

УДК 536.7 + 519.85  
ББК 78.34

## **МЕТОДЫ ТЕПЛОГИДРАВЛИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛОВЫМИ СЕТЯМИ**

**Майков И. Л.<sup>1</sup>, Директор Л. Б.<sup>2</sup>, Зайченко В. М.<sup>3</sup>**

*(Учреждение Российской академии наук*

*Объединенный Институт высоких температур РАН,  
Москва)*

*Представлен метод решения одной из практически важных задач, связанных с эффективным теплоснабжением абонентов тепловых сетей, как в случае сильной гидравлической разбалансировки сети (статическая задача), так и при изменениях тепловых нагрузок в процессе эксплуатации (динамическая задача). Разработан численный метод для анализа и оптимизации тепловых сетей, позволяющий решать задачи оптимизации и управления тепловой сетью с большим количеством абонентов с целью реализации оптимального режима теплоснабжения. Показано, что и статическая, и динамическая задачи могут быть решены в рамках одной общей нелинейной оптимизационной задачи. Разработан алгоритм решения такой задачи, в котором минимизация целевой функции осуществляется в итерационном процессе с использованием метода покоординатного спуска.*

Ключевые слова: математическое моделирование, нелинейная оптимизация, задачи минимизации, численные методы, тепловые сети.

---

<sup>1</sup> Игорь Леонидович Майков, доктор физико-математических наук, в.н.с. ([maikov\\_i@mail.ru](mailto:maikov_i@mail.ru)).

<sup>2</sup> Леонид Бенцианович Директор, доктор технических наук, в.н.с. ([director@oivtran.ru](mailto:director@oivtran.ru)).

<sup>3</sup> Виктор Михайлович Зайченко, доктор технических наук, зав. лаб. ([zaitch@oivtran.ru](mailto:zaitch@oivtran.ru)).

## **1. Введение**

Тепловые сети предприятий или городских микрорайонов, обеспечивающие подачу тепловой энергии конкретным потребителям (абонентам) для целей отопления, являются достаточно сложными теплогидравлическими системами, включающими, помимо собственно трубопроводов различного диаметра, регулирующую арматуру, насосы, смесительные устройства, отопительные приборы. При проектировании жилых зданий, промышленных объектов тепловая сеть рассчитывается таким образом, чтобы ее гидравлические характеристики обеспечивали заданную температуру воздуха внутри помещений в широком диапазоне сезонного изменения температуры наружного воздуха при качественном регулировании (регулировании соответствующим изменением температуры теплоносителя) [5].

В процессе развития или перепрофилирования предприятий их тепловые сети претерпевают значительные изменения и тепловые нагрузки, заложенные в первоначальный проект системы теплоснабжения, не всегда соответствуют фактическим потребностям абонентов тепловой сети. Кроме того, в процессе длительной эксплуатации значительно изменяются гидравлические характеристики сети. Возникающие при этом проблемы, связанные с недостаточным обеспечением теплом отдельных абонентов, решаются наименее эффективно – увеличением тепловой нагрузки всей тепловой сети.

Настройка тепловой сети, насчитывающей десятки абонентов, представляет собой сложную, многопараметрическую задачу, решить которую без наличия адекватной математической модели сети практически нереально.

В работе представлен метод решения одной из практически важных задач, связанных с эффективным теплоснабжением абонентов тепловых сетей, как в случае сильной гидравлической разбалансировки сети, так и при изменениях тепловых нагрузок в процессе эксплуатации. В основу теплогидравлической модели тепловой сети положена рекурсивная схема [3]. Модель сети строится «сверху вниз»: сначала в качестве основных элементов рассматриваются крупные участки сети, затем

они детализируются, впоследствии детализируются их абоненты и т.д. Таким образом, с помощью одной и той же программы может быть смоделирована сеть практически любого уровня сложности, и ее конфигурацию можно изменять в широких пределах.

В работе сформулировано несколько нелинейных задач оптимизации с ограничениями (статическая и динамическая задачи) с соответствующими критериями оптимизации, определены условия разрешимости этих задач. Сформулирована общая задачи оптимизации теплогидравлической сети, имеющая однозначное решение.

Разработан численный метод для анализа и оптимизации тепловых сетей, позволяющий решать задачи оптимизации и управления сетью с большим количеством абонентов с целью реализации оптимального режима теплоснабжения.

## **2. Постановка задачи**

При построении модели рассматривается формализованная схема теплотрассы с присоединенными к ней абонентами (рис. 1). Такой формальный подход позволяет описывать схемы тепловых сетей практически любой сложности и глубины детализации.

Обозначения на схеме:

абонент (А) – подключенный между подающей и обратной магистралью элемент тепловой сети, в котором происходит полезное тепловыделение;

коллектор (К1, К2) – часть тепловой сети, содержащая параллельно включенные элементы (абоненты, коллекторы, трассы) с общими точками на входе и выходе;

трасса (Т1, Т2) – часть тепловой сети, включающая набор коллекторов, абонентов и трасс;

узел (У) – точки на прямой и обратной магистралях, между которыми подключен абонент (группа абонентов);

дроссельное устройство (Д) – регулирующий клапан.

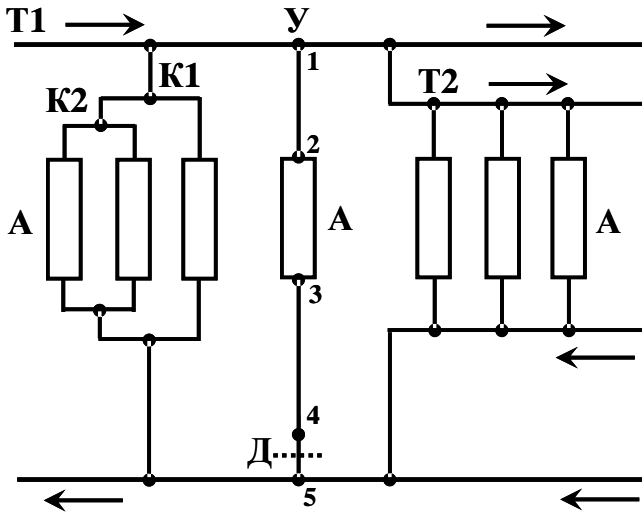


Рис. 1. Схема элементов теплотрассы

Исходными данными для расчета теплотрассы служат: проектные тепловые нагрузки абонентов  $Q_i$  и соответствующие им расходы теплоносителя (воды)  $G_i$  (при заданных температурах в помещениях абонентов  $T(i)_h$ ); температура наружного воздуха  $T_a$ ; температура  $T_{in}$  и расход воды  $G_{in}$  на входе в теплотрассу; параметры участков теплотрассы и абонентских вводов; потери давления на абонентских вводах и выводах; потери давления на абонентах. Индекс  $i = 1, \dots, N$ , где  $N$  – количество абонентов.

Расчетные гидродинамические сопротивления на абонентах вычисляются из уравнения Бернулли

$$(1) \quad D_{z(i)} = \frac{dp(i)}{\left(\frac{G(i)}{r}\right)^2},$$

$$D_{zeta} = \sum_{i=1}^4 D_{z(i)}.$$

В уравнениях (1) под  $dp(i)$  понимаются потери давления:  $DP1_i$  – потери давления на абоненте (между точками 2 и 3);  $DP2_i$  – потери давления на абонентском вводе (между точками 1

и 2);  $DP3_i$  – потери давления на абонентском выводе (между точками 3 и 4);  $DP4_i$  – потери давления на дроссельном устройстве (между точками 4 и 5);  $G(i)$  – расход теплоносителя через абонент  $i$ ;  $\rho$  – плотность теплоносителя,  $Dzeta$  – общее сопротивление между точками 1 и 5.

В дальнейшем, не теряя общности, пренебрегаем потерями тепла в теплотрассе (их учет может быть произведен для любой конкретной задачи [5]). Температура воды на выходе из абонента вычисляется из условия теплового баланса

$$(2) \quad T_{out}^i = T_{in}^i - \frac{Q_i}{(G_i c_p)},$$

где  $c_p$  – теплоемкость теплоносителя.

Для узловой точки  $j$  используется средневзвешенное значение температуры

$$(3) \quad T_{out}^j = \frac{G_i T_{out}^i + G_{i-1} T_{out}^{i-1}}{G_i + G_{i-1}}.$$

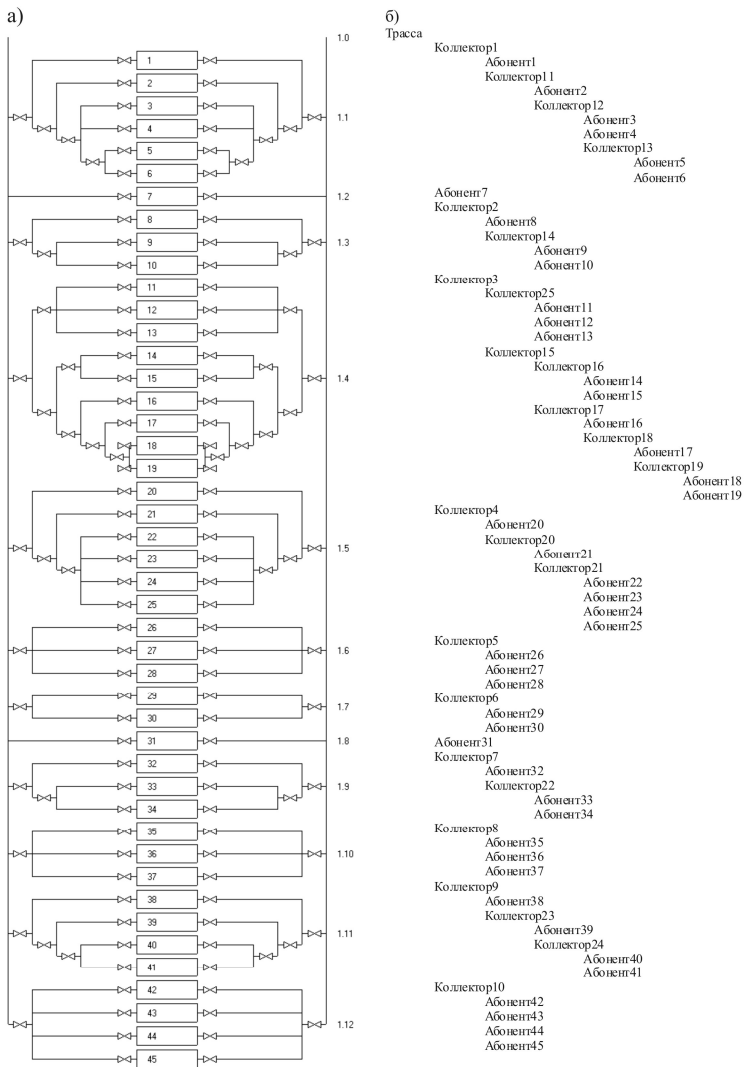
Алгоритм расчета.

1. По располагаемым напорам на абонентах и потерям напора на абонентских вводах по уравнению (1) определяются их коэффициенты гидравлического сопротивления. Все  $DP4_i$  предполагаются равными 0.

2. Рассчитывается температура воды на абонентах и во всех узловых точках теплотрассы по формулам (2) и (3).

Пример расчетной схемы тепловой сети с разбивкой на расчетные элементы в соответствии с рис. 1 приведен на рис. 2.

Полученные поля температур и расходов при этом будут обеспечивать работу теплотрассы в проектном режиме, т.е. все характеристики теплотрассы согласованы таким образом, что обеспечивается заданная температура воды на выходе из абонентов и, соответственно, заданная температура воздуха в помещениях абонентов. Тепловая сеть состоит из одной трассы, 25 коллекторов и 45 абонентов.



*Рис. 2. Тепловая сеть: а) – расчетная схема,  
б) – разбивка на расчетные элементы*

Результаты расчетов (выходная температура воды на абонентах) приведены на рис. 3.

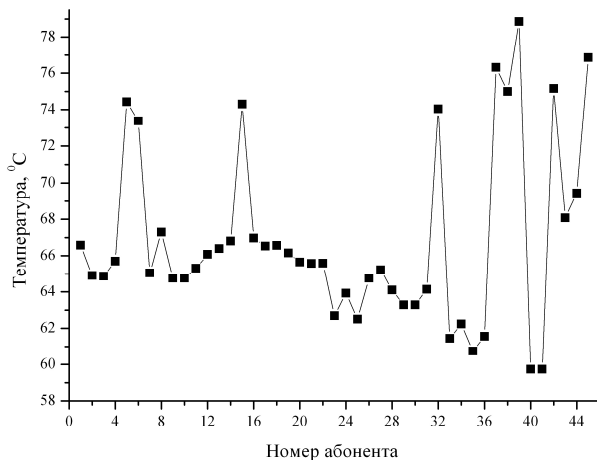


Рис. 3. Распределение температуры теплоносителя на выходе из абонентов

### 3. Процедуры оптимизации

#### 3.1. СТАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим случай, когда в результате расчетов (рис. 3) не удалось получить согласованные температуры обратной воды, соответствующие заданной температуре наружного воздуха. Это может быть связано с гидродинамической рассогласованностью сети.

**Задача 1.** Требуется найти такие  $DP4_i$ , чтобы температура воды на выходе из каждого абонента была равна  $T_{out} = 70\text{ }^{\circ}\text{C}$  (расчетная температура воды в обратной магистрали при расчетной температуре воздуха для проектирования. При этом температура воды в прямой магистрали равна  $T_{in} = 130\text{ }^{\circ}\text{C}$ ). Расход теплоносителя в тепловой сети согласован с теплопотреблением  $Q$ , т.е.

$$(4) \quad G = \frac{\sum_{i=1}^N Q_i}{c_p (T_{in} - T_{out})},$$

где  $G$  – расход теплоносителя в теплосети;  $c_p$  – теплоемкость теплоносителя. Все  $DP4_i \geq 0$ , так как

$$(5) \quad DP4_i = \left( G^{(i)} / r \right)^2 Dz4_i,$$

где  $Dz4_i$  – сопротивления дроссельных (регулирующих) устройств. Из технических соображений сопротивления дроссельных устройств ограничиваются и сверху, что приводит к ограничениям и потерь давления на дроссельных устройствах  $DP4_i \leq DP4_{max}$ , где  $DP4_{max}$  – максимальный перепад давления на дроссельных устройствах.

Рассмотрим функцию

$$(6) \quad L(DP4_1, \dots, DP4_N) = \sum_{i=1}^N G_i |T_{out}^i - T_{out}|.$$

Функция (6) является функцией  $N$  переменных – перепадов давления на дроссельных устройствах  $DP4_i$ , стоящих на каждом абоненте. В выражении (6) каждая выходная температура учитывается со своим весом  $G_i$  согласованно с (3).

### 3.2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Сформулируем следующую оптимизационную задачу:

найти такие  $DP4_i$ , при которых целевая функция (6) при  $T_{out} = 70$  °С достигает минимума:

$$(7) \quad L(DP4_1, \dots, DP4_N) \rightarrow \min ,$$

причем  $0 \leq DP4_i \leq DP4_{max}$  и выполняется условие (4).

Оптимизационная задача (7) является нелинейной задачей оптимизации с ограничениями  $0 \leq DP4_i \leq DP4_{max}$  и с размерностью  $N$ , причем  $N$  велико. Большинство методов решения таких задач требует вычисления первых или даже вторых производных [2, 4]. На практике такие вычисления часто оказываются слишком трудоемкими либо их принципиально невозможно осуществить точно по причине отсутствия явных выражений не только для производных (как и в рассматриваемой задаче), но и для самой целевой функции (6). Наиболее перспективным методом, не связанным с (точным или приближенным) вычислением производных, является метод покоординатного спуска [2], также называемый еще релаксационным методом [1].



Общая схема метода включает следующие шаги.

1. Задание нулевого приближения ( $k = 0$  – номер приближения)  $\mathbf{DP4}^{(k)} = (DP4_1^{(k)}, \dots, DP4_N^{(k)})$ .

2. Рассмотрение функции  $L(DP4_1^{(k)}, \dots, DP4_N^{(k)})$  при фиксированных  $DP4_2^{(k)}, \dots, DP4_N^{(k)}$  как функции одной переменной  $DP4_1$ ,

3. Нахождение минимума функции одной переменной  $L(DP4_1, DP4_2^{(k)}, \dots, DP4_N^{(k)})$ , определение  $DP4_1^{(k+1)}$ .

4. Повторение пунктов 2 и 3 для остальных переменных  $i = 2, \dots, N$  для вычисления  $\mathbf{DP4}^{(k+1)}$ .

5. Проверка условия  $|L(\mathbf{DP4}^{(k+1)}) - L(\mathbf{DP4}^{(k)})| < \varepsilon$  ( $\varepsilon$  – заданная точность). Если условие выполняется – выход, в противном случае  $k = k + 1$  и переход к п. 2.

Центральным звеном предложенного алгоритма является поиск минимума функции одной переменной (п. 3). В работе используется алгоритм Брента [6], в основе которого лежит комбинация методов золотого сечения и последовательной параболической интерполяции.

Результаты расчетов  $DP4_i$  представлены на рис. 4, распределение температуры теплоносителя на выходе из абонентов – на рис. 5.

Максимальное отклонение расчетной температуры воды от заданной составляет менее  $0,3$  °C (рис. 5). При отсутствии регулирования отклонение температур составляло более  $10$  °C (рис. 3).

Таким образом, дополнительные сопротивления (сопротивления дроссельных устройств) на абонентах (рис. 4) обеспечивают согласованный (проектный) режим работы теплосети – все абоненты имеют проектную температуру воздуха внутри помещения (расчеты проводились при  $T(i)_h = 16$  °C).

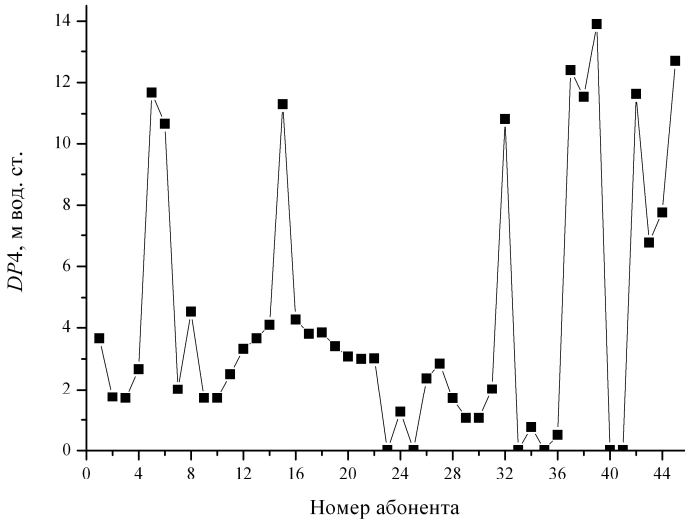


Рис. 4. Распределение перепадов давления на дроссельных устройствах абонентов

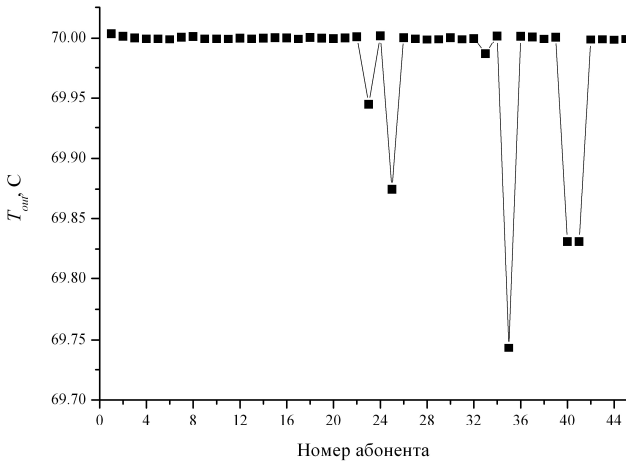


Рис. 5. Распределение температуры теплоносителя на выходе из абонентов после процедуры оптимизации

### 3.3. ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим динамическую задачу, когда произошло изменение тепловой нагрузки одного или нескольких абонентов.

Задача 2. Требуется найти  $DP4_i$  для каждого абонента и расход воды  $G$  в теплотрассе, обеспечивающие температуру воды на выходах всех абонентах  $T_{out} = 70$  °С.

Оптимизационная задача (7) в стандартной постановке не дает решения поставленной задачи, так как не выполняется условие (4). Но задача (7) имеет сходящееся решение, если определить выходную температуру воды следующим образом

$$(8) \quad T_{out} = \frac{\sum_{i=1}^N G_i T_{out}^i}{\sum_{i=1}^N G_i}.$$

Оптимизационная задача может быть сформулирована следующим образом:

найти такие  $DP4_i$ , при которых целевая функция (6) достигает минимума:

$$(9) \quad L(DP4_1, \dots, DP4_N) \rightarrow \min ,$$

причем  $0 \leq DP4_i \leq DP4_{max}$  и  $T_{out}$  удовлетворяет условию (8).

Решение задачи (9) определяет  $DP4_i$  для каждого абонента такие, что температура обратной воды  $T_{out}$  удовлетворяет условию (8).

Рассмотрим функцию

$$(10) \quad L(DP4_1, \dots, DP4_N, G) = \sum_{i=1}^N G_i |T_{out}^i - T_{out}|.$$

Тогда общая оптимизационная задача формулируется следующим образом

найти такие  $DP4_i$ , при которых целевая функция (10) при  $T_{out} = 70$  °С достигает минимума:

$$(11) \quad L(DP4_1, \dots, DP4_N, G) \rightarrow \min ,$$

причем  $0 \leq DP4_i \leq DP4_{max}$  и выполняется условие (4).

Следует заметить, что задача (7) является частным случаем общей задачи (11) (при фиксированном  $G$  задача (11) переходит в (7)).

Минимизация функционала (10) осуществляется аналогично схеме, описанной в п. 3.2, с учетом, что вектор  $\mathbf{DP4} = (DP4_1, \dots, DP4_N, G)$  имеет размерность  $N + 1$ .

### 3.4. ЗАМЕЧАНИЕ

Рассмотрим случай, когда условие (4) выполняется, но решение задачи (7) не существует, т.е. невозможно получить  $T_{out} = 70$  °С одновременно для всех абонентов. То есть можно получить только решение задачи (9), в котором  $T_{out} \neq 70$  °С, а удовлетворяет условию (8). Математически это объясняется ограничениями на  $DP4_i$ . По условиям задачи (7) они должны удовлетворять условию неотрицательности, и поэтому, достигнув нулевого значения,  $DP4_i$  не меняются, при этом значение целевой функции (6) имеет некоторое конечное значение. Если снять условие неотрицательности, получится сходящееся решение задачи (7), и значение целевой функции будет стремиться к нулю. Отрицательные значения  $DP4_i$  на дроссельных устройствах говорят о том, что для обеспечения оптимального режима необходимо уменьшить сопротивления самих абонентов. В постановке задачи сопротивления абонентов заданные величины (либо заданы потери напора на абонентах, связанные с сопротивлениями соотношением (1)) и меняться не могут.

Таким образом, даже выполнение условия (4) не гарантирует возможности получения решения  $T_{out} = 70$  °С одновременно для всех абонентов без изменения расхода теплоносителя в тепловой сети, а значит необходимо решение задачи (11).

Общий алгоритм решения задач 1 и 2 состоит из следующих шагов:

1.  $M = 1$  ( $M$  – номер внешней итерации).
2.  $m = 1$  ( $m$  – номер внутренней итерации).
3. Задание  $T_{out} = 70$  °С.
4. Решение задачи (9) (определение  $DP4_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ ).
5. Расчет нового значения  $T_{out}$  согласно (8).
6. Проверка условия сходимости (по изменениям  $L$  и  $DP4_i$  и в итерациях).
7. При выполнении условий шага 6 – переход к п. 8, в противном случае – переход к п. 4 (задание  $m = m + 1$ ).

8. Проверка условия  $T_{out} = 70$  °С?

9. При выполнении условия шага 8 – выход, в противном случае – задание  $T_{out} = 70$  °С и переход к п. 10.

10. Решение задачи (11) при фиксированных  $DP4_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  (определение  $G$ ).

11. Переход к п. 2 (задание  $M = M + 1$ ).

Итерации внутреннего цикла дают решение задачи (9). Выполнение условия п. 8 при  $M = 1$  дает решение задачи (7) (задача 1 без корректировки расхода). Выполнение условия п. 8 при  $M > 1$  (итерации внешнего цикла) дает решение задачи (11) (задача 1 с корректировкой расхода или динамическая задача – задача 2).

#### 4. Результаты

Расчеты проводились для реальной тепловой сети одного из московских предприятий. Расчетная схема тепловой сети представлена на рис. 2, расчетная тепловая нагрузка теплосети  $Q = 25,497$  Гкал/ч, расчетный расход теплоносителя в теплосети  $G = 424,95$  т/ч (тепловая нагрузка и расход удовлетворяют условию (4)),  $T_{in} = 130$  °С.

Начальное распределение температуры воды на выходе из абонентов и результаты расчетов представлены на рис. 6.

Результаты расчетов показывают, что, несмотря на выполнение условия (4), сходящееся решение (решение задачи (9)) получается только при  $T_{out} = 68,345$  °С (кривая 2). Корректировка расхода (решение задачи (11)) приводит к  $T_{out} = 69,983$  °С, при этом  $G = 438,96$  т/ч.

Следующий пример показывает решение динамической задачи. Пусть по каким-то причинам (ухудшение теплоизоляционных свойств ограждающих конструкций, рост или снижение тепловыделения внутри зданий и т.п.) изменилось теплотребление абонентов.

Соответственно изменились температуры теплоносителя на выходах абонентов. Зная расходы и разности температур по формуле (2) можно определить новые  $Q_i$  и решить задачу (11).

Исходные данные модельной задачи – решение предыдущей задачи (вычисленные новый расход и перепады давления на дроссельных устройствах, которые обеспечивают  $T_{out} = 69,983$  °С). Кроме того, введем изменения в абоненте №32 (рис. 2): тепловая нагрузка выросла в 2 раза и составила величину 11,02 Гкал/ч. Сходящееся решение при заданном расходе теплоносителя получилось при температуре воды в обратной магистрали  $T_{out} = 57,359$  °С.

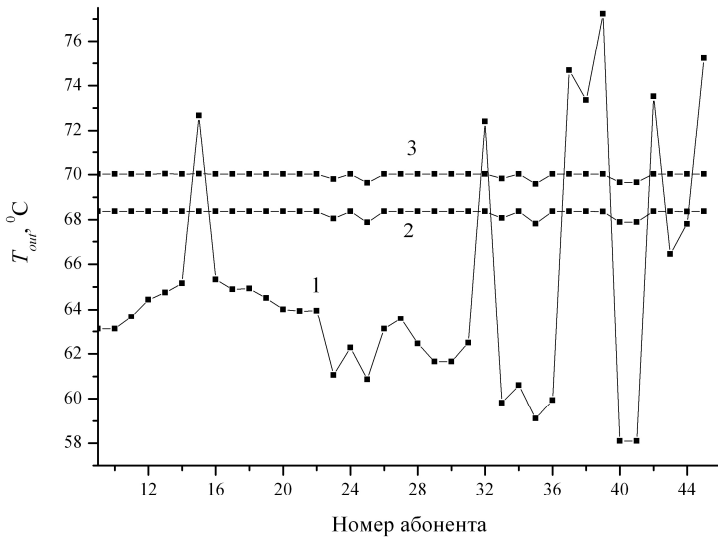


Рис. 6. Распределение температуры теплоносителя на выходе из абонентов: 1 – исходное распределение; 2 – решение задачи (9); 3 – решение задачи (11)

Результаты решения задачи оптимизации (11) представлены на рис. 7. Новый расход составил 533,438 т/ч, температура воды в обратной магистрали  $T_{out} = 70,029$  °С.

Как видно из рис. 7, на изменение нагрузки одного абонента отреагировала вся система: произошло изменение сопротивления всех дроссельных устройствах, максимальное изменение потери давления составило более 2 м вод. ст.

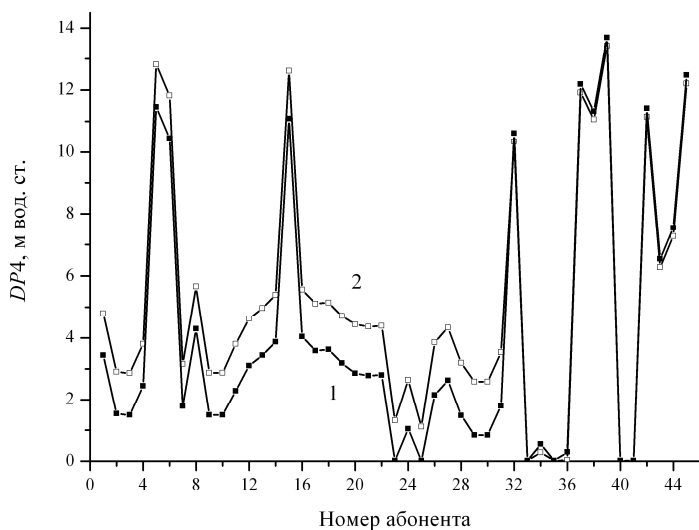


Рис. 7. Распределение перепадов давления на дроссельных устройствах абонентов: 1 – исходное распределение; 2 – реакция системы на изменение теплопотребления

## 5. Выводы

В работе показана возможность расчетной оптимизации тепловой сети как в случае сильной гидравлической разбалансировки сети, так и при изменениях тепловых нагрузок в процессе эксплуатации. Показано, что даже согласованный расход теплоносителя в тепловой сети с теплопотреблением не гарантирует получения оптимального одновременно для всех абонентов без изменения расхода теплоносителя в тепловой сети, и необходимо решение общей оптимизационной задачи.

Разработанная оптимизационная процедура позволяет проводить расчет характеристик регулирующих элементов и приводить тепловую сеть к оптимальным (проектным) параметрам, а также отслеживать изменение параметров тепловой сети и

возвращать их в оптимальное состояние за счет изменения характеристик регуляторов и общего расхода.

### Литература

1. АОКИ М. *Введение в методы оптимизации*. – М.: Наука, 1977. – 344 с.
2. БОГЛАЕВ Ю.П. *Вычислительная математика и программирование*. – М.: Высшая школа, 1990. – 544 с.
3. ДИРЕКТОР Л.Б., ЗАЙЧЕНКО В.М., МАЙКОВ И.Л., ФРИД С.Е. *Математическое моделирование и оптимизация разветвленных тепловых сетей* // *Новости теплоснабжения*. – 2002. – №5(21). – С. 36–38.
4. ИЗМАЙЛОВ А.Ф., СОЛОДОВ М.В. *Численные методы оптимизации*: Учеб. пособие. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 304 с.
5. СОКОЛОВ Е.Л. *Теплофикация и тепловые сети*: Учебник для ВУЗов. – 5-е изд. – М.: Энергоатомиздат, 1982. – 360 с.
6. ФОРСАЙТ Д., МАЛЬКОЛЬМ М., МОУЛЕР К. *Машинные методы математических вычислений*. – М.: Мир, 1980. – 280 с.

### METHODS OF THERMO-HYDRAULIC OPTIMIZATION AND MANAGEMENT OF HEAT SUPPLY NETWORKS

**Igor Maikov**, Joint Institute for High Temperatures of RAS, Moscow, professor (*maikov\_i@mail.ru*).

**Leonid Director**, Joint Institute for High Temperatures of RAS, Moscow, professor (*director@oivtran.ru*).

**Victor Zaitchenko**, Joint Institute for High Temperatures of RAS, Moscow, professor, head of a laboratory (*zaitch@oivtran.ru*).

*Abstract: The method is suggested to solve one of the most important problems in the field of effective heat supply both in the case of the strong hydraulic deregulation of a heating system (a static problem) and in the case of varying thermal loadings (a dynamic*



*problem). The numerical procedure is developed for heating system analysis and optimization, which allows solving heat-consumption regime optimization and control problems for considerably large heat networks. Both static and dynamic problems are shown to reduce to a single general nonlinear optimization problem. The optimization algorithm is built where goal function minimization is carried out in an iterative process using the method of coordinate-wise descent.*

Keywords: mathematical modeling, nonlinear optimization, minimization problems, numerical techniques, heat supply networks.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Н. Н. Бахтадзе*

*Уважаемые читатели! Обращаем Ваше внимание на выпущенный в 2010 году Институтом проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН тематический сборник статей «Сетевые модели в управлении». Подробная информация о Сборнике доступна на сайте [www.mtas.ru](http://www.mtas.ru).*