{J1}}{2}\ln\frac{4N_g - 5}{4n_J + 7} +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{b_J}\frac{A_{Ji}}{i-1}\left(\frac{2^{i-2}}{(4n_J + 7)^{i-1}} - \frac{2^{i-2}}{(4N_g - 5)^{i-1}}\right);$$

$$n_H = \operatorname{int}\left(\frac{1 + 2p\,|g| + \sqrt{1 + 4p\,|g|}}{8p\,|g|}\right);$$

$$n_S = \operatorname{int}\left(\frac{2 + 3p\,|g| + \sqrt{4 + 6p\,|g|}}{12p\,|g|}\right);$$

$$B_H = \left(\frac{p}{a_g}\right)^2; \quad B_S = \left(\frac{p}{a_g}\right)^3 g^2; \quad A_{H1} = \frac{p}{a_g^2}; \quad A_{H2} = A_{S3} = \frac{p}{2a_g};$$

$$A_{S1} = \frac{p^2\,|g|}{a_g^3}; \quad A_{S2} = \frac{p\,|g|}{a_g^2}; \quad a_g = 1 + \frac{p}{2}g; \quad b_H = 2; \quad b_S = 3.$$

Доказательство теоремы см. в приложении П6.

5. Вычисление норм операторов $\underline{W_J^*}$ (J = H, S)

Т е о р е м а 6. *Нормы операторов с передаточной функцией* W_J^* ($J = H, S$) *в пространстве* **B** *вычисляются следующим образом*:

(5.1) $\quad \|\underline{W_J^*}\|_{\mathbf{B}} = a_{J1} + a_{J2}b_J$,

где $a_{H1} = \dfrac{4(a\,l)^2}{(t^*)^3}\sqrt{1 + (t^*)^2}\left(\dfrac{7}{3}\cos((x/l)t^*) + \dfrac{x}{l}\sin((x/l)t^*)\right)$,

$$a_{H2} = -16\frac{(a\,l)^2}{(t^*)^4}\sqrt{1 + (t^*)^2}\cos((x/l)t^*),$$

$$e_H = \frac{1}{3} + \frac{x}{l} t^* \operatorname{tg}((x/l)t^*), \quad b_H = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad e_H \ge 0, \\ \exp(-|e_H|/2) & \textit{при} \quad e_H < 0; \end{cases}$$

$$a_{S1} = \frac{4(al)^3}{(t^*)^4 \sqrt{q}} \sqrt{1+(t^*)^2} \left(\frac{10}{3} \frac{\sin((x/l)t^*)}{t^*} - \frac{x}{l} \cos((x/l)t^*) \right),$$

$$a_{S2} = -16 \frac{(al)^3}{(t^*)^5 \sqrt{q}} \sqrt{1+(t^*)^2} \sin((x/l)t^*),$$

$$e_S = \begin{cases} \dfrac{2}{3} - \dfrac{x}{l} \dfrac{t^*}{2} \operatorname{ctg}((x/l)t^*) & \textit{при} \quad x > 0, \\ \dfrac{1}{6} & \textit{при} \quad x = 0; \end{cases}$$

$$b_S = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad e_S \ge 0, \\ \exp(-e_S) & \textit{при} \quad e_S < 0. \end{cases}$$

Доказательство теоремы дано в приложении П7.

6. Оценка норм операторов $\underline{W_{J\mathbf{c}}}$ (J = H, S)

Т е о р е м а 7. *Нормы операторов с передаточной функцией* $W_{J\mathbf{c}}$ ($J = H, S$) *в пространстве* $\mathbf{B}$ *оцениваются сверху следующим образом*:

1) *при* $|g| < g_1 = 1/\sqrt{p^2 - 1} \approx 0{,}3358$

$$(6.1) \qquad \|\underline{W_{J\mathbf{c}}}\|_{\mathbf{B}} \le \frac{4(al)^2}{q} \frac{1}{J_{N_g+1}} \left| \frac{J_x(z^0_{N_g+1})}{(g - \operatorname{ch} z^0_{N_g+1})} \right| +$$

$$+ \frac{4(al)^2}{q} a_J |g| \left(\frac{m_{1J}}{\Phi_g(N_g+2)} + \tilde{I}_{1J} \right),$$

где $z^0_n = s^0_n + it^0_n$ − *нуль функции* $\hat{P}$ (*см.* (1.4)), *лежащий в полосе* $\{s + it \in \hat{\mathbf{C}} : s > 0, t \in \mathbf{J}_n\}$:

$$z^0_n \in \{s + it \in C : s > 0, t \in \mathbf{J}_n = (2p(n-1), p(2n - 0{,}5))\};$$

$$J_n = (t^0_n)^2 - (s^0_n)^2; \; H_x(p) = \operatorname{ch}((x/l)z); \; S_x(p) = \frac{al}{\sqrt{q}z} \operatorname{sh}((x/l)z);$$

$$a_H = p\ ;\ a_S = a\,l\big/\sqrt{q}\ ;\ n_g = 2N_g + 3;$$

$$m_{1H} = n_g\ ;\ m_{1S} = 1;\ \Phi_g(n) = \Phi_{1g}(n)\Phi_{2g}(n);$$

$$\Phi_{1g}(n) = p^2(2n-1)^2 - 2{,}7\,|g\,|\sqrt{1+p^2(2n-1{,}5)^2}\ ;$$

$$\Phi_{2g}(n) = g + \sqrt{p^2(2n-1)^2 g^2 - 1}\ ;$$

$$\tilde{I}_{1H} = \frac{\sqrt{1+g^2}\,\Lambda(n_g)}{2p^2 g^2 \tilde{a}_g(y_g)} + \frac{27a_g}{p^2 b_g}\left(\frac{2j(N_g)}{\tilde{a}_g(y_g)} + g\right);$$

$$n_\gamma = 2N_\gamma + 3\ ;\ j(N_g) = p\,n_g - \sqrt{1+p^2(2N_g + 2{,}5)^2}\ ;$$

$$b_g = \sqrt{2{,}7\,|g\,|(4j\,(N_g) - 2{,}7\,|g\,|)}\ ;\ a_g = \operatorname{arctg}\frac{b_g}{2p\,n_g + 2{,}7g}\ ;$$

$$y_g = \frac{1}{pg}\sqrt{1+g^2}\ ;\ \Lambda(n_g) = \ln\frac{\sqrt{\tilde{a}_g(n_g)}}{p\,(n_g - y_g)}\ ;$$

$$\tilde{a}_g(y_g) = 2{,}7p\ |g\,|\ j\ (N_g) + (1+g^2)/g^2 - 2{,}7\sqrt{1+g^2}\ ;$$

$$\tilde{a}_g(n_g) = (pn_g)^2 - 2{,}7\,|g\,|\sqrt{1+p^2(2N_g + 2{,}5)^2}\ ;$$

2) *при* $|g\,| \in [g_1, |\tilde{g}_1\,|))$

$$(6.2)\qquad \left\|\underline{W_{J\,\text{c}}}\right\|_{\mathbf{B}} \le \frac{4(al)^2}{q}\left(+a_J|g|\left(\sum_{n=p_g+1}^{k_g} m_{2Jn} + \tilde{I}_{2J}\right)\right)\sum_{n=1}^{p_g}\frac{1}{J_n}\left|\frac{\hat{J}_x\left(z_n^0\right)}{g - \operatorname{ch} z_n^0}\right|.$$

Здесь $m_{2Jn} = \dfrac{m_{2Jn}}{\Phi_g(n)}$; $m_{2Hn} = 2n-1$; $m_{2Sn} = 1$;

$$\tilde{I}_{2H} = \frac{1}{p^2\sqrt{1+g^2}}\ln\frac{l_g}{l_g - y_g}\ ,\ \tilde{I}_{2S} = \frac{1}{p}\left(\frac{|g|}{1+g^2}\ln\frac{l_g}{l_g - y_g} + \frac{1}{pl_g\sqrt{1+g^2}}\right).$$

При этом пределы суммирования k_y *и* p_y *в формуле* (6.2) *зависят от величины следующим образом: представим множество значений* $|g|$ *как объединение полуинтервалов*

$[g_1, |\tilde{g}_1\,|) = \bigcup_{i=1}^{5}[g_i, g_{i+1})$

с границами $g_2 = 0{,}38$, $g_3 = 1{,}49$, $g_4 = 2{,}65$, $g_5 = 3{,}8$, $g_6 = |\tilde{g}_1|$. *Тогда если* $|g| \in [g_i, g_{i+1}) \subset [g_1, \tilde{g}_1)$ при некотором i, *то* $k_g = i$, *а*

$$p_g = \begin{cases} 0 & при \quad |g| \in [g_1, g_2), \\ 1 & при \quad |g| \in [g_2, g_4), \\ 2 & при \quad |g| \in [g_4, g_6). \end{cases}$$

Доказательство теоремы см. в приложении П8.

7. Заключение

Выполненное в разделах 4–6 исследование показывает ограниченность сужений операторов

$$\underline{W_{J\,\mathrm{r}}},\ \tilde{W}_{J\,\mathrm{r}\,N_g},\ \underline{W_J^*},\ \underline{W_{J\,\mathrm{c}}}$$

на пространство **Q** как операторов **Q** → **Q** и даёт оценки сверху их норм. С учётом представления (3.14), для функций $R_{J_x P}$ это означает ограниченность сужений соответствующих им операторов на пространство $\mathbf{Q}_1$ (см. раздел 3) как операторов $\mathbf{Q}_1 \to \mathbf{Q}$, т.е. устойчивость исследуемого объекта по отношению к паре пространств ($\mathbf{Q}_1$, **Q**) (см. [2], п. 2.2). Следовательно, роль пространства **U** управлений (см. раздел 1) может играть пространство $\mathbf{Q}_1$.

Полученные в разделах 4–6 оценки дают возможность определения класса **FB** обратных связей $u_\alpha = F_\alpha(\Delta T, f)$, для каждой из которых гарантированы детерминированность, причинность и устойчивость замкнутой системы управления (см. раздел 1).

ПРИЛОЖЕНИЕ

П1. Доказательство теоремы 1

а) Вещественных нулей функция $\hat{P}(\hat{z})$ не имеет в силу выбора параметра γ ($\gamma < 0$). Рассмотрим вопрос о её чисто мнимых нулях. Так как минимумы $\bar{h}_n$ функции $h(t) = \sin t/t$ (см. пояснения к теореме 1) стремятся к нулю при $n \to \infty$, а

(П1.1) $\hat{P}(it) = g - \dfrac{\sin t}{t} = g - h(t)$,

то при любом $\gamma < 0$ функция $\hat{P}$ имеет лишь конечное число чисто мнимых нулей и вообще не имеет их при

$$g < \bar{h}_1 = \cos\bar{t}_1 = -\frac{1}{\sqrt{1+\bar{t}_1^{\,2}}}.$$

Так как $\gamma < 0$, при $n \le N_\gamma$ функция $\hat{P}$ имеет чисто мнимые нули в полосе $\mathbf{G}_n = \{s + it : s > 0, t \in \mathbf{I}_n\}$, где $\mathbf{I}_n = (\pi(2n - 1), 2\pi n)$.

Если $g > \bar{h}_n$, то $\hat{P}$ имеет пару простых мнимых нулей it_{nk}: $t_{n1} \in \mathbf{M}_n = (p(2n-1), \bar{t}_n)$, $t_{n2} \in \mathbf{L}_n(\bar{t}_n, 2pn)$, t_{nk} − решения уравнения $h(t) = \gamma$, $k = 1, 2$.

Если же $\gamma = h^*$ (см. теорему 1), где

(П1.2) $h^* = \dfrac{\sin t^*}{t^*} = \min\limits_{\mathbf{I}_{N_g}} \dfrac{\sin t}{t}$,

функция $\hat{P}$ имеет нуль $z^* = it^*$, а t^* удовлетворяет уравнениям

(П1.3) $\begin{cases} t = \operatorname{tg} t, \\ -\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} = g. \end{cases}$.

Этот нуль 2-го порядка, ибо

(П1.4) $P'(it^*) = i\dfrac{t^*\cos t^* - \sin t^*}{(t^*)^2} = 0$,

(П1.5) $P''(it^*) = -\cos t^* = \dfrac{1}{\sqrt{1+(t^*)^2}} \ne 0$.

б) Рассмотрим теперь вопрос о комплексных нулях функции $\hat{P}$. Пусть $z_n^0 = s_n^0 + it_n^0$ – такой нуль функции $\hat{P}(\hat{z})$, что $s_n^0 > 0$, $t_n^0 \in [2p(n-1), 2pn)$. В области $\mathbf{C}^+$ при $\sigma > 0$ уравнение

(П1.6) $\hat{P}(\hat{z}) = g - \mathrm{sh}(\hat{z}) / \hat{z} = 0$, где $\hat{z} = s + it$,

эквивалентно уравнению

$$\mathrm{sh}(s + it) - g(s + it) = 0$$

или системам уравнений

(П1.7) $$\begin{cases} \mathrm{Re}(\hat{z}\hat{P}(\hat{z})) = 0, \\ \mathrm{Im}(\hat{z}\hat{P}(\hat{z})) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{sh}\,s\,\cos t - sg = 0, \\ i\,\mathrm{ch}\,s\,\sin t - itg = 0; \end{cases}$$

которые при приводимы к виду

(П1.8) $$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{sh}\,s\,\cos t}{s} - g = 0, \\ \dfrac{\mathrm{tg}\,t}{t} - \dfrac{\mathrm{th}\,s}{s} = 0. \end{cases}$$

Введем функции двух переменных $Z(\sigma, \tau)$ и $G(\sigma, \tau)$:

(П1.9) $$Z(s,t) = \frac{\mathrm{sh}\,s\,\cos t}{s} - g, \quad G(s,t) = \frac{\mathrm{tg}\,t}{t} - \frac{\mathrm{th}\,s}{s}.$$

Из выражений для функций Z и G видно, что эти функции чётны по τ. Поэтому далее будем искать нули лишь в первом открытом квадранте $\{\sigma > 0, \tau > 0\}$ комплексной плоскости $\mathbf{C}^+$.

Если $\hat{P}(s_n^0 + it_n^0) = 0$, s_n^0 и t_n^0 должны удовлетворять уравнениям системы (П1.8), т.е.

(П1.10) $Z(s_n^0, t_n^0) = 0$,

(П1.11) $G(s_n^0, t_n^0) = 0$.

Отсюда с учетом неравенств $\gamma < 0$, $s_n^0 > 0$, $t_n^0 > 0$ следует, что $\cos t_n^0 < 0$, $\sin t_n^0 < 0$, т.е. $t_n^0 \in \mathbf{J}_n = (p(2n-1), p(2n-0{,}5))$.

Так как $\mathrm{th}\,\sigma/\sigma < 1$, из (П1.11) следует, что

$t_n^0 > \mathrm{tg}\,t_n^0$, т.е. $t_n^0 \cos t_n^0 - \sin t_n^0 < 0$ и $h'(t_n^0) < 0$.

Поэтому t_n^0 лежит в $\mathbf{M}_n = (p(2n-1), \bar{t}_n)$ − интервале убывания функции *h:* $t_n^0 < \bar{t}_n$. Так как $\bar{t}_n \in \mathbf{J}_n$, то $|\cos t_n^0| > |\cos \bar{t}_n| = |\bar{h}_n|$. Учтя, что $\operatorname{sh}\sigma > \sigma$, из (П1.10) получаем: $|g| > |\cos t_n^0|$. Поэтому

(П1.12) $|g| > |\cos t_n^0| > |\cos \bar{t}_n| = |\bar{h}_n|$.

Следовательно, при $n \le N_\gamma$ (т.е. если $g \ge \bar{h}_n$) функция $\hat{P}$ не имеет нулей в полосе $\{s + it : s > 0, t \in [2p(n-1), 2pn)\}$.

в) Итак, если $z_n^0 = s_n^0 + it_n^0$ − нуль функции $\hat{P}$ и $s_n^0 > 0$, то $n > N_\gamma$, $|\bar{h}_n| < |g|$, и $z_n^0 \in \{(s + it) : s > 0, t \in \mathbf{M}_n)\}$.

Докажем теперь, что при любом $n > N_\gamma$, т.е. при $|\bar{h}_n| < |g|$, в области $\mathbf{G}_n$ функция $\hat{P}$ имеет один и только один нуль.

В области $\mathbf{\Pi}_n = \{(s, t) : s > 0, t \in \mathbf{J}_n)\} \subset \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$ уравнение (П1.10) неявно задает функцию $t = u(s)$. Действительно, частные производные функции $Z(s, t)$ всюду в $\mathbf{\Pi}_n$ отличны от 0, при этом

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = -\frac{\operatorname{sh} s \sin t}{s} > 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial s} = \frac{s \operatorname{ch} s - \operatorname{sh} s}{s^2} \cos t < 0.$$

Поэтому из теоремы о неявной функции следует, что заданная уравнением (П1.10) функция $t = u(s)$ монотонно возрастает, стремясь при $\sigma \to \infty$ к $t = p(2n - 0{,}5)$, так как $\cos(u(s)) \to 0$. При $\sigma \to 0$ согласно (П1.10) $\cos(u(s)) \to \gamma$, и так как по условию $|g| > |\bar{h}_n| = |\cos \bar{t}_n|$, то

(П1.13) $\lim\limits_{s \to 0} u(s) < \bar{t}_n$.

Далее, частные производные функции $G(\sigma, \tau)$ (см. П1.11) в области $\mathbf{\Pi}_n$ строго положительны:

(П1.14) $\dfrac{\partial G}{\partial s} = \dfrac{-s + \operatorname{sh} s \operatorname{ch} s}{s^2 \operatorname{ch}^2 s} > 0, \ \dfrac{\partial G}{\partial t} = \dfrac{t - \sin t \cos t}{t^2 \cos^2 t} > 0,$

поэтому уравнение $G(\sigma, \tau) = 0$ в области $\mathbf{\Pi}_n$ тоже неявно задает функцию $t = v(s)$, которая монотонно убывает с ростом σ; при этом при $\sigma \to 0$ значения $v(\sigma)$ стремятся к $\bar{t}_n$, так как $\bar{t}_n = \operatorname{tg} \bar{t}_n$, а при $\sigma \to +\infty$ − к $\tau = \pi(2n - 1)$. Из неравенств

$$\lim_{s\to 0} u(s) < \bar{t}_n = \lim_{s\to 0} v(s),$$
$$\lim_{s\to\infty} v(s) = p(2n-1) < p(2n-0{,}5) = \lim_{s\to\infty} u(s)$$

следует, что возрастающая функция $t = u(s)$ и убывающая функция $t = v(s)$ пересекаются в некоторой точке $(s_n^0, t_n^0) \in \mathbf{\Pi}_n$. Эта точка пересечения единственная в силу строгой монотонности этих функций. Отсюда и из выводов пункта **в)** этого раздела следует, что при $|\bar{h}_n| < |g|$ функция $\hat{P}$ имеет один и только один нуль вида $z_n^0 = s_n^0 + it_n^0$ в области $\mathbf{G}_n$.

г) Для устойчивости объекта необходимо, чтобы все нули функции D располагались в $\mathbf{C}^- = \{p \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} p < 0\}$. Нули функции D, соответствующие чисто мнимым нулям функции $\hat{P}$, удовлетворяют этому требованию; для комплексных нулей, наличие которых установлено в п. **в)**, это условие означает необходимость выполнения неравенства:

(П1.15) $\operatorname{Re} z_n^0 < |\operatorname{Im} z_n^0|$

При любом σ число $\sigma + iv(\sigma)$ (см. п. **в**) является нулём функции $\hat{P}$, если значение γ равно

(П1.16) $g = \dfrac{\operatorname{sh} s \cos(v(s))}{s}$.

Из этого равенства следует, что $|\gamma(s)|$ монотонно растет при $\sigma \to \infty$, так как значения убывающей функции $t = v(s)$ лежат в интервале $\mathbf{J}_n$, где $|\cos t|$ монотонно растет при убывании τ, а, следовательно, $|\cos(v(\sigma))|$, как и отношение $\operatorname{sh} s/s$, монотонно растет с ростом σ.

Поскольку при фиксированном n отношение $v(\sigma)/\sigma$ монотонно убывает при $\sigma \to \infty$, стремясь к нулю, при некотором значении σ, которое обозначим как $\tilde{s}_n$, выполняется равенство

$$v(\tilde{s}_n) = \tilde{s}_n.$$

Это значение можно найти из (П1.8) как решение уравнения

(П1.17) $\operatorname{th} \tilde{s}_n = \operatorname{tg} \tilde{s}_n$

в интервале $\mathbf{J}_n$. Число $\tilde{s}_n + i\tilde{s}_n$ будет нулем функции $\hat{P}$, если

(П1.18) $g = \tilde{g}_n = \dfrac{\operatorname{sh}\tilde{s}_n \cos\tilde{s}_n}{\tilde{s}_n}$.

В силу монотонной зависимости γ от σ лежащий в области $\mathbf{G}_n$ нуль функции $\hat{P}$

$$s_n^0 + it_n^0 = s_n^0 + in_n(s_n^0)$$

удовлетворяет требованию (П1.15) лишь при

(П1.19) $|g| < |\tilde{g}_n|$,

так как тогда $s_n^0 < n_n(s_n^0)$, а $s_n^0 \ge n_n(s_n^0)$ при $|g| \ge |\tilde{g}_n|$.

Из (П1.17) и (П1.16) следует, что $\tilde{g}_n$ монотонно возрастает с ростом *n*. Поэтому, если при *n* = 1 неравенство (П1.19) выполняется, то оно справедливо для любого *n*.

Следовательно, выполнение условия (П1.15) для всех нулей функции $\hat{P}$ (что необходимо для устойчивости объекта) имеет место лишь для значений γ, строго больших величины $\tilde{g}_1$. Из (П1.17) и (П1.18) находим численные значения $\tilde{s}_1$ и $\tilde{g}_1$:

(П1.20) $\tilde{s}_1 = 3{,}9266$, $\tilde{g}_1 = -4{,}5687$.

Теорема 1 доказана.

П2. Доказательство теоремы 2

Введём обозначение $\rho_n = \pi(2n - 0{,}5)$. Так как

(П2.1) $h(r_n) = -1/r_n$,

то $|\bar{h}_n| > 1/r_n$.

С другой стороны (см. (2.1)),

(П2.2) $|\bar{h}_n| = 1\Big/\sqrt{1+\bar{t}_n^{\,2}} < 1/p(2n-1)$,

поэтому

$$\frac{1}{r_{N_g+1}} < |\bar{h}_{N_g+1}| < \frac{1}{p(2N_g+1)} < \frac{1}{p(2N_g-0{,}5)} < |\bar{h}_{N_g}| < \frac{1}{p(2N_g-1)}.$$

Отсюда, если $|g| \in (\bar{h}_{N_g+1}, \bar{h}_{N_g}]$, то

$$\frac{1}{p(2N_g+1{,}5)} < |\bar{h}_{N_g+1}| < |g| \le |\bar{h}_{N_g}| < \frac{1}{p(2N_g-1)};$$

следовательно,

(П2.3) $$N_g \in \left(\frac{1}{2pg} - 0{,}75, \frac{1}{2pg} + 0{,}5 \right),$$

что допускает два возможных значения для N_γ.

Если же

(П2.4) $$g \in \mathbf{\Gamma}_1 = (1/\, r_{N_g}, |\bar{h}_{N_g}|],$$

то $\dfrac{1}{p\,(2N_g - 0{,}5)} < |g| < \dfrac{1}{p\,(2N_g - 1)}$, т.е. $N_g - 0{,}5 < \dfrac{1}{2p\,|g|} < N_g - 0{,}25$.

Поэтому

$$N_g \in \left(\frac{1}{2p\,|g|} + 0{,}25, \frac{1}{2p\,|g|} + 0{,}5 \right),$$

откуда следует, что

$$N_g \in \operatorname{int}\left(\frac{1}{2pg} + 0{,}5 \right).$$

Если

(П2.5) $$g \in \mathbf{\Gamma}_2 = (|\bar{h}_{N_g+1}|, 1/\, r_{N_g}],$$

то

$$\frac{1}{p\,(2N_g - 0{,}5)} \le |g| < \frac{1}{p\,(2N_g + 1{,}5)},$$

поэтому

$$N_g \in \left(\frac{1}{2p\,|g|} - 0{,}75\,, \frac{1}{2p\,|g|} + 0{,}25 \right],$$

откуда следует, что

$$N_g \in \operatorname{int}\left(\frac{1}{2pg} + 0{,}25 \right).$$

Теорема 2 доказана.

П3. Доказательство леммы

Рассмотрим функции

(П3.1) $$F_H = \frac{R_{H_x P}}{qp} = \frac{H_x}{P(p)}, \quad F_S = \frac{R_{S_x P}}{qp} = \frac{S_x}{P(p)}.$$

Оценим модули функций $|R_{J_x P}|$ ($J = H, S$, см. (1.10))

(П3.2) $$|R_{H_x P}| = \left|\frac{\operatorname{ch}((x/l)al\sqrt{p})}{P(p)}\right| \le \frac{|z||\operatorname{ch}(z)|}{||g|z + \operatorname{sh} z|} \le \frac{|z||\operatorname{ch} s|}{||g|z + \operatorname{sh} z|},$$

(П3.3) $$|R_{S_x P}| = \left|\frac{\operatorname{sh}((x/l)al\sqrt{p})}{\sqrt{qp}P(p)}\right| \le \frac{al|\operatorname{ch} s|}{\sqrt{q}\,||g|z + \operatorname{sh} z|}$$

где $z = al\sqrt{p} = s + it \in \mathbf{C}$.

Из (П3.2)–(П3.3) следует, что лемма справедлива, если функция

(П3.4) $$f(z) = \left|\frac{|g|z}{\operatorname{ch} s} + \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} s}\right|$$

при $n \to \infty$ равномерно ограничена на полуокружностях

$$\mathbf{\Gamma}_n = \{z \in \mathbf{C} : |z| = r_n = 2pn + 0{,}5p,\ \arg z \in (-p/2, p/2]\},$$

так как отсюда следует, что при $n \to \infty$ модули F_H и F_S равномерно стремятся к нулю на системе окружностей $\{\mathbf{G}_n\}$.

Обозначим через M, M_1 и M_2 модули следующих функций:

(П3.5) $$M(z) = \left|\frac{z|g|}{\operatorname{ch} s} + \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} s}\right|,$$

(П3.6) $$M_1(z) = \left|\frac{z|g|}{\operatorname{ch} s}\right| = \frac{r_n|g|}{\operatorname{ch} s},\quad M_2(z) = \left|\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} s}\right|.$$

Заметим, что справедливы неравенства

(П3.7) $\operatorname{th} s \le M_2(z)$, $M \ge |M_2 - M_1|$.

Нужно показать, что существует такое целое N, что для любого $n > N$ выполняется неравенство $M \ge m$, где m − некоторое число, большее нуля. В силу четности M по σ и τ, достаточно рассмотреть только дугу окружности, лежащую в I-й четверти комплексной плоскости (т.е. если $0 \le \sigma \le r_n$).

Сначала оценим величину $M(\zeta)$ в такой точке $\zeta_n = \sigma_n + i\tau_n$ дуги $\mathbf{\Gamma}_n$, в которой $\tau_n = r_n - 0{,}5\pi$. Точка ζ_n делит рассматриваемую четверть окружности на две дуги $\mathbf{\Gamma}_{n1}$ и $\mathbf{\Gamma}_{n2}$:

$$\mathbf{\Gamma}_{n1} = \{z : z \in \mathbf{\Gamma}_n, \operatorname{Im} z \le t_n\},\quad \mathbf{\Gamma}_{n2} = \{z : z \in \mathbf{\Gamma}_n, \operatorname{Im} z > t_n\}.$$

Действительная часть числа ζ_n равна

(П3.8) $s_n = \sqrt{r_n^2 - t_n^2} = \sqrt{r_n^2 - (r_n - 0{,}5p)^2} = \sqrt{p\, r_n - 0{,}25p^2}$,

следовательно, если $n \to \infty$, то $\sigma_n \to \infty$.

Выберем числа m_1 и m_2 так, что $0 < m_1 < m_2 < 1$.

Из неравенств

(П3.9) $M_2(s_n) = \sqrt{(\mathrm{sh}^2 s + \sin^2 t)} \big/ \mathrm{ch}\, s \geq \mathrm{th}\, s_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{th}\, s_n = 1$,

(П3.10) $\lim\limits_{n\to\infty} M_1(z_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{(r_n - 0{,}5p)\,|g|}{\mathrm{ch}\sqrt{pr_n - 0{,}25p^2}} \right) = 0$

следует существование таких целых N_1 и N_2, что $M_1(\zeta_n) < m_1$ при всех $n > N_1$, а $M_2(\zeta_n) \geq \mathrm{th}\, \sigma_n > m_2$ при всех $n > N_2$. Если же $n > \max(N_1, N_2)$, то

(П3.11) $M(z_n) \geq M_2(z_n) - M_1(z_n) > m_2 - m_1 = m > 0$

(например, выберем $m_1 = 0{,}25$ и $m_2 = 0{,}5$, тогда $m = 0{,}25$).

Далее, в точках $\zeta = \sigma + i\tau$ дуги $\mathbf{\Gamma}_{n2}$, лежащих ниже точки ζ_n (т.е. $\sigma > \sigma_n$), модуль $M_2(\zeta) \geq \mathrm{th}\, \sigma > \mathrm{th}\, \sigma_n > m_2$, а $M_1(\zeta)$ с ростом σ убывает. Поэтому из (П3.11) следует, что для всех точек ζ дуги $\mathbf{\Gamma}_{n2}$ при любом $n > \max(N_1, N_2)$ выполняется неравенство

(П3.12) $M(z) \geq M_2(z) - M_1(z) > M_2(z_n) - M_1(z_n) > m$.

Оценим величину $M(\zeta)$ в точках дуги $\mathbf{\Gamma}_{n1}$. Согласно (П3.5)

(П3.13) $M(z) = \sqrt{\dfrac{(s\,|g| + \mathrm{sh}\, s\, \cos t)^2 + (t\,|g| + \mathrm{ch}\, s\, \sin t)^2}{\mathrm{ch}^2 s}}$.

Заметим, что в точках дуги $\mathbf{\Gamma}_{n1}$ величины $\sin\tau$ и $\cos\tau$ положительны. Поэтому на $\mathbf{\Gamma}_{n1}$ функция $M(\zeta)$ ограничена снизу положительной функцией, зависящей только от σ:

(П3.14) $M_n(z) > \sqrt{\dfrac{r_n^2\,|g|^2}{\mathrm{ch}^2 s} + \mathrm{th}^2 s}$.

Стоящая под корнем в (П3.14) функция

(П3.15) $g(s) = \dfrac{r_n^2\,|g|^2}{\mathrm{ch}^2 s} + \mathrm{th}^2 s$

с ростом σ убывает на дуге $\mathbf{\Gamma}_{n1}$ при каждом n, превосходящем некоторое целое N_3, так как ее производная

$$g'(s) = 2\frac{(1 - r_n^2 |g|^2)\,\mathrm{th}\, s}{\mathrm{ch}^2 s} < 0$$

на $\mathbf{\Gamma}_{n1}$ отрицательна, если $n \geq N_3 > 1/|\gamma|$. При $\sigma = 0$ (в точке ir_n) эта функция равна $(\gamma r_n)^2$, а в точке $\zeta_n = \sigma_n + i\tau_n$ она равна

$$g(z_n) = \frac{r_n^2 |g|^2}{\mathrm{ch}^2 s_n} + \mathrm{th}^2 s_n > \mathrm{th}^2 s_n > m_2^2 \quad \text{(см. (П3.11)).}$$

Поэтому при $n \geq N_3$ во всех точках ζ дуги $\mathbf{\Gamma}_{n1}$:

(П3.16) $M(z) > \sqrt{g(z)} \geq \sqrt{g(z_n)} > m_2 > m$.

Положим $n > N = \max(N_1, N_2, N_3)$.

Согласно (П3.16), (П3.12), при $n > N$ для всех точек $\mathbf{\Gamma}_n$ справедливо неравенство $M(\zeta) > m > 0$, т.е. функция $f(\zeta)$ равномерно ограничена на $\{\mathbf{\Gamma}_n\}$, откуда следует справедливость леммы.

П4. Доказательство теоремы 3

а) Так как

$$F_J = \frac{R_{J_x P}(p)}{qp} = \frac{\hat{J}_x(al\sqrt{p})}{qp\hat{P}(al\sqrt{p})},$$

из выражения для W_{J0} (см. пояснения к (3.3)) следует, что

(П4.1) $$C_{J0} = \operatorname*{res}_0 F_J = \frac{R_{J_x P}(0)}{q}$$

(см. [1, п. 23]). Отсюда следуют приводимые в пояснениях к (3.3) выражения для C_{J0} ($J = H, S$).

б) Из выражения для $\tilde{W}_{J\,\mathrm{r}\,n}$ (см. там же) следует, что

(П4.2) $$C_{Jnk} = \operatorname*{res}_{p_{nk}} F_J = -i\frac{2\hat{J}_x(al\sqrt{p_{nk}})}{qt_{nk}\hat{P}'(it_{nk})} = -\frac{2}{q}\frac{\hat{J}_x(it_{nk})}{t_{nk}h'(t_{nk})} =$$

$$= \frac{2}{q}\frac{\hat{J}_x(it_{nk})}{g - \cos t_{nk}} = \frac{2}{q}\frac{\hat{J}_x(it_{nk})}{g + s_{nk}\sqrt{1 - g^2 t_{nk}^2}}, \quad k = 1, 2, \quad J = H, S.$$

Здесь величина коэффициента s_{nk} определяется так:

$s_{n1} = 1$ при $n \in [1, N_g]$, так как $\cos t_{n1} < \cos\bar{t}_n < 0$;

$s_{n2} = -1$ при $n \in [1, N_g - 1]$, так как в точке t_{n2} функция $|h(t)|$ убывает, но

(П4.3) $|h(t_{n2})| < |h(\bar{t}_{n+1})| < \dfrac{1}{\bar{t}_{n+1}} < \dfrac{1}{r_n} = |h(r_n)|$,

где $r_n = p(2n - 0{,}5)$, следовательно, $t_{n2} > r_n$ и $\cos t_{n1} > 0$;

$s_{N_g 2} = \mathrm{sign}(|g| - 1/r_{N_g})$ (считая sign (0) = 0), так как $\cos t_{N_g 2} < 0$ при $t_{N_g 2} \in (\bar{t}_{N_g}, r_{N_g})$, и $\cos t_{N_g 2} > 0$ при $t_{N_g 2} \in (r_{N_g}, 2pn)$.

Отсюда следуют приводимые в пояснениях к (3.3) выражения для коэффициентов C_{Jnk}.

в) Так как при $g = h^*$ функция F_J имеет в точке $p^* = \dfrac{-(t^*)^2}{(al)^2}$ полюс второго порядка, то в этом случае

(П4.4) $W_J^*(p) = \dfrac{C_{J1}^*}{p - p^*} + \dfrac{C_{J2}^*}{(p - p^*)^2}$.

Так как $P(p^*) = 0$, $P'(p^*) = 0$ и

(П4.5) $\dfrac{d^2 P}{(dp)^2}(p^*) = -\dfrac{(al)^4}{4(z^*)^2}\dfrac{\operatorname{sh} z^*}{z^*} = -\dfrac{(al)^4}{4(t^*)^2\sqrt{1+(t^*)^2}}$,

то

(П4.6) $C_{J2}^* = \lim\limits_{p \to p^*}(F_J(p - p^*)^2) = \dfrac{2\hat{J}_x(al\sqrt{p^*})}{qp^* P''(p^*)}$.

Отсюда с учетом равенств (П1.4) и (П1.5) получаем:

(П4.7) $C_{J2}^* = \dfrac{8\hat{J}_x(it^*)}{q(al)^2}\sqrt{1+(t^2)}$ $(\hat{J}_x = \hat{H}_x, \hat{S}_x)$.

Так как

(П4.8) $\hat{H}_x(it^*) = \cos((x/l)t^*)$, $\hat{S}_x(it^*) = \dfrac{al}{t^*\sqrt{q}}\sin((x/l)t^*)$,

находим, что

(П4.9) $C_{H2}^* = \dfrac{8}{(al)^2 q}\cos((x/l)t^*)\sqrt{1+(t^*)^2}$, (П4.10) $C_{S2}^{*} = \frac{8}{alq^{3/2}} \frac{\sin((x/l)t^{*})}{t^{*}} \sqrt{1+(t^{*})^{2}}$.

Далее,

(П4.11) $C_{J1}^{*} = \operatorname*{res}_{p^{*}} F_{J} = \lim\limits_{p\to p^{*}} \frac{d(F_{J}(p-p^{*})^{2})}{dp} =$

$$= \lim_{p\to p^{*}} \frac{d}{dp}\left(\frac{\hat{J}_{x}(al\sqrt{p})(p-p^{*})^{2}}{qpP} \right) =$$

$$= \lim_{p\to p^{*}} \frac{(p-p^{*})^{2}}{qP} \frac{d}{dp}\left(\frac{\hat{J}_{x}(al\sqrt{p})}{p} \right) +$$

$$+ \lim_{p\to p^{*}} \frac{\hat{J}_{x}(al\sqrt{p})}{qp} \frac{d}{dp}\left(\frac{(p-p^{*})^{2}}{P} \right) =$$

$$= \frac{2}{qP''(p^{*})} \lim_{p\to p^{*}}\left(\frac{p(\hat{J}_{x}(al\sqrt{p}))'_{p} - \hat{J}_{x}(al\sqrt{p})}{p^{2}} \right) +$$

$$- \frac{(al)^{2}\hat{J}_{x}(it^{*})}{q(t^{*})^{2}} \lim_{p\to p^{*}}\left(\frac{2(p-p^{*})P-(p-p^{*})^{2}P'}{P^{2}} \right).$$

Из тэйлоровских разложений функций P и P' в точке p^{*} следует:

(П4.12) $2(p-p^{*})P(p) = P''(p^{*})(p-p^{*})^{3} +$

$$+P'''(p^{*})(p-p^{*})^{4}/3+(p-p^{*})^{4}o(p-p^{*}),$$

(П4.13) $(p-p^{*})^{2}P'(p) = P''(p^{*})(p-p^{*})^{3} + P'''(p^{*})(p-p^{*})^{4}/2+$

$$+(p-p^{*})^{4}o(p-p^{*}).$$

Поэтому

$$\lim_{p\to p^{*}}\left(\frac{2(p-p^{*})P-(p-p^{*})^{2}P'}{P^{2}} \right) =$$

$$= \lim_{p\to p^{*}} - \frac{2(p-p^{*})^{4}P'''(p^{*})/3+(p-p^{*})^{4}o(p-p^{*})}{(P''(p^{*}))^{2}(p-p^{*})^{4}+(p-p^{*})^{4}o((p-p^{*}))} = \frac{-2P'''(p^{*})}{3(P''(p^{*}))^{2}},$$

и, следовательно,

$$C_{1J}^{*}=\frac{-8\sqrt{1+(t^{*})^{2}}}{q(t^{*})^{2}}\left(it^{*}(\hat{J}_{x}(it^{*}))_{z}'/2-\hat{J}_{x}(it^{*})\right)+$$

$$+\frac{(al)^{2}\hat{J}_{x}(it^{*})}{q(t^{*})^{2}}\;\frac{2P'''(p^{*})}{3(P''(p^{*}))^{2}}.$$

Используя соотношения

(П4.14) $$\frac{d^{2}P(p^{*})}{(dp)^{2}}=-\frac{(al)^{4}\operatorname{sh}z}{4z^{3}}=-\frac{(al)^{4}}{4(t^{*})^{2}}\frac{1}{\sqrt{1+(t^{*})^{2}}},$$

(П4.15) $$\frac{d^{3}P(p^{*})}{(dp)^{3}}=-\frac{5(al)^{6}}{8(t^{*})^{4}}\frac{1}{\sqrt{1+(t^{*})^{2}}},$$

а также (см. (П4.8) и (1.5))

$$H_{x}(p)=\operatorname{ch}\left(\frac{x}{l}al\sqrt{p}\right),\;S_{x}(p)=\frac{1}{\sqrt{p}\sqrt{q}}\operatorname{sh}\left(\frac{x}{l}al\sqrt{p}\right),$$

или $\hat{H}_{x}(z)=\operatorname{ch}\left(\frac{x}{l}z\right),\;\hat{S}_{x}(z)=\frac{al}{z\sqrt{q}}\operatorname{sh}\left(\frac{x}{l}z\right),$

находим:

$$C_{H1}^{*}=\frac{4}{q}\frac{\sqrt{1+(t^{*})^{2}}}{t^{*}}\left(\frac{x}{l}t^{*}\sin((x/l)t^{*})+\frac{\cos((x/l)t^{*})}{3t^{*}}\right),$$

$$C_{S1}^{*}=\frac{4al}{(t^{*})^{2}}\frac{\sqrt{1+(t^{*})^{2}}}{q^{3/2}}\left(\frac{4}{3}\frac{\sin((x/l)t^{*})}{t^{*}}-\frac{x}{l}\cos((x/l)t^{*})\right).$$

г) Из выражения для $W_{J\text{c}}$ (см. (3.3)) следует, что

(П4.14) $$C_{Jn}^{0}=\operatorname*{res}_{p_{n}^{0}}F_{J}=\frac{1}{q}\frac{J_{x}(p_{n}^{0})}{p_{n}^{0}P'(p_{n}^{0})}=\frac{2}{q}\frac{\hat{J}_{x}(z_{n}^{0})}{z_{n}^{0}\hat{P}'(z_{n}^{0})}=$$

$$=\frac{2}{q}\frac{z_{n}^{0}\hat{J}_{x}(z_{n}^{0})}{\operatorname{sh}(z_{n}^{0})-z_{n}^{0}\operatorname{ch}(z_{n}^{0})}=\frac{2}{q}\frac{\hat{J}_{x}(z_{n}^{0})}{g-\operatorname{ch}(z_{n}^{0})},$$

Здесь учитываются соотношения:

$$J_{x}(p_{n}^{0})=\hat{J}_{x}(z_{n}^{0}),\quad J_{x}'(p_{n}^{0})=(\hat{J}_{x})_{p}'\frac{dz}{dp}=\frac{(al)^{2}\hat{J}_{x}'(z_{n}^{0})}{2z_{n}^{0}},$$

$$\hat{P}'(z) = \frac{\operatorname{sh} z - z \operatorname{ch} z}{z^2}.$$

Используя (П4.8), получаем приводимые в пояснениях к (3.3) выражения для коэффициентов C^0_{Jn}.

П6. Доказательство теоремы 5

Норму функции $w(\underline{\tilde{W}_{J\,\mathrm{r}\,n}})$ в пространстве $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^+)$ при n от 1 до $N_\gamma - 1$ включительно можно оценить сверху следующим образом:

$$(\text{П6.1})\quad \| w(\underline{\tilde{W}_{J\,\mathrm{r}\,n}}) \|_{\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^+)} \le \left| \frac{C_{Jn1}}{p_{n1}} \right| + \left| \frac{C_{Jn2}}{p_{n2}} \right| = al \left(\frac{C_{Jn1}}{t^2_{n1}} + \frac{C_{Jn2}}{t^2_{n2}} \right).$$

Используя выражения для C_{Jnk} (см пояснения к (3.3)) и учитывая соотношения

$$(\text{П6.2})\quad L_n = p(2n-1) < t_{n1} < \bar{t}_n < r = p(2n-0{,}5),$$

$$(\text{П6.3})\quad \cos t_{n1} < \cos \bar{t}_n = \bar{h}_n = -\frac{1}{\sqrt{1+\bar{t}^2_n}},$$

$$(\text{П6.4})\quad |\sin x| \le m(x) = \min(1, x),$$

получаем оценки:

$$(\text{П6.5})\quad \| \underline{\tilde{W}_{H\,\mathrm{r}\,n}} \|_{\mathbf{B}} \le \frac{2(al)^2}{q} \left[\frac{\cos((x/l)t_{n1}}{t^2_{n1}(g - \cos t_{n1})} + \frac{\cos((x/l)t_{n2}}{t^2_{n2}(|g| + \cos t_{n2})} \right] \le$$

$$\le \frac{2(al)^2}{q} \left[\frac{1}{L^2_n(|\bar{h}_n| - |g|)} + \frac{1}{r^2_n |g|} \right],$$

$$(\text{П6.6})\quad \| \underline{\tilde{W}_{S\,\mathrm{r}\,n}} \|_{\mathbf{B}} \le \frac{2(al)^3}{q^{3/2}} \left[\frac{\sin((x/l)t_{n1}}{t^3_{n1}(g - \cos t_{n1})} + \frac{\sin((x/l)t_{n2}}{t^3_{n2}(|g| + \cos t_{n2})} \right] \le$$

$$\le \frac{2(al)^2}{q} \left[\frac{m((x/l)\bar{t}_n)}{L^3_n(|\bar{h}_n| - |g|)} + \frac{m(2p(x/l)n)}{r^3_n |g|} \right].$$

Так как $\bar{h}_n > 1/r_n$, из (П6.5) и (П6.6) следуют оценки сверху для $\| \underline{\tilde{W}_{S\,\mathrm{r}\,n}} \|_{\mathbf{B}}$ ($J = H, S$):

(П6.7) $\left\| \underline{W_{Jr}} \right\| \le k_J (Q_{J1} + Q_{J2})$,

где

$$k_H = \frac{2}{q}\left(\frac{al}{p}\right)^2, \; k_S = \frac{2}{q^{3/2}}\left(\frac{al}{p}\right)^3 m((x/l)p(N_g - 1));$$

$$Q_{Ji} = \sum_{n=1}^{N_g - 1} \Phi_{Ji}(n), \; F_{J1}(n) = \frac{1}{F_J(n)};$$

$$F_J(n) = (2n-1)^{b_J}\left(\frac{1}{p(2n-0{,}5)} - |g|\right);$$

$$\Phi_{J2}(n) = \frac{1}{(2n-0{,}5)^{b_J}\,|g|}; \; b_H = 2; \; b_S = 3.$$

В качестве диапазона значений параметра $|\gamma|$ принимаем промежуток (0, 0,04]; при этом, согласно (2.6), $N_\gamma \ge 4$.

Так как значения функций Φ_{J2} убывают с ростом *n*, сумма Q_{J2} при $N_\gamma \ge 2$ может быть оценена сверху следующим образом (см. [4], с. 61, формула (2.28)):

(П6.8) $$Q_{J2} < F_{J2}(1) + \frac{1}{|g|}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \int_1^{N_g - 1} \frac{dx}{(2x-0{,}5)^{b_J}}\right) =$$

$$= \frac{1}{|g|}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{b_J} + \frac{1}{2(b_J - 1)}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{b_J - 1} - \frac{1}{(2N_g - 2{,}5)^{b_J - 1}}\right]\right\} =$$

$$= \frac{2^{b_J - 2}}{|g|(b_J - 1)}\left[\frac{4b_J - 1}{3^{b_J}} - \frac{1}{(4N_g - 5)^{b_J - 1}}\right].$$

Таким образом,

(П6.9) $$Q_{H2} < \frac{1}{|g|}\left(\frac{7}{9} - \frac{1}{4N_g - 5}\right),$$

(П6.10) $$Q_{S2} < \frac{1}{|g|}\left(\frac{11}{27} - \frac{1}{(4N_g - 5)^2}\right).$$

Общий же член каждой из сумм Q_{J1} − более сложная функция n, имеющая участок убывания и участок возрастания. Для оценки этих сумм введём в рассмотрение функцию

(П6.11) $\tilde{F}_J(x) = (2x-1)^{b_J}\left(\dfrac{1}{p(2x-0{,}5)} - |g\,|\right)$

скалярного переменного x $(1 \le x \le N_\gamma - 1)$, функцию $\Phi_J = 1/F_J$ и, наконец, функцию

(П6.12) $\hat{F}_J(y) = (y-0{,}5)^{b_J}(1/py - |g\,|)$

скалярного переменного $y = 2x - 0{,}5$ $(1{,}5 \le y \le 2N_\gamma - 2{,}5)$.

Согласно (2.6) за максимальный диапазон изменения y можно принять промежуток $\mathbf{Y} = [1{,}5;\ 1/\pi|\gamma|)$.

Из выражения для производной функции $\hat{F}_J(y)$:

(П6.13) $\hat{F}_J'(y) = (y-0{,}5)^{b_J-1}\,\dfrac{b_J - b_j py - 0{,}5}{py}$

видно, что эта функция принимает в промежутке $\mathbf{Y}$ положительные значения и имеет максимум в точке

(П6.14) $y_J = \dfrac{b_J - 0{,}5}{pb_J}$,

поэтому функция $\Phi_J = 1/F_J$ имеет в этой точке минимум.

Введем еще в рассмотрение функции от $|\gamma|$.

(П6.15) $f_J(|g\,|) = (y_J + 0{,}5)/2$,

(П6.16) $f_{N1}(|g\,|) = (1/p\,|g\,| + 1{,}5)/2$, при этом $N_g - 1 = \operatorname{int} f_{N1}(|g\,|)$.

Заметим, что число $n_J = \operatorname{int} f_J(|\gamma|)$ не превышает $N_g - 1$. Действительно, функции

(П6.17) $d_J(|g\,|) = (f_{N1} - f_J) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p\,|g\,|} - \dfrac{b_J - 0{,}5}{pb_J} + 1\right)$, $J = H, S$,

убывают с ростом $|\gamma|$ и при $|\gamma| = 0{,}04$ принимают значение $d_H(0{,}04) = 0{,}7646$, $d_S(0{,}04) = 0{,}2068$. Поэтому $\operatorname{int} f_{N1}(|\gamma|) \ge \operatorname{int} f_J(|\gamma|)$.

Так как функция $\hat{\Phi}_J$ убывает при $y \in (3/2, y_J)$ и возрастает при $y \in (y_J, 1/py - 2)$, то для оценки сверху суммы Q_{J1} разобьём её на слагаемые:

(П6.18) $Q_{J1} = Q_{J11} + q_J + Q_{J12}$,

где $Q_{J11} = \sum_{n=1}^{n_J} \Phi_{J1}(n)$; $q_J = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n_J = N_g - 1, \\ \Phi_{J1}(n_J + 1) & \text{при} \quad n_J \le N_g - 2; \end{cases}$

$$Q_{J12} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n_J \ge N_g - 2, \\ \sum_{n=n_J+2}^{N_g-1} \Phi_{J1}(n) & \text{при} \quad n_J \le N_g - 3. \end{cases}$$

Суммы Q_{J11}, Q_{J12} оцениваются сверху согласно [4] (с. 61, (2.28)):

(П6.19) $Q_{J11} < \Phi_{J1}(1) + \int_1^{n_J} \tilde{\Phi}_J(x)dx = \Phi_{J1}(1) + 0{,}5 \int_{1{,}5}^{2n_J - 0{,}5} \hat{\Phi}_J(y)dy$,

(П6.20) $Q_{J12} < \Phi_{J1}(N_g - 1) + \int_{n_J+2}^{N_g-1} \tilde{\Phi}_J(x)dx =$

$$= \Phi_{J1}(N_g - 1) + 0{,}5 \int_{2n_J+3{,}5}^{2N_g-2{,}5} \hat{\Phi}_J(y)dy.$$

Используя разложение функции $\hat{\Phi}_J(y) = 1/\hat{F}_J(y)$ (см. (П6.12))

(П6.21) $\hat{\Phi}_J(y) = \dfrac{py}{(y - 0{,}5)^{b_J}(1 - |g|py)}$

на элементарные рациональные дроби:

(П6.22) $\hat{\Phi}_J(y) = \dfrac{B_J}{1 - |g|py} + \sum_{i=1}^{b_J} \dfrac{A_{Ji}}{(y - 0{,}5)^i}$,

где $B_J = \left(\dfrac{p}{a_g}\right)^{b_J} |g|^{b_J - 1}$; $a_g = 1 - p|g|/2$;

$$A_{Ji} = \frac{p^{b_J - i}|g|^{b_J - i - 1}}{a_g^{b_J - i + 1}} \text{ при } i = 1 \div (b_J - 1); \; A_{Jb_J} = \frac{p}{2a_g};$$

из (П6.19), (П6.20) получаем выражения для оценок сумм Q_{J11}, Q_{J12}:

(П6.23) $Q_{J11} < \dfrac{2}{3p - 2|g|} + \dfrac{B_J}{2} \ln \dfrac{1 - 1{,}5p|g|}{1 - (2n_J - 0{,}5)p|g|} +$

$$+\frac{A_{J1}}{2}\ln(2n_J-1)+\frac{1}{2}\sum_{i-2}^{b_J}\frac{A_{Ji}}{i-1}\left(1-\frac{1}{(2n_J-1)^i}\right);$$

$Q_{J12}=0$ при $n_J \geq N_g-2$, а при $n_J \leq N_g-3$

$$\text{(П6.24)}\ Q_{J12}<\frac{p\,(2N_g-2{,}5)}{(2N_g-3)^{b_J}\,d_g}+\frac{B_J}{2}\ln\frac{1-p\,|g\,|(2n_J-3{,}5)}{d_g}+$$

$$+\frac{A_{J1}}{2}\ln\frac{(2N_g-2{,}5)}{(2n_J-3{,}5)}+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{b_J}\frac{A_{Ji}}{i-1}\left(\frac{1}{(2n_J-3{,}5)^{i-1}}-\frac{1}{(2N_g-2{,}5)^{i-1}}\right),$$

где $d_g=1-p\,|g\,|(2N_g-2{,}5)$.

Добавляя сюда выражение для q_J:

$$\text{(П6.25)}\ q_J=\begin{cases}0 & \text{при}\quad n_J=N_g-1,\\ \dfrac{p\,(2n_J+1{,}5)}{(2n_J+1)^{b_J}(1-p\,(2n_J+1{,}5)\,|g\,|)} & \text{при}\quad n_J\leq N_g-2,\end{cases}$$

получаем оценки для $\|\underline{W_{S\,r\,n}}\|_{\mathbf{B}}$, приведенные в формулировке теоремы 5 (раздел 4).

Замечание. Величина d_γ, входящая в знаменатели некоторых выражений из правой части (П6.24), при фиксированном $|\gamma|$ ограничена снизу. Действительно, в силу (П2.3) имеем:

$$\text{(П6.26)}\ p\,|g\,|(2N_g-2{,}5)<1-1{,}5p\,|g\,|,$$

$$\text{(П6.27)}\ d_g\geq 1{,}5p\,|g\,|,$$

что означает ограниченность сверху (при фиксированном $|\gamma|$) оценки (П6.24).

Этим завершается доказательство теоремы 5 (см. раздел 4).

П7. Доказательство теоремы 6

Норма оператора $\underline{W_J^*}$ в пространстве **B** при $\gamma = h^*$ вычисляется следующим образом:

$$\text{(П7.1)}\quad \left\|\underline{W_J^*}\right\|_{\mathbf{B}}=\int_0^{\infty}|\,C_{J1}^*+C_{J2}^*t\,|\exp(p^*t)\,\mathrm{d}t\,,$$

(см. пояснения к (3.3). Эта норма в зависимости от знака произведения $C^*_{J1}C^*_{J2}$ равна

(П7.2) $$\left\|\underline{W^*_J}\right\|_{\mathbf{B}} = \left|\int_0^\infty j\,(x,t)\,\mathrm{d}t\right| = |a_{J1}| \text{ при } C^*_{J1}C^*_{J2} \ge 0\,;$$

(П7.3) $$\left\|\underline{W^*_J}\right\|_{\mathbf{B}} = \left|\int_0^{t_{0J}} j\,(x,t)\,\mathrm{d}t\right| - \left|\int_{t_{0J}}^\infty j\,(x,t)\,\mathrm{d}t\right| = a_{J1} + a_{J2}b_J$$

при $C^*_{J1}C^*_{J2} < 0$.

Здесь

$$t_{0J} = -\frac{C^*_{J1}}{C^*_{J2}}\,,\quad a_{J1} = \frac{C^*_{J1}}{|\,p^*\,|} + \frac{C^*_{J2}}{|\,p^*\,|^2}\,;$$

$$a_{J2} = 2\left[\frac{C^*_{J1}}{|\,p^*\,|} + C^*_{J2}\left(\frac{t_{0J}}{|\,p^*\,|} - \frac{1}{|\,p^*\,|^2}\right)\right] = -2\frac{C^*_{J2}}{|\,p^*\,|^2}\,;$$

$$b_J = \exp\left(-\left|p^*\frac{C^*_{J1}}{C^*_{J2}}\right|\right).$$

Используя приведённые в пояснениях к (3.3) выражения для C^*_{J1} и C^*_{J2} ($J = H, S$), получаем выражения для нормы оператора и коэффициентов a_{J1}, a_{J2} и b_J, приведенные в формулировке теоремы 6.

П8. Доказательство теоремы 7

Применяя процедуру исследования, изложенную в [4, раздел 1, п. 5], составим ряд $R_0(W_{Jc})$ из оригиналов членов разложения функции W_{Jc} (см. пояснения к (3.3)). Оригинал n-го члена этого разложения имеет вид

(П8.1) $$\mathrm{L}^{-1}\left(\frac{C^0_{Jn}}{p - p^0_n} + \frac{\overline{C^0_{Jn}}}{p - \overline{p^0_n}}\right) = 2\,\mathrm{Re}\,(C^0_{Jn}\exp(p^0_n t)) =$$

$$= 2\left|C^0_{Jn}\right|\exp(-m_n t)\cos(w_n t + \arg C^0_{Jn})\,,$$

где $\mathbf{L}^{-1}$ − оператор, обратный оператору Лапласа;

$$m_n = \frac{J_n}{(al)^2}\,;\;\; J_n = (t_n^0)^2 - (s_n^0)^2\,;\;\; w_n = 2\frac{s_n^0 t_n^0}{(al)^2}\,;$$

$$\arg C_{Jn}^0 = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im} C_{Jn}^0}{\operatorname{Re} C_{Jn}^0} + ap\;;\;\; a = \begin{cases} 0 \text{ при } \operatorname{Re} C_{Jn}^0 \ge 0, \\ 1 \text{ при } \operatorname{Re} C_{Jn}^0 < 0. \end{cases}$$

Норма этого оригинала в пространстве $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^+)$ оценивается сверху, согласно (П4.16), величиной

(П8.2) $$M_{Jn} = 2\frac{|C_{Jn}^0|}{m_n} = \frac{4}{q}\frac{(al)^2}{J_n}\left|\frac{\hat{J}(z_n^0)}{g - \operatorname{ch} z_n^0}\right|.$$

а) Оценим по модулю сверху величину

(П8.3) $$r_{Hn} = \left|\frac{\hat{H}_x(z_n^0)}{g - \operatorname{ch} z_n^0}\right| = \left|\frac{\operatorname{ch}((x/l)z_n^0)}{g - \operatorname{ch} z_n^0}\right|.$$

В силу неравенств

$$\left|\operatorname{ch}((x/l)z_n^0)\right| < \operatorname{ch}((x/l)s_n^0) \le \operatorname{ch} s_n^0, \quad |\operatorname{ch} z_n^0| > \operatorname{sh} s_n^0$$

при выполнении условия

(П8.4) $$\operatorname{sh} s_n^0 > |g|$$

имеем оценку для r_{Hn}:

(П8.5) $$r_{Hn} \le \frac{1}{\operatorname{th} s_n^0 - (|g|/\operatorname{ch} s_n^0)}.$$

б) При $n \to \infty$ величина s_n^0 возрастет неограниченно. Действительно, при фиксированном $\sigma > 0$ из (П1.6) и (П1.7) следует соотношение

(П8.6) $$g = -\frac{\operatorname{sh} s}{s}\frac{1}{\sqrt{1 + (n_n(o)(\operatorname{th} s/s))^2}}.$$

Так как модуль правой части (П8.5) оценивается сверху величиной $\operatorname{ch} s/n_n(o)$ и $n_n(s) \ge p(2n-1)$, отсюда следует оценка:

(П8.7) $$s_n^0 > \operatorname{Arch}(p(2n-1)|g|)\,;$$

т.е. $s_n^0 \to \infty$ при $n \to \infty$.

То же можно сказать о величине

(П8.8) $r_{Sn} = \left| \dfrac{\hat{S}_x(z_n^0)}{g - \operatorname{ch} z_n^0} \right| = \dfrac{al}{\sqrt{q}} \left| \dfrac{\operatorname{sh}((x/l)z_n^0)}{z_n^0(g - \operatorname{ch} z_n^0)} \right|$

(она даже стремится к нулю при $n \to \infty$).

в) Теперь оценим снизу величину J_n, для чего нужно оценить снизу величину t_n^0 и сверху – величину s_n^0. Нуль z_n^0 функции $\hat{P}$ лежит в области $\tilde{\mathbf{Q}}_n = \{z \in \mathbf{C} : s > 0, t \in \mathbf{M}_n\}$ (см. формулировку теоремы 1), т.е. $t_n^0 > p(2n-1)$. Для оценки сверху величины s_n^0 используем соотношение (П1.6), из которого следует:

(П8.9) $\dfrac{\operatorname{sh} s_n^0}{s_n^0} = \left| \dfrac{g}{\cos n(s_n^0)} \right| < \left| \dfrac{g}{\cos n(0)} \right| =$

$= |g| \sqrt{1 + (\bar{t}_n)^2} < |g| \sqrt{1 + r_n^2}$,

где $r_n = p(2n - 0{,}5)$.

Величина же $\operatorname{sh} s_n^0 / s_n^0$ может быть оценена снизу величиной $k(s_n^0)^2$ для некоторых $k > 0$. Обозначим максимальное из таких чисел k как k_m; k_m может быть определено из решения системы уравнений

(П8.10) $\begin{cases} \operatorname{sh} s_0 = k_m s_0^3, \\ \operatorname{ch} s_0 = 3k_m s_0^2; \end{cases}$

где s_0 – точка касания графиков функций $\operatorname{sh} s$ и $k_m s^3$. Из (П8.10) следует, что s_0 определяется как решение уравнения

(П8.11) $\operatorname{th} s_0 = \dfrac{s_0}{3}$.

Численное решение этого уравнения даёт значение $s_0 \approx 2{,}985$, откуда получаем значение $k_m = \operatorname{sh} s/s^3 \approx 0{,}371$.

Таким образом, из (П8.9) следует оценка

(П8.12) $(s_n^0)^2 \le \dfrac{1}{k_m} \dfrac{\operatorname{sh} s_n^0}{s_n^0} < c|g| \sqrt{1 + (\bar{t}_n)^2} < c|g| \sqrt{1 + r_n^2}$,

где $c = 1/k_m \approx 2{,}7$.

Полученные оценки показывают, что норма в $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^+)$ каждого из членов ряда $R_0(W_{Jc})$ является величиной $O(1/n^2)$; поэтому ряд в этом пространстве сходится, а это означает [4, см. раздел 1, п. 5], что сумма ряда $R_0(W_{Jc})$ является импульсной переходной функцией оператора $\underline{W_{J\text{c}}}$ и, следовательно, этот оператор входит в пространство **B**.

г) Переходя к оценке нормы оператора $\underline{W_{J\text{c}}}$, отметим, что выполнение условия (П8.4) при всех $n \geq 1$ гарантировано лишь для значений $|\gamma|$, больших величины

$$g_1 = 1/\sqrt{p^2 - 1} \approx 0{,}3358\,.$$

Действительно, из (П8.7) следует, что величина

$$\text{(П8.13)}\quad d_{Hn} = \operatorname{sh}^2 s_n^0 - g^2$$

оценивается снизу величиной

$$(p^2(2n-1)^2 - 1)g^2 - 1 \geq (p^2 - 1)g^2 - 1$$

и что, следовательно, выполнение условия (П8.4) при любых $n \geq 1$ гарантировано лишь при $|\gamma| > g_1$. Так как $\bar{h}_1 = -0{,}2173$ (см. раздел 2), этому диапазону значений $|\gamma|$ соответствует $N_\gamma = 0$.

Для меньших значений $|\gamma|$, учитывая (П8.7) и соотношение

$$\text{(П8.14)}\quad |g| > -\bar{h}_{N_g+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\bar{t}^{\,2}_{N_g+1}}} > \frac{1}{\sqrt{1+\bar{r}^{\,2}_{N_g+1}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+p^2(2N_g+1{,}5)^2}}\,,$$

получаем для d_{Hn} оценку снизу:

$$\text{(П8.15)}\quad d_{Hn} > \frac{p^2[4n(n-1) - 4N_g^2 - 6N_g - 1{,}25] - 2}{1+p^2(2N_g+1{,}5)^2}\,,$$

из которой следует, что положительность d_{Hn} гарантирована лишь для $n \geq N_\gamma + 2$, в то время как ряд $R_0(W_{Jc})$, определяющий функцию W_{Jc} (см. пояснения к (3.3)), начинается с $n = N_\gamma + 1$. Поэтому первый член этого ряда необходимо вычислять и оценивать по норме пространства $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^+)$ отдельно.

д) Рассмотрим сначала случай $|\gamma| < g_1$. Величина J_n в знаменателе оценки M_{Jn} нормы оригинала n-го члена разложения функции W_{Jc} (см. (П8.2)) оценивается снизу (см. (П8.12)) согласно п. **в)** положительной при $|\gamma| < g_1$ функцией $\varphi_\gamma(n)$:

(П8.16) $j_g(n) = j_{\mathrm{im}}(n) - j_{\mathrm{r}}(n)|g|$,

где $j_{\mathrm{im}}(n) = p^2(2n-1)^2$, $j_{\mathrm{r}}(n) = c\sqrt{1+r_n^2} = c\sqrt{1+p^2(2n-1{,}5)^2}$

Величины r_{Jn} ($J = H, S$), также входящие в выражение (П8.2) для M_{Jn}, оцениваются сверху, при выполнении условия (П8.4) и с учётом (П8.7), следующим образом:

(П8.17) $r_{Hn} < \dfrac{\operatorname{ch} s_n^0}{\operatorname{sh} s_n^0 - |g|} < \dfrac{p(2n-1)|g|}{y_g(n)}$,

где $y_g(n) = \sqrt{p^2(2n-1)g^2 - 1} - |g|$;

(П8.18) $r_{Sn} < \dfrac{al}{\sqrt{q}} \dfrac{\operatorname{ch} s_n^0}{t_n^0(\operatorname{sh} s_n^0 - |g|)} < \dfrac{al}{\sqrt{q}} \dfrac{|g|}{y_g(n)}$,

Таким образом, для получения оценок норм операторов $\underline{W_{Jc}}$ ($J = H, S$) необходимо оценить суммы рядов

(П8.19) $R_{1H} = \sum\limits_{n=N_g+2}^{\infty} \dfrac{2n-1}{j_g(n) y_g(n)}$,

(П8.20) $R_{1S} = \sum\limits_{n=N_g+2}^{\infty} \dfrac{1}{j_g(n) y_g(n)}$.

Так как общие члены рядов R_{1J} ($J = H, S$) убывают с ростом n, их суммы могут быть оценены сверху суммами соответственно $m_{1J} + I_{1J}$, где

(П8.21) $m_{1H} = \dfrac{n_g}{j_g(N_g+2) y_g(N_g+2)}$,

(П8.22) $I_{1H} = \int\limits_{N_g+2}^{\infty} \dfrac{2x-1}{j_g(x) y_g(x)} \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2} \int\limits_{n_g}^{\infty} \dfrac{y \,\mathrm{d} y}{a_g(y) b_g(y)}$,

(П8.23) $m_{1S} = \dfrac{1}{j_g(N_g+2) y_g(N_g+2)}$, (П8.24) $I_{1S} = \int\limits_{N_g+2}^{\infty} \frac{1}{j_g(x) y_g(x)} \mathrm{d}\, x = \frac{1}{2} \int\limits_{n_g}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\, y}{a_g(y) b_g(y)}$,

(П8.25) $a_g(y) = (py)^2 - c\,|g|\sqrt{1 + p^2 (y - 0{,}5)^2}$,

(П8.26) $b_g(y) = \sqrt{(py)^2 g^2 - 1} - |g|$,

(П8.27) $n_g = 2N_g + 3$.

Ввиду сложности интегрирования иррациональных функций j_g и y_g минорируем их соответственно полиномом

(П8.28) $\tilde{a}_g(y) = (py)^2 - cp\,|g|(y - n_g) - d_g$,

где $d_g = c\,|g|\sqrt{1 + p^2 (2N_g + 2{,}5)^2}$,

и линейной функцией

(П8.29) $\tilde{b}_g(y) = p\,|g|\,y - \sqrt{1 + g^2}$.

Разложим рациональные функции

(П8.30) $F_{1H}(y) = \frac{y}{\tilde{a}_g(y) \tilde{b}_g(y)}$

(П8.31) $F_{1S}(y) = \frac{1}{\tilde{a}_g(y) \tilde{b}_g(y)}$

на элементарные рациональные дроби:

(П8.32) $F_{1J}(y) = \frac{A_{1J} y + B_{1J}}{\tilde{a}_g(y)} + \frac{C_{1J}}{\tilde{b}_g(y)}$ $(J = H, S)$,

где $C_{1H} = \frac{y_g}{\tilde{a}_g(y_g)}$; $y_g = \frac{\sqrt{1 + g^2}}{p\,|g|}$;

$$A_{1H} = -\frac{p}{|g|} C_{1H} = -\frac{\sqrt{1 + g^2}}{g^2 \tilde{a}_g(y_g)} ;$$

$$B_{1H}=\frac{1+C_{1H}cp\ |g\ |+A_{1H}\sqrt{1+g^{2}}}{p\ |g\ |}=$$

$$=\frac{1}{p\ |g\ |}\left(1+c\frac{\sqrt{1+g^{2}}}{\tilde{a}_{g}(y_{g})}-\frac{1+g^{2}}{g^{2}\tilde{a}_{g}(y_{g})}\right)C_{1S}=\frac{1}{\tilde{a}_{g}(y_{g})};$$

$$A_{1S}=-\frac{p}{|g\ |}C_{1S}=-\frac{p}{|g\ |\tilde{a}_{g}(y_{g})};$$

$$B_{1S}=C_{1S}c+\frac{A_{1S}\sqrt{1+g^{2}}}{p\ |g\ |}=\frac{1}{\tilde{a}_{g}(y_{g})}\left(c-\frac{\sqrt{1+g^{2}}}{g^{2}}\right).$$

Используя разложения (П8.33), получаем выражения для значений интегралов

(П8.33) $\tilde{I}_{1H}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{n_g}^{\infty}\frac{y\,\mathrm{d}y}{\tilde{a}_{g}(y)\tilde{b}_{g}(y)}$

(П8.34) $\tilde{I}_{1S}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{n_g}^{\infty}\frac{\mathrm{d}y}{\tilde{a}_{g}(y)\tilde{b}_{g}(y)}$,

мажорирующих соответствующие интегралы I_{1J} ($J=H,S$):

(П8.35) $\tilde{I}_{1H}=\dfrac{\Lambda(n_{g})\sqrt{1+g^{2}}}{2(pg)^{2}\tilde{a}_{g}(y_{0})}+$

$$+\frac{a_{g}}{p^{2}\ |g\ |b_{g}}\left[1+\frac{1}{\tilde{a}_{g}(y_{0})}\left(\frac{c\sqrt{1+g^{2}}}{2}-\frac{1+g^{2}}{g^{2}}\right)\right],$$

где $\Lambda(n_{g})=\ln\left(\dfrac{\sqrt{\tilde{a}_{g}(n_{g})}}{p\,(n_{g}-y_{0})}\right)$; $b_{g}=\sqrt{4(cp\,n_{g}\ |g\ |-d_{g})-c^{2}g^{2}}$;

$$a_{g}=\operatorname{arctg}\frac{b_{g}}{2pn_{g}-c\,|g\ |}.$$

(П8.36) $\tilde{I}_{1S}=\dfrac{\Lambda(n_{g})}{2p\ |g\ |a_{g}(y_{0})}-$

$$-\left[\frac{c\,|g\,|}{4p}+\frac{\sqrt{1+g^{2}}-g^{2}}{2\tilde{a}_g\left(y_0\right)g^{2}}\right]\operatorname{arctg}\frac{b_g}{2pn_g-c\,|g\,|}.$$

Таким образом, при $|\gamma| < g_1$ норма оператора $\underline{W_{J\text{c}}}$ $(J = H, S)$ оценивается сверху величиной

$$\frac{4}{q}(al)^2\left(\frac{1}{J_{N_g+1}}\left|\frac{\hat{J}_x(z^{0}_{N_g+1})}{g-\operatorname{ch} z^{0}_{N_g+1}}\right|+a_J|g|(m_{1J}+\tilde{I}_{1J})\right),$$

где $a_H = p$; $a_S = al/\sqrt{q}$, $z^{0}_{N_g+1}$ должны вычисляться путём численного решения системы уравнений (П1.6), (П1.7).

е) Теперь рассмотрим случай $|\gamma| \geq g_1$ (при этом $N_\gamma = 0$, т.е., ряд $R_0(W_{J\text{c}})$ начинается с $n = 1$). Из вида функции j_g следует, что условие её положительности при всех $n \geq 1$ выполняется лишь для значений $|\gamma|$, меньших $q_1 = 0{,}76$; для значений $|\gamma|$, меньших $q_2 = 2{,}98$, функция φ_γ положительна при всех $n \geq 2$; и, наконец, положительность этой функции для всех $|g\,| < \tilde{g}_1$ $(|\tilde{g}\,| = 4{,}5697$, см. формулировку теоремы 1) гарантируется лишь при $n \geq 3$. Поэтому разобьём диапазон $[g_1, |\tilde{g}_1|)$ на промежутки $\mathbf{G}_k = [g_k, g_{k+1})$, $k = 1, \dots, 5$, где g_k, $k = 2, \dots, 5$, вычисляются из условия: $j_{\text{r}}(k)|g\,| \leq j_{im}(k)/2$ для $|\gamma| \leq g_{k+1}$ (тогда соотношение $j_{\text{r}}(n)|g\,| \leq j_{im}(n)/2$ будет выполнено для всех $n \geq k$), $g_6 = |\tilde{g}\,|$. Подсчёт даёт значения $g_2 = q_1/2 = 0{,}38$, $g_3 = q_2/2 = 1{,}49$, $g_4 = 2{,}65$, $g_5 = 3{,}8$. В соответствии со значениями g_k и q_i, $i = 1, 2$, для $|\gamma|$ из диапазона $\mathbf{G}_k$ мы можем оценить лишь суммы рядов

(П8.37) $$R_{2H} = \sum_{n=n_{k_g}}^{\infty}\frac{2n-1}{j_g(n)y_g(n)},$$

(П8.38) $$R_{2S} = \sum_{n=n_{k_g}}^{\infty}\frac{1}{j_g(n)y_g(n)},$$

где $n_1 = 1$, $n_2 = n_3 = 2$, $n_4 = n_5 = 3$, k_γ определяется тем из промежутков $\mathbf{G}_k$, в который попадает модуль заданного значения параметра γ (приведённые значения n_k определяются из условия положительности значений φ_n при $n \geq n_{k_g}$).

Первые члены ряда $R_0(W_{Jc})$, определяющего функцию W_{Jc} (см. (3.2)) ($n \in [1, n_{k_g} - 1]$, т.е. первый член для $|g| \in [0{,}38,\ 2{,}65)$ и два первых члена для $|g| \in [2{,}65, |\tilde{g}|)$) приходится вычислять и оценивать отдельно.

Суммы рядов R_{2J} ($J = H, S$) оцениваются сверху суммами

(П8.39) $\sum_{n=n_{k_g}}^{k_g} m_{2Jn} + I_{2J}$,

где

(П8.40) $m_{2Hn} = \dfrac{2n-1}{j_g(n) y_g(n)}$;

(П8.41) $m_{2Sn} = \dfrac{1}{j_g(n) y_g(n)}$;

(П8.42) $I_{2H} = \int_{k_g}^{\infty} \dfrac{2x-1}{j_g(x) y_g(x)} \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2} \int_{l_g}^{\infty} \dfrac{y \,\mathrm{d}y}{a_g(y) b_g(y)}$;

(П8.43) $I_{2S} = \int_{k_g}^{\infty} \dfrac{1}{j_g(x) y_g(x)} \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2} \int_{l_g}^{\infty} \dfrac{\mathrm{d}y}{a_g(y) b_g(y)}$;

(П8.44) $l_g = 2k_g - 1$,

φ_γ − см. (П8.17), y_γ − см. пояснения к (П8.18); a_γ, b_γ − см. соответственно (П8.27)

Так как для $y \geq l_\gamma$ выполняется соотношение

(П8.45) $a_g(y) \geq (py)^2 / 2$,

интегралы I_{2J} ($J = H, S$) мажорируются интегралами

(П8.46) $\tilde{I}_{2H} = \dfrac{1}{p^2} \int_{l_g}^{\infty} \dfrac{\mathrm{d}y}{y \tilde{b}_g(y)}$,

(П8.47) $\tilde{I}_{2S} = \dfrac{1}{p^2} \int_{l_g}^{\infty} \dfrac{\mathrm{d}y}{y^2 \tilde{b}_g(y)}$,

где $\tilde{b}_g$ – см. (П8.30).

Разложим рациональные функции

(П8.48) $F_{2H}(y) = \dfrac{1}{y\tilde{b}_g(y)}$,

(П8.49) $F_{2S}(y) = \dfrac{1}{y^2\tilde{b}_g(y)}$,

на элементарные рациональные дроби:

(П8.50) $F_{2H}(y) = \dfrac{A_{2H}}{y} + \dfrac{C_{2H}}{\tilde{b}_g(y)}$,

где $A_{2H} = -\dfrac{1}{\sqrt{1+g^2}}$; $C_{2H} = \dfrac{1}{y_0} = \dfrac{p|g|}{\sqrt{1+g^2}}$;

(П8.51) $F_{2S}(y) = \dfrac{A_{2S}}{y} + \dfrac{B_{2S}}{y^2} + \dfrac{C_{2S}}{\tilde{b}_g(y)}$,

где $C_{2S} = \dfrac{1}{y_0^2} = \dfrac{p^2 g^2}{1+g^2}$; $A_{2S} = -\dfrac{C_{2S}}{p\,|g|} = -\dfrac{p\,|g|}{1+g^2}$;

$$B_{2S} = -\frac{1}{\sqrt{1+g^2}}.$$

Используя разложения (П8.50) и (П8.51), получаем выражения для значений интегралов $\tilde{I}_{2J}$ ($J = H, S$):

(П8.52) $\tilde{I}_{2H} = \dfrac{1}{p^2\sqrt{1+g^2}} \ln \dfrac{l_g}{l_g - y_0}$,

(П8.53) $\tilde{I}_{2S} = \dfrac{1}{p}\left(\dfrac{|g|}{1+g^2} \ln \dfrac{l_g}{l_g - y_0} + \dfrac{1}{p l_g \sqrt{1+g^2}} \right)$.

Таким образом, при $|g| \geq g_1$ норма оператора $\underline{W_{J\text{c}}}$ ($J = H, S$) оценивается сверху величиной

$$\frac{4}{q}(al)^2 \left(\sum_{n=1}^{n_{k_g}-1} \frac{1}{J_n} \left| \frac{\hat{J}_x(z_n^0)}{g - \operatorname{ch} z_n^0} \right| + a_J\,|g|\,(m_{2J} + \tilde{I}_{2J}) \right),$$

где $a_H = p$; $a_S = al/\sqrt{q}$; z_n^0 для $n \in [1, n_{k_g} - 1]$ должны вычисляться путём численного решения системы уравнений (П1.6) и (П1.7).

Литература

1. ЛАВРЕНТЬЕВ М.А., ШАБАТ Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного*. – М.: Физматгиз, 1958.
2. СОЛНЕЧНЫЙ Э.М. *Вырожденные системы и их использование в задаче синтеза заданного поведения*. – М.: Наука, 1989.
3. СОЛНЕЧНЫЙ Э.М. *О причинности системы теплопроводности с нелинейной обратной связью по граничным условиям* // Автоматика и телемеханика. – 2002. – №9. – С. 15–26.
4. СОЛНЕЧНЫЙ Э.М. *Исследование условий причинности и устойчивости системы управления линейным распределенным объектом* // Автоматика и телемеханика. – 2006. – №4. – С. 53–85.
5. СОЛНЕЧНЫЙ Э. М., ЧЕРЁМУШКИНА Л.А. *Исследование условий устойчивости системы управления линейным объектом теплопроводности* // Управление большими системами. – 2010. – №4. – С. 89–125.

INVESTIGATION OF CAUSALITY AND STABILITY CONDITIONS OF LINEAR HEAT-CONDUCTIVITY OBJECT CONTROL SYSTEM (SPECIAL CASES). PART II

Engel Solnechnyi, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, (495)334-92-29, solnechn@ipu.ru)

Ludmila Cheryomushkina, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc. (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, (495)334-92-29, l.a.cheryom@yandex.ru)

Abstract: For a special sort of boundary conditions of stable one-dimensional finite-length object of heat conductivity estimates are derived of norms of the operators translating boundary influences into the object temperature. These estimates are used for finding a sufficient condition of causality and stability for the system consisting of the object and the nonlinear feedback.

Keywords: system with feedback, causality, stability, distributed dynamic system, linear heat conduction object, complex-variable functions theory.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А. Г. Бутковским