УДК 519.8
ББК 2.22

СЕТЕВЫЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ В ЖИВОТНОВОДЧЕСКОЙ ОТРАСЛИ АПК

Киселев В. Г.[1]
(*Учреждение Российской академии наук Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, Москва*)

Исследуется сетевая модель, описывающая динамику стада домашних животных. Показывается, что такие модели целесообразно использовать в оперативном управлении при сложившихся различных ситуациях с кормами.

Ключевые слова: сетевая модель, оперативное управление, оптимизация, животноводство.

1. Введение

Как и в любом производстве, функционирующем под воздействием случайных факторов, в аграрно-промышленном комплексе (АПК) возникает потребность в оперативном управлении. Наиболее сложной в смысле проведения оперативного управления является животноводческая отрасль АПК. Дело в том, что в силу специфики этой отрасли оперативные решения, принятые в текущий момент, влияют на состояние системы в течение нескольких лет. Основным случайным воздействием, влияющим на состояние системы, является наличие кормовой базы. Если кормовая база стационарна, то, исходя из поставленных целей по производству животноводческой продукции, можно определить оптимальную структуру и численность стада животных и соответствующие нормы их кормления. Однако это нереальный случай, и если в результате сложившихся погодных

---

[1] *Валерий Георгиевич Киселев, кандидат физико-математических наук, доцент* (*vgkiselev@yandex.ru*).

условий кормов произведено меньше или больше, чем запланировано, то приходится решать задачу оперативного управления. Существуют следующие возможности. Во-первых, не меняя численности и структуры стада, сохранив его на последующие годы, уменьшить интенсивность кормления, однако это приведет к уменьшению производства продукции в текущем году. Возможно также решение с уменьшением численности стада или отдельных его групп с одновременным перераспределением имеющихся кормов. В частности, совершенно не очевидна справедливость требования сохранения численности стада в текущий, крайне неурожайный год. Ясно, что для принятия оперативного решения необходимо решать некоторую оптимизационную задачу. Ясно также, что эта задача должна быть динамической, охватывающей по крайней мере несколько лет. При решении динамических задач, размерность которых пропорциональна количеству рассматриваемых лет, важно, чтобы размерность модели, описывающей происходящие в стаде процессы в данный момент времени, была минимальной.

Вопросам моделирования животноводства посвящено довольно много публикаций. У нас в стране пионером работ по моделированию сельскохозяйственного производства и, в частности, животноводства, является, по-видимому, Р.Г. Кравченко. Основные его работы собраны в монографиях [3, 13]. В качестве примера других работ по данной тематике можно привести публикации [2, 7, 14].

Естественно, что сложность рассматриваемых по данной тематике задач со временем повышалась. Так, в работах классика [3, 13] рассматривались в детерминированной постановке стационарные задачи оптимизации структуры и оборота стада и оптимизации использования и производства кормов. В работе [14] приводится описание автоматизированной системы текущего планирования производства в свиноводческом откормочном комплексе, разработанной во ВНИИ кибернетики Минсельхоза СССР, которая была опробована и внедрена в производство. Разработанная система позволяла в течение года производить расчеты движения поголовья на свиноводческом комплексе на каждом участке. Движение животных отражается в помесячном разрезе по каждой производственной группе животных, исходя из их наличия на начало периода, поступления из других групп, покупки и выбытия в связи с переводом в другие группы, падежом, санитарной выбраковкой, а также плановой выбраковкой в связи с обновлением основного стада и реализацией откормленных свиней. Планирование движения поголовья позволяет рассчитать требуемое количество корма в каждом периоде, плановые привесы и общий выход продукции.

Далее, в каждой задаче планирования производства сельскохозяйственной продукции необходимым элементом является блок животноводства. Детализация описания этого блока зависит от решаемой задачи. В качестве примера таких задач приведем проблему, решаемую в работе [9]. Это задача оптимизации планов развития АПК Российской Федерации на пятилетку. В частности, решалась задача производства и использования кормов с целью удовлетворения потребностей сельскохозяйственных животных в кормах и, соответственно, населения в животноводческой продукции. В модели рассматривались различные варианты развития животноводческих отраслей и птицеводства. Затраты кормов принимались нормативными. Задача решалась, как и абсолютное большинство подобных задач, в детерминированной постановке с использованием средних значений соответствующих параметров.

Примером задачи планирования сельскохозяйственного производства, учитывающей вероятностную природу производства, может служить задача оптимизации производственной структуры в регионе с резкими колебаниями сельскохозяйственных условий производства, опубликованная в работе [11]. В ней рассматривались три исхода производства – худший, средний и относительно благоприятный. Вероятности каждого из исходов считаются известными. Продукцией сельскохозяйственного производства является продукция как растениеводческой отрасли, так и животноводства. Решалась задача оптимизации производства, максимизирующего математическое ожидание суммарного выпуска продукции в стоимостном выражении. По современной терминологии (например, [8]), в данной работе решалась задача двухэтапного стохастического программирования. Стратегическими переменными были структура посевных площадей, структура стада домашних животных. Тактическими переменными в блоке животноводства являлись различные варианты кормления животных. Как известно, такая задача сводится к задаче линейного программирования.

Среди более поздних работ выделим две – [4] и [16]. Работа [16] – это рекомендации ведущего в те годы института Минсельхоза – ВНИПТИК. Рекомендации по перспективному развитию скотоводства (рассматривается стадо КРС) основаны по существу на стационарной модели стада КРС, в которой переменными являются численности различных групп стада. Рассматривается одна технология кормления дойных коров (в смысле интенсивности кормления), зависящая только от массы животного. В отличие от других моделей дойные коровы здесь подразделяются по годам лактации. Количество требуемых кормов для дойного стада вычисляется с помощью некоторой формулы, которая является статистической аппроксимацией различных данных. Выращивание и откорм молодняка предполагается вести различными способами, которые отличаются только технологиями содержания, но интенсивность кормления в этих способах по существу одинаковая и требуемое количество корма вычисляется по одной статистической формуле, зависящей только от массы откармливаемого животного. В работе предлагается рассматривать еще один вид продукции животноводства – навоз, который можно использовать или на продажу, или в растениеводческом секторе.

Работа [4] посвящена анализу проблем соответствия кормовой базы и численности поголовья животных. Рассматриваются две модели. Одна из них – агрегированная региональная модель кормопроизводства и животноводства – в достаточной степени традиционная модель, но доведенная до машинной реализации, и с ее помощью можно проводить полезные численные эксперименты. Другая модель предназначена для решения задачи управления структурой стада в условиях случайных возмущений в процессе производства кормов и представляет несомненный интерес. Предлагается динамическая модель стада КРС, учитывающая стохастическую природу производства кормов.

Корма являются случайной величиной с известной функцией распределения. Под оптимальным управлением структуры стада понимается следующее. Основное стадо остается постоянным во всех случаях, а управлением является количество голов молодняка, оставленное на откорм на следующий год (количество лет откорма – не более двух). Критерием задачи является математическое ожидание дохода от суммарной продукции за планируемое число лет. В этих достаточно жестких упрощающих предположениях автор решает задачу синтеза управления. Хотя предлагаемая задача не совсем реальна, она представляет несомненный интерес, поскольку здесь делается попытка приблизиться к решению актуальной проблемы управления процессом получения животноводческой продукции в реальных условиях изменчивости кормовой базы.

В заключение анализа работ, использующих математические методы для решения различных проблем в животноводстве, можно отметить, что абсолютное большинство их посвящено описанию и решению некоторых частных стационарных задач, а небольшое количество динамических моделей разработано при достаточно жестких предположениях. Следует отметить, что задача влияния изменчивости кормовой базы на производство животноводческой продукции рассматривалась весьма мало.

Таким образом, для решения задач управления в животноводческой отрасли АПК при изменчивой кормовой базе необходимо разработать качественно новую модель, которая удовлетворяла бы следующим требованиям.

Разрабатываемая модель должна:

1) учитывать реальные технологии получения животноводческой продукции и соответствующие способы кормления различных групп стада. Такие технологии разработаны и приведены в справочниках типа [5], [10]. Заметим, что математические модели, описывающие процесс лактации и роста мясной массы, приведенные, например, в [18], далеки от совершенства и рассчитывать на них не приходится;

2) описывать динамику стада домашних животных с учетом половозрастной структуры стада и соответствующих методик кормления;

3) быть ориентирована на решение задач управления при изменчивости кормовой базы (возможные альтернативные решения указаны выше);

4) наконец, желательно, чтобы модель была универсальной в том смысле, что должна годиться для всех отраслей животноводства.

В данной работе будет приведено изложение сетевой модели динамики стада домашних животных, которая удовлетворяет всем этим требованиям. На эту тему уже было несколько публикаций автора, последняя из них – [12]. Здесь же будет приведено более полное изложение сетевой модели и, кроме того, будут обсуждаться некоторые вопросы использования сетевой модели в оперативном управлении животноводческой отраслью.

2. Сетевая модель динамики стада домашних животных

Стадо домашних животных состоит из трех главных групп: основного стада, в котором содержатся взрослые особи (в стаде КРС – это стадо дойных коров), репродуктивного стада молодняка и откормочного стада – основного поставщика мясной продукции. В некоторых случаях отдельные группы животных могут отсутствовать, например, может отсутствовать откорм животных, когда откормочный молодняк стада продается в силу специализации хозяйства. Возможны и другие ситуации. Каждая из перечисленных основных групп в свою очередь состоит из других групп, назначение которых будет пояснено ниже.

Все связи между отдельными группами стада животных можно представить в виде ориентированного взвешенного графа. Каждая вершина этого графа характеризуется весом – численностью соответствующей группы животных, а дуги с приписанными к ним весами характеризуют интенсивность переходов между этими группами. Предполагается, что возможны различные технологии, характеризующиеся различными уровня кормления и, соответственно, различной продуктивностью. Пример графа, задающего половозрастную структуру стада, связи в стаде между группами и различные технологии кормления, представлен на рис. 1.

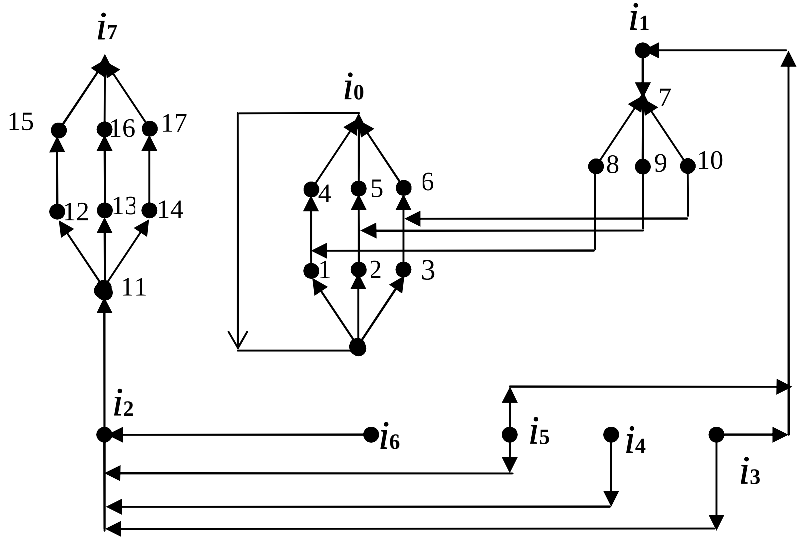

Рис.1.

Дадим некоторые пояснения. Группы с номерами $i = 1, \ldots, 6$ – это основное стадо, причем первые три группы – это молодые коровы, только готовые к рождению телят. Предусмотрено три технологии кормления (группы 1–4, 2–5, 3–6) и, соответственно, три различные продуктивности. Группы с номерами $i = 7, \ldots, 10$ – это ремонтное стадо, причем возможны только переходы (8–4), (9–5), (10–6). Группы с номерами $i = 11, \ldots, 17$ – это откормочное стадо. Здесь также предполагается три программы откорма, характеризующиеся как интенсивностью кормления, так и временем откорма.

Для удобства и единообразия описания всех переходов, происходящих в стаде животных, для любого графа введем дополнительно фиксированные вершины $i_0, i_1, \ldots, i_7$ и дуги, соединяющие эти вершины между собой и с вершинами основного графа.

Для описания модели введем следующие обозначения. Пусть

t – дискретное время (день);

i– номер группы (вершины графа);

G – множество всех вершин графа;

G_i^+, G_i^- – вершины графа, которые связаны входящими (исходящими) дугами с вершиной I;

r_i – время пребывания животных в группе I;

$x_i(t)$ – численность i-й группы в день t;

$u_{ij}(t)$ – количество животных, переходящих из i-й в j-ю группу в день t;

$d_i(t)$, $b_i(t)$ – смертность и плановая (среднестатистическая) выбраковка в i-й группе;

$v_i(t)$ – убой животных в i-й группе, превосходящий плановую выбраковку.

Внутри i-й группы происходят следующие изменения, которые отображены на рис. 2.

Количество животных $\sum_{k\in G_i^+} u_{ki}(t)$, поступивших в группу i в день t, находится в этой группе без изменения численности до последнего дня пребывания, равного r_i, и лишь в последний день происходит выбраковка и плановый убой животных.

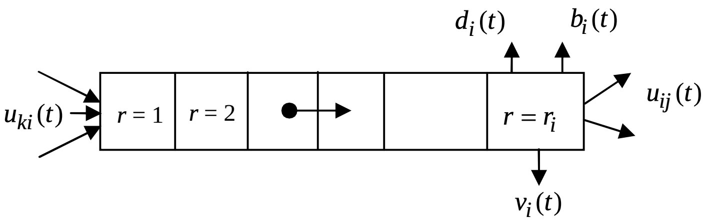

Рис. 2.

Отсюда следует, что справедливо следующее соотношение:

$$x_i(t+1) = x_i(t) + \sum_{k\in G_i^+} u_{ki}(t) - \sum_{j\in G_i^-} u_{ij}(t) - \quad (1)$$

$$- b_i(t) - d_i(t) - v_i(t), \quad t = 0,1,\ldots$$

Учитывая традиционный способ задания смертности и выбраковки соответствующими коэффициентами e_i^d и e_i^b, можно записать следующие соотношения:

$$(2)\quad \begin{aligned} b_i(t) &= e_i^b \sum_{k\in G_i^+} u_{ki}(t-r_i), \\ d_i(t) &= e_i^d \sum_{k\in G_i^+} u_{ki}(t-r_i). \end{aligned}$$

В каждой вершине сохраняется баланс потоков:

$$(3)\quad \sum_{j\in G_i^-} u_{ij}(t) = \sum_{k\in G_i^+} u_{ki}(t-r_i) - d_i(t) - b_i(t) - v_i(t)\,.$$

Кроме того, имеются ограничения неотрицательности переменных

(4) $v_i(t) \geq 0$, $u_{ij}(t) \geq 0$, $x_i(t) \geq 0$.

В этих соотношениях $u_{ki}(-r_i)$, …, $u_{ki}(-1)$ должны быть заданы.

Используя равенства (3), переменные $v_i(t)$ можно исключить. Тогда ограничения (1) будут иметь вид

$$(5)\quad x_i(t+1) = x_i(t) + \sum_{k\in G_i^+} \left[u_{ki}(t) - u_{ki}(t-r_i)\right] - b_i(t) - d_i(t),$$

а условие $v_i(t) \geq 0$ запишется в виде

$$(6)\quad \sum_{k\in G_i^+} u_{ki}(t-r_i) - \sum_{j\in G_i^-} u_{ij}(t) - b_i(t) - d_i(t) \geq 0.$$

Нетрудно видеть, что количество животных в группе до выбраковки и смерти в соответствии с принятой гипотезой осуществления этих событий равно

$$(7)\quad x_i'(t) = \sum_{k\in G_i^+} \sum_{s=1}^{r_i} u_{kr}(t-r_i+s)\,,$$

а после –

$$(8)\quad \begin{aligned} x_i(t) &= x_i'(t) - d_i(t) - b_i(t) - v_i(t) = \\ &= x_i'(t) + \sum_{j\in G_i^-} u_{ij}(t) - \sum_{k\in G_i^+} u_{ki}(t-r_i). \end{aligned}$$

Это выражение и является решением системы разностных уравнений (1) и (5). Понятен тот факт, что в текущий момент времени количество животных в группе, если животные содержатся в ней r_i дней, определяется только поступлениями в эту группу животных из других групп за r_i предыдущих дней и выбытием из нее в момент t.

Условие неотрицательности переменных $x_i(t) \geq 0$ запишется в виде

$$(9)\quad \sum_{k\in G_i^+}\sum_{s=1}^{r_i} u_{ki}(t-r_i+s)+\sum_{j\in G_i^-} u_{ij}(t)-\sum_{k\in G_i^+} u_{ki}(t-r_i)\geq 0\,.$$

Таким образом, мы привели разные модели описания динамики стада животных. В зависимости от поставленной задачи можно рассматривать модели с разным набором переменных. Мы будем рассматривать модель, в которой присутствуют только потоки $u_{ij}(t)$ и ограничения (6) и (9), в которых $b_i(t)$ и $d_i(t)$ заменены по формулам (2), а необходимые значения $x_i(t)$ вычисляются по формулам (8). Такую модель, в которой переменными являются только потоки в сети, назовем потоковой моделью.

Для удобства и единообразия описания потоков в сети были введены дополнительные вершины $i_0, i_1, \ldots, i_7$ и необходимые дополнительные дуги, как это показано на рис. 1.

В вершинах i_0, i_1, i_2 следует записать уравнения сохранения потоков в момент времени t:

$$(10)\quad \sum_{j\in G_i^-} u_{ij}(t)-\sum_{k\in G_i^+} u_{ki}(t)=0\,,\quad i=i_0,i_1,i_2\,.$$

Вершины i_3, i_4, i_5, i_6 являются источниками в рассматриваемой сети. Мощность этих источников равна количеству бычков, рождающихся в основном и ремонтном стадах (вершины i_6, i_4) и, соответственно, телочек (вершины i_5, i_3). Мощность этих источников равна

$$(11)\quad p_i(t)=\sum_{k\in\Omega_i}\sum_{j\in G_k^-} u_{ki}(t)\,b_k\,,\quad i=i_3,i_4,i_5,i_6\,,$$

где Ω_i – множество групп животных, которые производят потомство и поставляют его в группу i; b_k – коэффициент рождаемости бычков или телочек в k-й группе.

Для этих вершин, являющихся источниками, запишем уравнение баланса:

(12) $p_i(t) = \sum_{j \in G_i^-} u_{ij}(t)$.

Для поглощающей вершины i_7 никаких уравнений не записывается – она введена для единообразия описания и используется для подсчета получаемой мясной продукции.

Будем считать, что каждая группа животных кормится по жесткому рациону, потребляя в день t на каждую голову корма вида h в количестве $w_h^i(t)$, $h = 1, \ldots, H$. Тогда в день t для всех животных требуется корма вида h в количестве

(13) $\sum_{i \in G} w_h^i(t) x_i'(t)$.

3. Агрегирование модели

Ясно, что приведенная выше модель с шагом в один день для проведения расчетов на длительную перспективу непригодна из-за большой размерности задачи. Проведем ее агрегирование по времени.

Разобьем каждый год на N интервалов, которые будем называть сезонами. Введем новое время $t = 0, \ldots, N\tilde{T}$, которое является сквозной нумерацией сезонов от 0 до $\tilde{T}$ лет. Пусть T_t – длительность временного интервала номера t, а t_t^0, t_t^k – его начало и конец на оси времен t. Обозначим также

$$\Delta_t = \left\{ t : t_t^0 \le t \le t_t^k \right\}.$$

Введем новые переменные $U_{ij}(t)$, такие что на интервале t

(14) $u_{ij}(t) = U_{ij}(t) / T_t$.

$U_{ij}(t)$ означает количество животных, перешедших из i-й группы в j-ю за интервал номера t. Аналогично вводятся величины $V_i(t)$, $B_i(t)$, $D_i(t)$.

С учетом сказанного, для $t \in \Delta_t$ из (7) и (14) следует:

(15) $x_i'(t) = \sum_{k \in G_i^+} \sum_{m=0}^{l_i(t)} a_{im}(t, t) U_{ki}(t - m)$,

где

$$a_{im}(t,t) = d_{im}(t,t) / T_{t-m} ,$$

(16)
$$d_{im}(t,t) = \left[\min(t, t_{t-m}^k) - \max(t - r_i, t_{t-m}^0)\right]_+$$

$$l_i(t) : t - r_i \in \Delta_{t-l_i(t)} ,$$

$$z_+ = \max(0, z).$$

Из (16) ясно, что $a_{im}(t, t)$ – периодическая функция своих аргументов: по t – с периодом N, а по t – с периодом в один год.

Условие неотрицательности переменных $x_i(t) \geq 0$ (условие (9)) мы будем записывать для конца интервала t в виде

(17)
$$\sum_{k \in G_i^+} \sum_{m=0}^{l_i(t_t^k)} a_{im}(t, t_t^k) U_{ki}(t - m) + \\ + \sum_{j \in G_i^-} \frac{U_{ij}(t)}{T_t} - \sum_{k \in G_i^+} \frac{U_{ki}(t - l_i(t_t^k))}{T_{t-l_i(t_t^k)}} \geq 0.$$

Условие неотрицательности переменных $V_i(t) \geq 0$ получим, суммируя по $t \in \mathrm{D}_t$ ограничение (6) с учетом выражений (2). Предварительно вычислим сумму

$$\sum_{t=t_t^0}^{t_t^k} u_{ki}(t - r_i) = \sum_{m=0}^{l_i} e_{im}(t) U_{ki}(t - m),$$

где

$$l_i\ (t)\ :\ t_t^0 - r_i \in \Delta_{t-l_i(t)} ,$$

$$e_{im(t)} = \frac{1}{T_{t-m}} \left[\min(t_{t-m}^k, t_t^k - r_i) - \max(t_{t-m}^0, t_t^0 - r_i)\right]_+ .$$

Принимая все это во внимание, соответствующее ограничение запишем в виде:

(18)
$$\sum_{k \in G_i^+} \left(1 - e_i^b - e_i^d\right) \sum_{m=0}^{l_i(t)} e_{im}(t) U_{ki}(t - m) - \sum_{j \in G_i^-} U_{ij}(t) \geq 0$$

Запишем, наконец, агрегированные ограничения по кормам. Для этого вычислим предварительно следующую сумму

(19) $$X_i(t) = \sum_{t=t_t^0}^{t_t^k} x_i(t) = \sum_{k \in G_i^+} \sum_{m=0}^{l_i(t)} c_{im} U_{ki}(t-m),$$

где

$$c_{im}(t) = \sum_{t=t_t^0}^{t_t^k} a_{im}(t,t) .$$

Коэффициенты $c_{im}(t)$ можно представить в следующем виде:

(20) $$\begin{aligned} c_{im}(t) = \Big[& \min(b_i^k, t_{t-m}^0) - \min(t_{t-m}^0, b_i^0) + \\ & + \frac{1}{2T_{t-m}} \left[a_i^0 (1 + a_i^0) - a_i^k (1 + a_i^k) \right] \Big] \times \operatorname{sgn}(m) + \\ & + \frac{1}{T_t} \left[\frac{g_i (1 + g_i)}{2} + r_i (T_t - r_i)_+ \right] \times (1 - \operatorname{sgn}(m)), \end{aligned}$$

где

$$b_i^o = t_t^0 - r_i \ , \quad b_i^k = t_t^k - r_i \ , \quad g_i = \min(r_i, T_t),$$

$$a_i^0 = \min(T_{t-m}, (t_{t-m}^k - b_i^o)),$$

$$a_i^k = \max(0,\ t_{t-m}^k - \ b_i^k) .$$

Если обозначить D_T – множество номеров временных интервалов t, принадлежащих году T, то агрегированные ограничения по кормам можно представить в виде следующих неравенств, которые необходимо записать для каждого вида корма h и каждого года T.

(21) $$\sum_{t \in D_T} \sum_{i \in G} w_h^i(t) X_i(t) \le x_h(T) .$$

Здесь $x_h(T)$ – годовой запас корма вида h

Последнее замечание. В ограничениях (10)–(12) переменные $u_{ij}(t)$ надо заменить на агрегированные переменные $U_{ij}(t)$.

Заметим также, что данная модель применима для любой отрасли животноводства и даже птицеводства. В каждом конкретном случае меняется только структура графа и содержательный смысл вершин.

4. Производство животноводческой продукции

Будем рассматривать производство животноводческой продукции на интервале $\tilde{T}$ лет. С учетом введенных обозначений производство мяса в год t равно

$$F_1(T) = \sum_{i\in G} \sum_{t\in D_T} p_i^1 \left[U_{ii_7}(t) + V_i(t) + B_i(t) \right],$$

где p_i^1 – вес животного i-й группы.

Производство молока равно

$$F_2(T) = \sum_{i\in G} \sum_{t\in D_T} p_i^2 T_t X_i(t),$$

где p_i^2 – дневной удой животных i-й группы (если животные этой группы потребляют молоко, то эта величина отрицательная).

В качестве обобщенного показателя производства животноводческой продукции КРС в год T будем рассматривать свертку критериев F_1 и F_2 вида

(22) $F(T) = l\, F_1(T) + (1 - l) F_2(T),\ 0 \le l \le 1.$

На рассматриваемом интервале времени соответствующий критерий будет иметь вид

(23) $F = \sum_{T=1}^{\tilde{T}} F(T).$

5. Оптимизационная задача производства животноводческой продукции на заданном временном интервале при известной информации о кормовой базе

Рассмотрим производство животноводческой продукции некоторого стада домашних животных. Для определенности будем считать, что это стадо КРС, половозрастная структура которого задается графом, представленным на рис. 1.

Как уже было сказано выше, группы с номерами $i = 1, \ldots, 6$ — это основное стадо. Последние три группы –

дойное стадо. Продуктивность дойного стада: $p_4 = 8$ кг, $p_5 = 10$ кг, $p_6 = 12$ кг молока в сутки. Соответственно изменяются и режимы кормления, которые взяты из соответствующих справочников.

Ремонтное стадо: $i = 7, 8, 9, 10$. Сначала молодняк кормится одинаково (группа 7), затем, в зависимости от планируемой продуктивности, переводится в группы 8, 9, 10. Из этих групп возможны только переходы (8–4), (9–5), (10–6).

Откормочное стадо: $i = 11, \ldots, 17$. Сначала весь откормочный молодняк кормится одинаково в группе с номером 11, а затем возможны три технологии откармливания: интенсивная ($i = 12, 15$) и две умеренные ($i = 13, 16$), ($i = 14, 17$), отличающиеся количеством и составом потребляемого корма и временем откармливания.

Конечный вес откармливаемых животных соответственно равен 450, 420, 400 кг.

Времена пребывания животных во всех группах равны: 60, 60, 60, 305, 305, 305, 365, 120, 120, 120, 120, 180, 180, 180, 180, 240, 240 дням.

В качестве компонент корма рассматривались концентрированные корма и все остальные. Число сезонов в году $N = 1$.

Будем рассматривать функционирование стада на интервале $\left[0, \tilde{T}\right]$ лет. Будем также считать, что кормовая база на этот период известна.

Пусть в начальный момент заданы значения $x_i(0)$. Требуется найти управления $U_{ki}(0), U_{ki}(1), \ldots, U_{ki}(\tilde{T})$, $k,i \in G$, доставляющие максимум функционалу (23) при ограничениях (10)–(12), в которых переменные $u_{ij}(t)$ надо заменить на агрегированные переменные $U_{ij}(t)$, и ограничениях (17), (18), (21). В последнем ограничении $X_i(t)$ надо заменить по формулам (19).

Чем интересна эта задача? Традиционно в планировании считается, что планируемое производство животноводческой продукции можно определить, зная только средние значения потребляемых кормов. Решая подобные задачи, можно выяснить, насколько влияет изменчивость кормовой базы на производство животноводческой продукции.

Поскольку мы будем решать задачу максимизации функционала на конечном интервале времени, на правом конце надо добавить дополнительные ограничения, гарантирующие сохранность стада в последний год. Добавленные ограничения требовали, чтобы в последний год численность в основном, ремонтном и откормочных стадах были не меньше среднего значения за весь интервал.

Расчеты проводились при фиксированном значении параметра l, гарантирующем необходимое соотношение производства молока и мяса, и заданном временном ряде кормов. Временные ряды $x_1(T)$ и $x_2(T)$ полностью коррелированы. Характер изменения временных рядов представлен на рис. 3.

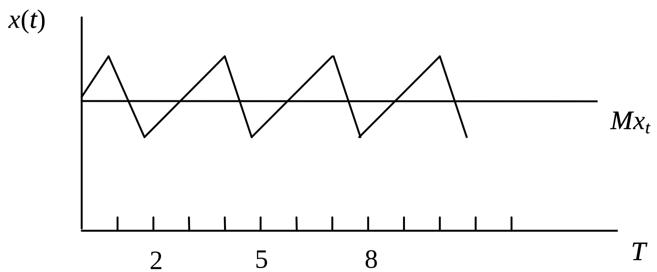

Рис. 3.

Характеристика разброса значений такого ряда $D = \left(\max_T x(T) - Mx(T)\right) / Mx(T)$ будет использована в дальнейшем. Средние значения этих рядов $Mx_1 = 1000$, $mx_2 = 450$.

Естественно, что граничные условия влияют на решение оптимизационной задачи. Для выявления этого влияния были проведены расчеты с разными начальными условиями и с различными временными интервалами. Оказалось, что влияние правого конца и начальных условий сказывается только на начальных и последних 2–3 годах. Таким образом, отступив от начала и конца по 3 года, мы можем анализировать качественные свойства решений этой задачи.

Зафиксировав начальную структура стада, полученную из решения стационарной задачи, были проведены расчеты для интервала в 15 лет с D = 0%, 10%, 20%, 30%. Вариант с D = 0%, как и следовало ожидать, дал постоянное в течение всего времени стадо и постоянное производство продукции. В других варианта численности групп животных меняются значительно, а зависимость оптимального значения функционала от параметра D почти линейна и такова, что теряется около 0,7% агрегированной продукции на каждый 1% показатель изменчивости корма D. Это очень большая величина, показывающая, что неучет изменчивости кормовой базы может привести к значительным ошибкам в планировании.

После анализа всех рассмотренных вариантов можно сделать некоторые качественные выводы. В оптимальных решениях никогда не выбирались технологии с наименьшей продуктивностью и с наименьшей потребностью в корме. Всегда имеется в некоторых группах ненулевой забой животных. Наблюдается следующая закономерность: при малых значениях параметра D = 10% выбраковка производится в группах откормочного стада (в годы T = 5, 8, 11), но основное стадо не трогается. Для D = 20% происходит выбраковка в откормочном стаде, а в годы T = 4, 7, 10 происходит выбраковка и в основном стаде. При D = 30% характер стратегии выбраковки не меняется, увеличивается лишь численность забиваемых животных. Во всех рассмотренных случаях ремонтное стадо не выбраковывалось.

Конечно, к этим качественным выводам надо относиться осторожно, поскольку они проводились на временных рядах определенного вида, но проведенные расчеты показывают, что учитывать изменчивость кормовой базы при планировании производства животноводческой продукции просто необходимо.

6. Задача оперативного управления в животноводческой отрасли

Как было сказано во введении, кормовая база подвержена влиянию случайных погодных и других неопределенных факторов. К этим неопределенным факторам можно отнести, например, количество закупаемых кормов. В данном случае мы можем лишь рассматривать некоторые возможные прогнозные варианты.

Разработанные выше потоковые модели и аппарат решения динамических задач мы применим к решению задачи оперативного управления в животноводстве.

Одним из способов оперативного управления является способ, иногда называемый скользящим управлением, когда на ряд лет вперед задается прогноз неопределенных факторов и текущее управление принимается из условия достижения максимума некоторого функционала. Мы модифицируем этот метод и применим его к решению задачи оперативного управления. Будем считать, что начало года совпадает с началом стойлового периода, когда сделаны основные запасы корма. Сделаем еще одно упрощающее предположение, что известны все корма до конца года, включая те, которые будут выращены до начала следующего стойлового периода. Это нам нужно для того, чтобы интервал планирования можно было бы принять равным календарному году.

Рассмотрим следующую задачу управления.

К началу текущего года t известен годовой запас кормов $x(t)$. Кроме того, известен прогноз кормов на следующие годы: $x(t + 1)$, $x(t + 2)$, … . Найдем максимум функционала типа (22), но, вообще говоря, на бесконечном интервале времени. Из всей последовательности оптимальных управлений зафиксируем только управление $U(t)$ – вектор оперативного управления в год t. К началу следующего года $(t + 1)$ будет известна информация о кормах на этот год и детерминированный прогноз на все последующие годы. Решим аналогичную задачу, полученное управление $U(t + 1)$ примем в качестве оперативного управления в год $(t + 1)$, перейдем к следующему году $(t + 2)$ и т.д.

Для реализации описанной процедуры на каждом шаге нужно, вообще говоря, решать оптимизационную задачу на бесконечном интервале времени. Это гарантирует от влияния величины рассматриваемого интервала на выбор управления на начальной стадии процесса. Заметим, что при решении задачи в момент t нам нужно избежать влияния интервала планирования только на текущее управление.

Пусть $U(t, T)$ – управление, относящееся к году t, полученное в результате решения оптимизационной задачи в t-й год на интервале времени величиной T. Предположим, что верна следующая гипотеза: существует такое $\hat{T}$, что для всех $T \geq \hat{T}$: $U(t,T) = U(t,\hat{T})$. В этом случае мы можем ограничиться решением задачи на конечном интервале времени. Конкретные расчеты показали справедливость этой гипотезы, но интервал планирования нужно выбирать довольно большой, по крайней мере не менее 11 лет.

Метод p-траекторий оперативного управления

Опишем сейчас модификацию метода скользящего планирования, который применялся для решения задачи оперативного управления.

Как правило, информация об урожайности культур в регионе весьма скудна – это ряд измерений за небольшое число лет. Кроме того, обычно в регионе часть концентрированных кормов является привозной, и в данном случае говорить о вероятностной природе таких поставок весьма затруднительно.

Для вычисления ожидаемого за период планирования производства воспользуемся следующим подходом. Будем считать, что из наблюденного состояния $x(t)$ возможны $n(t)$ прогнозных траекторий $x^i(t)$, которые реализуются с вероятностями $p_i(x^i(t))$, $\sum_i p_i = 1$. В качестве таких траекторий могут быть взяты траектории, сформированные из наблюденных рядов (подробнее об этом будет сказано ниже), а по концентрированным кормам можно рассмотреть несколько вариантов поставок этих кормов с весами, интерпретируемыми как соответствующие вероятности. В этих предположениях величина ожидаемого производства за T лет равна

$$(24)\quad F = \sum_{t=0}^{T} e^{-qt} \sum_{i=1}^{n(t)} p_i(x^i(t))\, F_i(x^i)),$$

где $F_i(x^i(t))$ – производство продукции на траектории i, вычисляемое по формуле (23), а q – коэффициент дисконтирования.

Далее применяется метод скользящего планирования с функционалом (24) при условии

$$U^1(t) = U^2(t) = \ldots = U^{n(t)} = U(t).$$

Результаты численных экспериментов.

Для исследования эффективности метода *p*-траекторий были проведены расчеты на реальной информации. В качестве исходных данных для кормовой базы был принят 13-летний ряд урожайностей кормовых культур в одной из областей. Эти значения были нормированы таким образом, что среднее значение урожая равно 1000 тонн кормовых единиц, а поставки концентрированных кормов считались постоянными во времени и равны 450 т. Нормированный ряд кормов представлен на рис. 4.

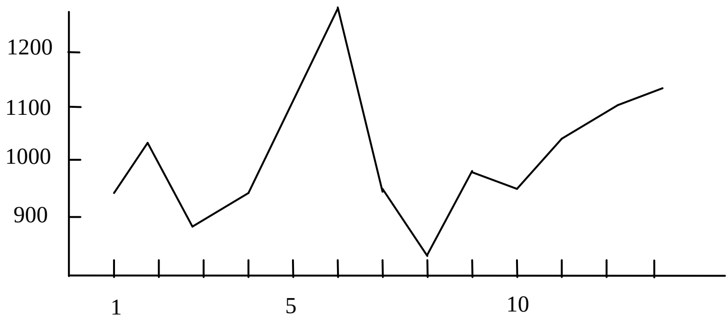

Рис. 4. Построение ***p****-траекторий*

Прогнозные траектории строятся из известного ряда наблюденных значений. Для этого в известном ряде отыскиваются значения, отличающиеся на малую величину от значений в год t. Пусть эти значения соответствуют годам $t_j(t)$, $j = 1, \ldots, n(t)$. Тогда из известного ряда, начиная с этих годов $t_j(t) + 1$ строятся прогнозные ряды – *p*-траектории.

Длина прогнозного ряда должна быть равна T годам – выбранному интервалу расчетов. Если прогнозный ряд не позволяет построить прогнозный ряд такой длины, то проводится циклическое продление ряда: начиная с начала исходного ряда в нем отыскиваются значения, отличающиеся на малую величину от последнего значения в исходном ряде, и по только что описанной методике строятся продолжения исходного ряда (их, естественно, может быть несколько). В том случае, если в исходном ряде нет значений, отличающихся на малую величину от заданного значения, в качестве прогноза берется ряд нужной длины, состоящий из постоянных значений, равных среднему значению исходного ряда. После этого каждой траектории приписывается некоторый вес. Таким образом, *p*-траектории стоятся из отрезков исходного ряда.

Был проведен следующий численный эксперимент. Сначала была решена задача с одной *p*-траекторией, совпадающей с заданным рядом, приведенным на рис. 4., т.е. была решена задача с полностью известной информацией. Решение этой задачи было использовано для оценки управления, вырабатываемого с помощью метода *p*-траекторий. Затем на интервале $\hat{T}$ лет решалась задача оперативного управления, т.е. каждый год, исходя из информации, представленной в виде временного ряда, строились *p*-траектории и решалась соответствующая оптимизационная задача. Полученные решения сравнивались по функционалу с решением задачи с полной информацией. Проведенные расчеты показали, что предлагаемый метод дает вполне приличный результат – на интервале $\hat{T}$ лет он проигрывает по функционалу решению с полной информацией меньше, чем на 5%.

Литература

1. БАЙРАМОВ О.Б. *Математические модели оценки предельной продуктивности животноводства.* – М.: ВЦ РАН, 1999. – 23 с.
2. БЕРГ Р.Т., БАТТЕРФИЛД Р.М. *Мясной скот: концепция роста.* – М.: Колос,1979. – 280 с.
3. БРАСЛАВЕЦ М.Е., КРАВЧЕНКО Р.Г. *Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве.* – М.: Колос, 1972. – 589 с.

4. ВЕЛИКОРОСОВ Н.В. *Математическое моделирование развития животноводческого комплекса. Детерминированные и стохастические модели*: Дис. канд. физ.-мат. наук. – Москва, 1991.
5. ГАЙКО А.А, ГОЛУБИЦКИЙ А.П. *Справочник по скотоводству*. – Мн.:Ураджай, 1984. – 310 с.
6. ГЕНДИНА Л.А. *Использование нелинейных динамических моделей для анализа возможности оптимизации баланса кормов и поголовья сельскохозяйственных животных в условиях неопределенности:* Дис. канд. физ.-мат. наук. – Москва, 1988.
7. ГРИГОРЬЕВ Н.Г., ВОЛКОВ Н.П., ВОРОБЬЕВ Е.С. и др. *Биологическая* полноценность *кормов*. – М.: Агропромиздат, 1989. – 289 с.
8. ЕРМОЛЬЕВ Ю.М. , ЯСТРЕМСКИЙ А.И. *Стохастические модели и методы в экономическом планировании*. – М.: Наука, 1979. – 251 с.
9. ИЛЬЮШОНОК С.Е. *Оптимизация темпов и пропорций развития аграрно-промышленного комплекса*. – Новосибирск, 1980. – 304 с.
10. КАЛАШНИКОВ А.П., КЛЕЙМЕНОВ Н.И., БАКЛАНОВ В.Н. и др. *Нормы и рационы кормления сельскохозяйственных животных*. – М.: Агропромиздат, 1985. – 352 с.
11. КАРДАШ В.А. *Модели управления производственно-экономическими процессами в сельском хозяйстве*. – М. Экономика, 1981. – 210 с.
12. КИСЕЛЕВ В.Г. *Управление процессом функционирования одного класса популяций* // Труды института системного анализа РАН «Динамика неоднородных систем». – 2008. – Т. 32.2. – С. 40–47.
13. КРАВЧЕНКО Р.Г. *Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве*. – М.: Колос, 1978. – 423 с.
14. КРЫЛАТЫХ Э.Н. *Система моделей в планировании сельского хозяйства*. – М.: Экономика, 1981. – 210 с.

15. *Моделирование перспективного планирования развития скотоводства* (рекомендации ВНИПТИК). – М.: Агропромиздат, 1990. – 14 с.
16. ОГНИВЦЕВ С.Б. *Моделирование перспективного планирования развития скотоводства.* – М.: Агропромиздат, 1990. – 14 с.
17. ОГНИВЦЕВ С.Б., СИПТИЦ С.О. *Моделирование АПК: теория, методология, практика.* – М.: Энциклопедия российских деревень, 2002.
18. ФРАНС ДЖ., ТОРНЛИ ДЖ, *Математическое моделирование в сельском хозяйстве*. – М.: Агропромиздат, 1987. – 273 с.
19. ХУДЯКОВА Е.В., ЛИПАТОВ А.А. *Имитационное моделирование экономических процессов в АПК.* Учеб. пособие. – М.: Издат. центр МГАУ, 2006. – 185 с.

NETWORK MODELS OF CONTROL IN STOCK BREEDING BRANCH OF AGRICULTURAL SECTOR

Valeriy Kiselev, A. A. Dorodnicyn Computing Center of RAS, Moscow, Cand.Sc., assistant professor (vgkiselev@yandex.ru).

The network model of cattle stock dynamic is suggested. The models of this sort are shown to be useful for operative control under stochastic forages.

Keywords: network model, operative control, optimization, stock breeding.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии М. В. Губко