

УДК 681.5.011+681.5.013

ББК 22.18

## **СИНТЕЗ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ В ДИФFUЗИОННЫХ СИСТЕМАХ С МАРКОВСКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ<sup>1</sup>**

**Жилина Т. Е.<sup>2</sup>**

*(Арзамасский политехнический институт Нижегородского  
государственного технического университета им. Р.Е.  
Алексеева, Арзамас)*

*Рассматриваются стохастические системы, описываемые дифференциальными уравнениями Ито с марковскими переключениями. Предлагается параметрическое описание всех линейных стабилизирующих управлений со статической обратной связью по выходу, обеспечивающих экспоненциальную устойчивость в среднем квадратическом замкнутой системы. На основе этой параметризации получены достаточные условия стабилизации, которые позволяют разработать алгоритм нахождения матриц усиления статического и динамического регулятора с применением линейных матричных неравенств. Приводится пример решения задачи стабилизации перевернутого маятника при скачкообразном изменении массы и случайных вибрациях основания.*

Ключевые слова: стабилизация, обратная связь по выходу, диффузионные системы.

### **Введение**

В современных задачах управления широкое распространение получили многорежимные системы, режимы которых описываются стохастическим дифференциальным уравнением Ито, а переходы между ними – цепью Маркова. В отечественной

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 10-08-00843, 11-01-97025.

<sup>2</sup> Татьяна Евгеньевна Жилина, аспирантка (zhilina@apingu.edu.ru).

литературе модели таких объектов известны под названием «системы случайной структуры» [1], в западной используются термины «диффузионные системы с марковскими переключениями (скачками)» или «системы с переключаемой диффузией» [14]. Примерами могут служить склонные к отказам сложные производственно-технологические и энергетические системы, системы управления подвижными объектами и т.п. [9, 14]. Диффузионные модели с марковскими переключениями широко используются также при описании экономических процессов и в финансовой математике, для моделирования уровня спроса или производительности оборудования при планировании производства, для отслеживания изменений рыночных курсов и процентных ставок [14].

Основы исследования систем случайной структуры были заложены в цикле статей [4]. Результаты дальнейших исследований подведены в монографиях [2, 9, 14]. Широко изучались также дискретные модели [5, 8].

Несмотря на большое количество работ, для диффузионных систем с марковскими переключениями достаточно мало изученной является важная для теории и практики задача синтеза стабилизирующего управления с обратной связью по выходу. В работах [10, 11] разработаны метод и алгоритм синтеза стабилизирующего управления со статической обратной связью по выходу для диффузионных систем [10] и систем случайной структуры [11]. Для дискретных стохастических систем случайной структуры такая задача решалась в [12].

В данной работе подход [10, 11] развивается для класса диффузионных систем с марковскими переключениями. Предлагается параметрическое описание всех линейных стабилизирующих управлений со статической обратной связью по выходу, обеспечивающих экспоненциальную устойчивость в среднем квадратическом систем этого класса. На основе такой параметризации получены достаточные условия стабилизации, которые позволяют разработать алгоритм нахождения матриц усиления статического и динамического регулятора с применением линейных мат-

ричных неравенств. Приводится пример решения задачи стабилизации перевернутого маятника при скачкообразном изменении массы и случайных вибрациях основания.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим линейную систему, описываемую уравнением Ито с марковскими переключениями

$$(1) \quad dx_t = [A(r_t)x_t + B(r_t)u_t]dt + \sum_{l=1}^m \gamma_l(r_t)A_l(r_t)x_t dw_{lt},$$

$$y_t = C(r_t)x_t, \quad t \geq 0,$$

где  $x_t \in \mathbf{R}^n$  – вектор состояния;  $u_t \in \mathbf{R}^m$  – вектор входных переменных;  $y_t \in \mathbf{R}^k$  – вектор выходных переменных;  $A(r_t), A_l(r_t) (l = 1, \dots, m)$  – матрицы размеров  $n \times n$ ;  $B(r_t)$  – матрица размеров  $n \times m$ ;  $r_t$  – однородная марковская цепь с пространством состояний  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, \nu\}$  и матрицей интенсивностей переходов

$$P(\theta) = [P_{ij}(\theta)]_1^\nu = [\text{Prob}\{r(t + \theta) = j \mid r(t) = i\}]_1^\nu = \exp(\Pi\theta),$$

$0 \leq t \leq t + \theta$ ,  $\Pi = [\pi_{ij}]_1^\nu$ ,  $\pi_{ij} > 0$ , ( $i \neq j$ ),  $\pi_{ii} = -\sum_{j \neq i} \pi_{ij}$ ;  $w_{lt}$  ( $l = 1, \dots, m$ ) – стандартный винеровский процесс, определенный на полном вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  с естественной фильтрацией  $\mathcal{F}_t$ , порожденной процессом  $w$  до момента  $t$  включительно; начальные условия  $x(0) = x_0$  и  $r(0) = r_0$  – детерминированные; процессы  $w_t$  и  $r_t$  – независимы;  $\gamma_l(r_t) (l = 1, \dots, m)$  – положительные скаляры;  $C(r_t)$  – матрица размера  $k \times n$  имеющая полный ранг по строкам.

Далее для краткости будем обозначать  $F_i = F(r_t)$ ,  $A_i = A(r_t)$ ,  $B_i = B(r_t)$ ,  $C_i = C(r_t)$ ,  $A_{li} = A_l(r_t)$ , если  $r_t = i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ .

Закон управления зададим в виде динамической обратной связи по выходу:

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{x}_{ct} &= A_{ci}x_{ct} + B_{ci}u_t, & \text{если } r_t = i, i \in \mathbb{N}, \\ u_t &= C_{ci}x_{ct} + D_{ci}y_t, & \text{если } r_t = i, i \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

где  $x_{ct}$  – вектор состояния динамического регулятора;  $A_{ci}, B_{ci}, C_{ci}, D_{ci}$  – матрицы соответствующих размеров.

Введем в рассмотрение расширенный вектор состояния и объединим уравнения (1), (2) в виде:

$$(3) \quad dx_t = [\bar{A}_i \bar{x}_t + \bar{B}_i u_t] dt + \sum_{l=1}^m \gamma_{li} \bar{A}_{li} \bar{x}_t dw_{lt},$$

$$y_t = \bar{C}_i \bar{x}_t, \quad t \geq 0, \quad i \in \mathbb{N},$$

$$(4) \quad u_t = -F_i y_t, \quad i \in \mathbb{N},$$

где  $\bar{x}_t = [x_t, x_{ct}]$ ,  $\bar{A}_i, \bar{B}_i, \bar{C}_i, F_i$  определены следующим образом:

$$(5) \quad \bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

$$\bar{C}_i = \begin{bmatrix} C_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, F_i = - \begin{bmatrix} D_{ci} & C_{ci} \\ B_{ci} & A_{ci} \end{bmatrix}.$$

Для расширенной системы регулятор является статическим.

**Определение 1.** Решение  $x = 0$  системы (3) называется экспоненциально устойчивым в среднем квадратическом, если при любых начальных условиях в области  $x_t \in \mathbf{R}^n, r_t \in \mathbf{N}, 0 \leq t_0 \leq t$  существуют такие постоянные  $B > 0, \alpha > 0$ , что при всех  $t \geq t_0$  выполнено неравенство

$$M [ \| x(t) \|^2 | x_0, r_0 ] \leq B \| x_0 \|^2 e^{-\alpha(t-t_0)}.$$

Поставим задачу описать в параметрической форме все матрицы усиления в (4), при которых система (3) будет экспоненциально устойчива в среднем квадратическом (ЭУСК), и получить алгоритм вычисления матрицы усиления стабилизирующего регулятора  $F$ .

## 2. Параметризация стабилизирующих матриц усиления

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия параметризации всех матриц усиления стабилизирующих управлений со статической обратной связью по выходу. Она является обобщением результатов [10, 11] на диффузионные системы с марковскими переключениями

**Теорема 1.** *Матрица усиления  $F_i$ , обеспечивающая экспоненциальную устойчивость в среднем квадратическом системы (3) с управлением (4), существует тогда и только тогда, когда найдутся матрицы параметров  $Q_i = Q_i^T \geq 0$ ,  $R_i = R_i^T > 0$  и  $L_i$  такие, что*

$$(6) \quad F_i \bar{C}_i = R_i^{-1} [\bar{B}_i^T P_i + L_i],$$

где матрицы  $P_i = P_i^T > 0$  и  $L_i$  удовлетворяют системе квадратных матричных неравенств

$$(7) \quad \bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i - P_i \bar{B}_i R_i^{-1} \bar{B}_i^T P_i + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j + \\ + \sum_{l=1}^m \gamma_{li}^2 \bar{A}_{li}^T P_i \bar{A}_{li} + Q_i + L_i^T R_i^{-1} L_i < 0.$$

**Доказательство.** *Необходимость.* Пусть  $F_i$  – матрица усиления стабилизирующего управления. Тогда согласно [2] существует положительно определенное решение системы неравенств.

$$(8) \quad (\bar{A}_i - \bar{B}_i F_i \bar{C}_i)^T P_i + P_i (\bar{A}_i - \bar{B}_i F_i \bar{C}_i) + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j + \\ + \sum_{l=1}^m \gamma_{li}^2 \bar{A}_{li}^T P_i \bar{A}_{li} < 0,$$

очевидно, при этом найдутся матрицы  $Q_i = Q_i^T \geq 0$  и  $R_i = R_i^T > 0$  (возможно, достаточно малые) такие, что

$$(9) \quad (\bar{A}_i - \bar{B}_i F_i \bar{C}_i)^T P_i + P_i (\bar{A}_i - \bar{B}_i F_i \bar{C}_i) + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j + \\ + \sum_{l=1}^m \gamma_{li}^2 \bar{A}_{li}^T P_i \bar{A}_{li} + Q_i + (F_i \bar{C}_i)^T R_i F_i \bar{C}_i < 0.$$

Элементарными преобразованиями из (9) получим

$$(10) \quad \bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i + (F_i \bar{C}_i)^T R_i (F_i \bar{C}_i) - (F_i \bar{C}_i)^T \bar{B}_i^T P_i - \\ - P_i \bar{B}_i (F_i \bar{C}_i) + \sum_{l=1}^m \gamma_{li}^2 \bar{A}_{li}^T P_i \bar{A}_{li} + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j + Q_i < 0.$$

Обозначим

$$(11) \quad K_i = F_i \bar{C}_i - R_i^{-1} \bar{B}_i^T P_i$$

и перепишем (10) в следующем виде:

$$(12) \quad \bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i - P_i \bar{B}_i R_i^{-1} \bar{B}_i^T P_i + K_i^T R_i K_i + \\ + \sum_{l=1}^m \gamma_{li}^2 \bar{A}_{li}^T P_i \bar{A}_{li} + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j + Q_i < 0.$$

Определим

$$(13) \quad L_i = R_i K_i.$$

Учитывая (13) и (11), легко получим (6) и (7).

*Достаточность.* Пусть существуют матрицы  $P_i = P_i^T > 0$  и  $F_i$ , удовлетворяющие (6) и (7). Тогда матрицы  $L_i$  и  $K_i$  определяются по формулам (11) и (13). Из (7) с учетом (6) последовательно

получим

$$\begin{aligned}
 0 > \bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i - P_i \bar{B}_i R_i^{-1} \bar{B}_i^T P_i + \sum_{l=1}^m \gamma_{li}^2 \bar{A}_{li}^T P_i \bar{A}_{li} + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j + \\
 + Q_i + L_i^T R_i^{-1} L_i = (\bar{A}_i - \bar{B}_i F_i \bar{C}_i)^T P_i + P_i (\bar{A}_i - \bar{B}_i F_i \bar{C}_i) + \\
 + \sum_{l=1}^m \gamma_{li}^2 \bar{A}_{li}^T P_i \bar{A}_{li} + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j + Q_i + (F_i \bar{C}_i)^T R_i F_i \bar{C}_i.
 \end{aligned}$$

Из этого неравенства следует, что  $F_i$  – матрица усиления стабилизирующего управления.

Смысл сформулированной теоремы состоит в следующем. Теоретически матрицы  $F_i, P_i$  (стабилизирующую пару) можно было бы найти, решая систему билинейных матричных неравенств (8), но эти неравенства являются невыпуклыми и эффективные методы их решения неизвестны. Условия, заданные формулами (6) и (7), также являются невыпуклыми, но для них можно предложить эффективную выпуклую аппроксимацию в виде линейных матричных неравенств. Кроме того эти условия содержат свободные параметры в виде матриц  $Q_i$  и  $R_i$ , которые по смыслу аналогичны весовым матрицам в задаче о линейно-квадратичном регуляторе, что дает дополнительные возможности выбора при проектировании.

### 3. Выпуклые достаточные условия и алгоритм вычисления матрицы усиления

Предположим, что для некоторого скаляра  $\mu_i > 0$  и матриц параметров  $Q_i, R_i$  и  $L_i$  справедливо следующее неравенство

$$(14) \quad \begin{bmatrix} \mu_i Q_i & L_i^T \\ L_i & R_i \end{bmatrix} > 0,$$

и  $P_i = P_i^T > 0$  является решением обобщенных уравнений Риккати

$$(15) \quad \bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i - P_i \bar{B}_i R_i^{-1} \bar{B}_i^T P_i + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j + \\ + \sum_{l=1}^m \gamma_{li}^2 \bar{A}_{li}^T P_i \bar{A}_{li} + (1 + \mu_i) Q_i = 0.$$

Тогда, учитывая (7), имеем

$$\bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i - P_i \bar{B}_i R_i^{-1} \bar{B}_i^T P_i + \sum_{l=1}^m \gamma_{li}^2 \bar{A}_{li}^T P_i \bar{A}_{li} + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j + \\ + Q_i + L_i^T R_i^{-1} L_i < \bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i - P_i \bar{B}_i R_i^{-1} \bar{B}_i^T P_i + \\ (16) \quad + \sum_{l=1}^m \gamma_{li}^2 \bar{A}_{li}^T P_i \bar{A}_{li} + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j + (1 + \mu_i) Q_i = 0.$$

Далее, в соответствии с [13], необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (6) является выполнение равенства

$$(17) \quad [\bar{B}_i^T P_i + L_i](I - \bar{C}_i^+ \bar{C}_i) = 0,$$

где  $C_i^+$  – псевдообращение по Муру–Пенроузу. При этом единственное решение (6) определится по формуле:

$$(18) \quad F_i = R_i^{-1} [\bar{B}_i^T P_i + L_i] \bar{C}_i^+.$$

Таким образом, имеем следующее утверждение.

**Следствие 1.** Пусть для некоторого скаляра  $\mu_i > 0$  и матриц параметров  $Q_i = Q_i^T \geq 0$ ,  $R_i = R_i^T > 0$  система уравнений Риккати (15) имеет положительно определенное решение  $P_i = P_i^T$ , удовлетворяющее (14), (17) для некоторой матрицы  $L_i$ . Тогда закон управления (4) с матрицей усиления (18) обеспечивает ЭУСК системы (3).

В [6] показано, что решение задачи выпуклой оптимизации

$$\text{trace} \sum_{j=1}^N P_j \longrightarrow \max, \quad P_i = P_i^T > 0,$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i + \sum_{l=1}^m \gamma_{li}^2 \bar{A}_{li}^T P_i \bar{A}_{li} + \\ + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j + (1 + \mu_i) Q_i & P_i \bar{B}_i \\ \bar{B}_i^T P_i & R_i \end{bmatrix} \geq 0$$

совпадает с решением системы уравнений Риккати (16).

Основываясь на этом факте и выпуклых достаточных условиях следствия 1, можно предложить следующий алгоритм вычисления матрицы усиления.

**Алгоритм 1.**

1. Назначаем весовые матрицы  $Q_i = Q_0$ ,  $R_i = R$  исходя из принципов теории линейно квадратичного регулятора и задаем скаляр  $\mu_i > 0$ .

2. Решаем задачу оптимизации при ограничениях в виде линейных матричных неравенств относительно переменных  $P_i = P_i^T$  и  $L_i$ :

$$\text{trace} \sum_{j=1}^N P_j \longrightarrow \max, \quad P_i = P_i^T > 0,$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i + \sum_{l=1}^m \gamma_{li}^2 \bar{A}_{li}^T P_i \bar{A}_{li} + \\ + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j + (1 + \mu_i) Q_i & P_i \bar{B}_i \\ \bar{B}_i^T P_i & R_i \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$\begin{bmatrix} \mu_i Q_i & L_i^T \\ L_i & R_i \end{bmatrix} > 0, \quad \left[ \bar{B}_i^T P_i + L_i \right] (I - \bar{C}_i^+ \bar{C}_i) = 0.$$

3. Если эта система совместна, то вычисляем  $F_i$  по формуле (18).

4. *Проверка.* Если система линейных матричных неравенств относительно матриц  $S_i$

$$(\bar{A}_i - \bar{B}_i F_i \bar{C}_i)^T S_i + S_i (\bar{A}_i - \bar{B}_i F_i \bar{C}_i) + \sum_{l=1}^m \gamma_{li}^2 \bar{A}_{li}^T S_i \bar{A}_{li} + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} S_j < 0.$$

совместна, то  $F_i$  является искомой матрицей усиления стабилизирующего управления.

Необходимость шага проверки здесь обусловлена тем, что из-за дополнительных ограничений решение задачи оптимизации может не давать решение системы (16), но тем не менее, если выполнены условия монотонности левых частей (16) по переменным  $P_i$ , то решение системы неравенств

$$\begin{aligned} \bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i - P_i \bar{B}_i R_i^{-1} \bar{B}_i^T P_i + \sum_{l=1}^m \gamma_{li}^2 \bar{A}_{li}^T P_i \bar{A}_{li} + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j + \\ + Q_i + L_i^T R_i^{-1} L_i < \bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i - P_i \bar{B}_i R_i^{-1} \bar{B}_i^T P_i + \\ + \sum_{l=1}^m \gamma_{li}^2 \bar{A}_{li}^T P_i \bar{A}_{li} + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j + (1 + \mu_i) Q_i \geq 0. \end{aligned}$$

может быть стабилизирующим. Именно этот факт и устанавливает указанная проверка.

Определенную трудность в алгоритме представляет выбор весовых матриц. Далее предлагается возможная техника такого выбора. Она основана на том, что вычисляется начальное приближение матрицы усиления на основе решения вспомогательной детерминированной задачи с использованием пакета *MATLAB – HIFOO (H-Infinity Fixed-Order Optimization)* [7]. Пакет построен на основе гибридного алгоритма, объединяющего стандартные генетические алгоритмы и градиентные методы. *HIFOO* позволяет решать следующие задачи: стабилизации фиксированного порядка, одновременной стабилизации фиксированного порядка,  $H_\infty$ -оптимизации фиксированного порядка,  $H_2$ -оптимизации фиксированного порядка,

рованного порядка. После того как такая матрица найдена, можно найти весовые матрицы. На основе такого подхода получаем следующую модификацию алгоритма.

**Алгоритм 2.**

1. В качестве базового назначаем один из режимов функционирования системы. Для него вычисляем матрицу усиления  $F_0$  с использованием *HIFOO*, решая детерминированную задачу стабилизации.

2. Для базового режима находим матрицу замкнутой системы  $A_c = A + BF_0C$ , где  $A$ ,  $B$ ,  $C$  – матрицы, определяющие базовый режим.

3. Задаем весовую матрицу  $R$  и находим начальное приближение весовой матрицы  $Q_0$ , решая линейное матричное неравенство

$$H_0 = H_0^T > 0, \quad Q_0 = Q_0^T \geq 0$$

$$A_c^T H_0 + H_0 A_c + Q_0 + C^T F_0 R F_0 C < 0.$$

4. Назначаем весовые матрицы для всех режимов  $Q_i = Q_0$ ,  $R_i = R$ . Задаем скаляр  $\mu_i > 0$ .

5. Решаем задачу оптимизации при ограничениях в виде линейных матричных неравенств относительно переменных  $P_i = P_i^T$ :

$$\text{trace} \sum_{j=1}^N P_j \longrightarrow \max, \quad P_i = P_i^T > 0,$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i + \sum_{l=1}^m \gamma_{li}^2 \bar{A}_{li}^T P_i \bar{A}_{li} + \\ + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j + (1 + \mu_i) Q_i & P_i \bar{B}_i \\ \bar{B}_i^T P_i & R_i \end{bmatrix} \geq 0.$$

6. Решаем систему линейных матричных уравнений и неравенств относительно матрицы  $L_i$

$$\begin{bmatrix} \mu_i Q_i & L_i^T \\ L_i & R_i \end{bmatrix} > 0, \quad \left[ \bar{B}_i^T P_i + L_i \right] (I - \bar{C}_i^+ \bar{C}_i) = 0.$$

7. Если эта система совместна, то вычисляем  $F_i$  по формуле (18).

8. Проверка. Если система линейных матричных неравенств относительно матриц  $S_i$

$$(\bar{A}_i - \bar{B}_i F_i \bar{C}_i)^T S_i + S_i (\bar{A}_i - \bar{B}_i F_i \bar{C}_i) + \sum_{l=1}^m \gamma_{li}^2 \bar{A}_{li}^T S_i \bar{A}_{li} + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} S_j < 0.$$

совместна, то  $F_i$  является искомой матрицей усиления стабилизирующего управления.

#### 4. Пример

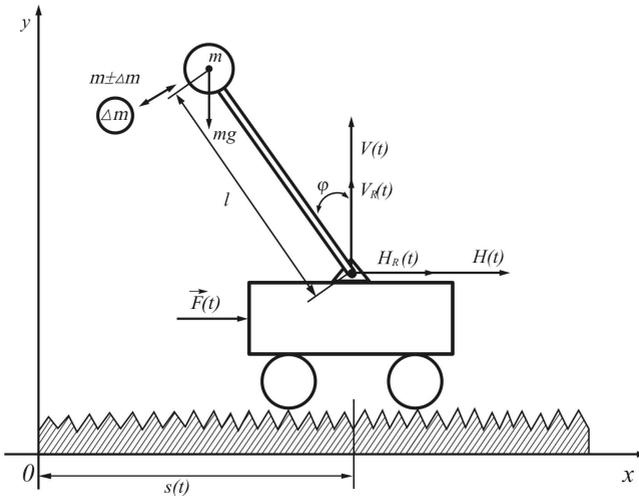


Рис. 1. Перевернутый маятник

В данном разделе на основе предложенного метода рассматривается задача стабилизации перевернутого маятника [3], который показан на рис. 1. Ось маятника закреплена на платформе, которая может перемещаться в горизонтальном направлении. Платформа приводится в движение небольшим двигателем, который

в момент времени  $t$  прикладывает к ней силу  $u(t)$ , являющуюся входной переменной системы. При движении платформа испытывает случайные вибрации, которые передаются на ось маятника.

Перемещение оси характеризуется функцией  $s(t)$ , а угловое отклонение маятника – функцией  $\varphi(t)$ . Масса маятника  $m$  пренебрежимо мала по сравнению с массой платформы  $M$ . К маятнику приложена сила  $mg$  в центре тяжести.  $H(t)$ ,  $V(t)$  – горизонтальная и вертикальная силы реакции у оси маятника. Вибрации оси моделируются белым шумом с составляющими  $H_R(t)$  и  $V_R(t)$ .

Математическая модель рассматриваемой системы имеет вид:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F}{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{g}{L'} & 0 & \frac{g}{L'} & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{L'M} & 0 & \frac{1}{L'M} & 0 \end{bmatrix} V_R(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{M} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} H_R(t),$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t),$$

где  $x = [s(t), \dot{s}(t), \varphi, \dot{\varphi}]^T$ ;  $g$  – ускорение свободного падения;  $L'$  – эффективная длина маятника:  $L' = \frac{J+mL^2}{mL}$ ;  $J$  – момент инерции относительно центра тяжести;  $L$  – расстояние между осью и центром тяжести.

Система имеет следующие числовые параметры:  $J = 0,006$  кг·м<sup>2</sup>,  $l = 0,47$  м,  $m = 1$  кг,  $\Delta m = 0,05$  кг,  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>,  $M = 1$  кг,  $L = 0,235$  м.

Задача состоит в стабилизации маятника при допущениях, что вибрации оси моделируются белым шумом. При этом масса груза может скачкообразно изменяться, принимая одно из трех возможных значений:  $m - \Delta m$ ,  $m$ ,  $m + \Delta m$ , что в сумме дает 3 возможных «режима» работы такой системы. Смена этих режимов

происходит в соответствии с изменением состояний марковской цепи (рис. 2).

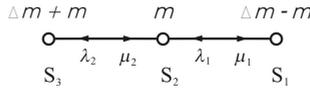


Рис. 2. Граф состояний для системы

Для графа, изображенного на рис. 2, уравнение Колмогорова имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & 0 \\ \lambda_1 & -\mu_1 - \lambda_2 & \mu_2 \\ 0 & \lambda_2 & -\mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{bmatrix}.$$

Интегрируя систему линейных дифференциальных уравнений с учетом начальных условий  $p(0) = (0, 1, 0)$  методом Рунге–Кутта, определяем распределение вероятностей системы в любой момент времени.

В результате вычислений с применением предложенного алгоритма были получены:

1) Весовая матрица  $Q_0$

$$Q_0 = 10^5 \begin{bmatrix} 1,61 & -0,03 & -0,64 & 0,02 & -0,40 & 0,10 \\ -0,03 & 0,04 & -0,01 & -0,26 & 0,03 & -0,04 \\ -0,65 & -0,01 & 5,43 & -0,01 & 0,23 & -1,21 \\ 0,02 & -0,03 & -0,01 & 2,55 & 0,43 & 0,03 \\ -0,40 & 0,02 & 0,23 & 0,43 & 4,51 & -2,06 \\ 0,10 & -0,04 & -0,19 & 0,03 & -2,06 & 0,98 \end{bmatrix}.$$

2) Матрицы обратной связи по выходу

$$F_1 = \begin{bmatrix} 875,9 & -174,6 & 42,1 & 44,6 \\ 112,0 & -320,4 & 792,7 & -350,6 \\ 358,8 & -873,2 & -342,5 & 198,6 \end{bmatrix},$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 972,7 & -186,8 & 33,1 & 49,2 \\ 112,0 & -326,6 & 791,0 & -349,8 \\ 390,1 & -905,1 & -344,8 & 199,0 \end{bmatrix},$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} 989,7 & -183,7 & 30,5 & 48,6 \\ 115,5 & -316,9 & 791,0 & -349,8 \\ 379,5 & -896,7 & -344,7 & 199,0 \end{bmatrix}.$$

На рис. 3 показаны графики переходных функций замкнутой системы в случае изменения ее состояний в соответствии с реализацией марковской цепи, представленной на рис. 4, и при отсутствии параметрических шумов.

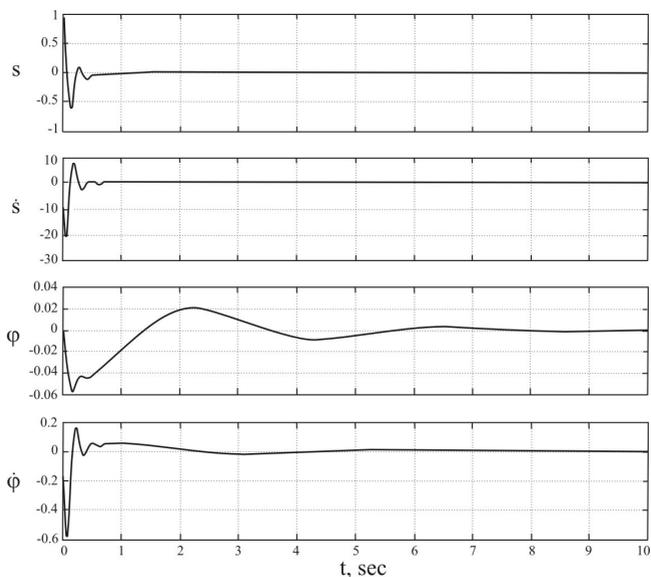


Рис. 3. Графики переходных функций замкнутой системы

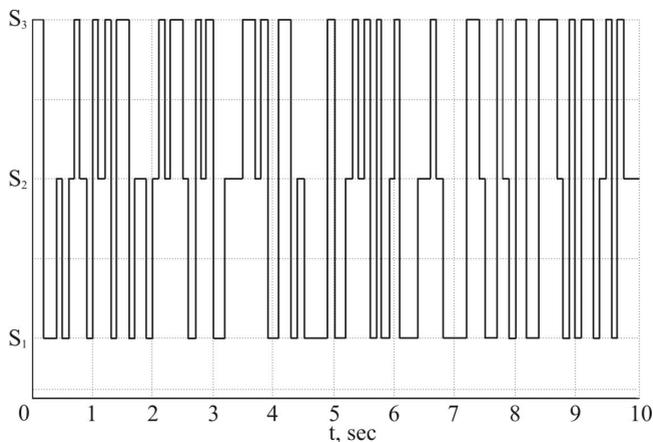


Рис. 4. Марковская цепь

В таблице 1 показаны результаты решения задачи в зависимости от интенсивности шума.

Из приведенной таблицы видно, что с возрастанием интенсивности шума норма матрицы усиления возрастает и при определенной интенсивности задача стабилизации становится неразрешимой с помощью указанного алгоритма. Вычисления проводились в среде *MATLAB* с применением пакетов *YALMIP* и *SEDUMI* при относительной погрешности  $\varepsilon = 1e - 7$ .

Таблица 1. Изменения интенсивности шума

интенсивность шума $\gamma$	матрица стабилизации $F_i$	время решения $t$ , сек.
0,01	$F_1 = \begin{bmatrix} 875,9 & -174,6 & 42,1 & 44,6 \\ 112,0 & -320,4 & 792,7 & -350,6 \\ 358,8 & -873,2 & -342,5 & 198,6 \end{bmatrix}$ $F_2 = \begin{bmatrix} 972,2 & -186,0 & 33,0 & 49,2 \\ 117,6 & -326,4 & 791,0 & -349,8 \\ 389,9 & -904,6 & -344,8 & 198,9 \end{bmatrix}$ $F_3 = \begin{bmatrix} 989,7 & -183,7 & 30,5 & 49,6 \\ 112,0 & -316,9 & 790,0 & -349,3 \\ 379,5 & -888,2 & -346,7 & 199,4 \end{bmatrix}$	1,6
0,1	$F_1 = \begin{bmatrix} 876,2 & -176,9 & 42,2 & 44,6 \\ 112,0 & -320,5 & 792,7 & -350,7 \\ 358,9 & -873,4 & -342,5 & 198,7 \end{bmatrix}$ $F_2 = \begin{bmatrix} 987,7 & -186,0 & 33,1 & 49,2 \\ 117,7 & -326,6 & 791,0 & -349,8 \\ 390,1 & -905,0 & -344,8 & 199,0 \end{bmatrix}$ $F_3 = \begin{bmatrix} 994,1 & -183,9 & 30,6 & 49,7 \\ 110,8 & -317,1 & 790,0 & -349,7 \\ 379,7 & -888,6 & -346,7 & 199,5 \end{bmatrix}$	2

продолжение таблицы 1

1	$F_1 = \begin{bmatrix} 998,7 & -178,4 & 43,6 & 44,1 \\ 123,0 & -334,2 & 792,2 & -349,7 \\ 381,0 & -901,1 & -343,5 & 200,1 \end{bmatrix}$ $F_2 = \begin{bmatrix} 1020,1 & -190,4 & 43,6 & 44,1 \\ 129,9 & -342,3 & 790,1 & -348,8 \\ 416,8 & -939,3 & -346,9 & 201,2 \end{bmatrix}$ $F_3 = \begin{bmatrix} 1002,3 & -187,9 & 35,4 & 48,1 \\ 127,4 & -339,0 & 790,0 & -348,9 \\ 409,0 & -929,7 & -346,7 & 201,1 \end{bmatrix}$	5
10	$F_1 = \begin{bmatrix} 11246,0 & -11800,6 & 132,3 & 21,2 \\ 2329,5 & -2503,2 & 774,3 & -318,0 \\ 3669,5 & -4043,0 & -422,2 & 276,0 \end{bmatrix}$ $F_2 = \begin{bmatrix} 15502,0 & -16071,5 & 119,4 & 28,2 \\ 2248,0 & -2397,3 & 755,7 & -311,3 \\ 3534,2 & -3869,5 & -450,0 & 286,6 \end{bmatrix}$ $F_3 = \begin{bmatrix} 14632,4 & -15200,7 & 122,0 & 27,0 \\ 2274,7 & -2427,0 & 758,1 & -311,9 \\ 3573,5 & -3913,1 & -446,2 & 285,0 \end{bmatrix}$	10,5
100	нет решения	нет решения

### Литература

1. КАЗАКОВ И.Е., АРТЕМЬЕВ В.М., БУХАЛЕВ В.А. *Анализ систем случайной структуры*. – М: Наука, 1993. – С. 270.
2. КАЦ И.Я. *Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры*. – Екатеринбург: Изд-во Урал.гос.акад.путей сообщения, 1998.
3. КВАКЕРНААК Х., СИВАН Р. *Линейные оптимальные системы управления*. – М: Мир, 1977.
4. КРАСОВСКИЙ Н.Н., ЛИДСКИЙ Э.А. *Аналитическое конструирование регуляторов в системах со случайными свойствами* // Автоматика и телемеханика. – 1961. – №9. – С. 732–745; №11. – С. 1273–1278.
5. ПАКШИН П.В. *Дискретные системы со случайными параметрами и структурой*. – М.:Наука, 1994. – С. 304.
6. AIT RAMI M., GHAOUI L.EL *LMI optimization for nonstandard Riccati equation arising in stochastic control* // IEEE Trans. Automat. Control. – 1996. – №41. – P. 1666–1671.
7. BURKE J.C., HENRION D., LEWIS A.S. AND OVERTON M.L. *HIFOO – A MATLAB Package for Fixed-Order Controller Design and H-infinity Optimization* // Proceedings of the IFAC Symposium on Robust Control Design, Toulouse, France, – 2006. – URL: [www.cs.nyu.edu/overton/software/hifoo](http://www.cs.nyu.edu/overton/software/hifoo).
8. COSTA O., FRAGOZO M., MARQUES R. *Discrete-Time Markov Jump Linear Systems*. – Springer, London, 2004.
9. MARITON M. *Jump linear systems in automatic control*. – Marcel Dekker, New York.
10. ПАКШИН П.В., ПЕАУЦЕЛЛЕ Д., ЗИЛИНА Т.ЕЕ. *Stabilization of linear systems with state dependent noise via output feedback and its application to robust control design* // Proceedings of the 14th International Conference

- on Methods and Models in Automation and Robotics, Miedzyzdroje, Poland, 2009.
11. PAKSHIN P.V., PEAUCELLE D., ZHILINA T.YE. *Parametrization and convex approximation approach to stabilization via output feedback* // Journal of Cybernetics and Informatics. – 2010. – P. 29–38. – URL: <http://www.ifac-papersonline.net/Detailed/41105.html>.
  12. PAKSHIN P.V., SOLOVIEV S.G. *Parametrization of static output feedback controllers for Markovian switching systems and related robust control problems* // Kybernetes. – 2009. – №48. – P. 1106–1120.
  13. SKELTON R.E., IWASAKI T., GRIGORIADIS K.M. *A unified algebraic approach to linear control design*. – Taylor & Francis, London, 1997.
  14. YIN G.G., ZHU C. *Hybrid Switching Diffusions: Properties and Applications*. – New York: Springer Verlag, 2010.

## **SYNTHESIS OF STABILIZING CONTROL IN DIFFUSION SYSTEMS WITH MARKOVIAN SWITCHING**

**Tatiana Zhilina**, Arzamas Polytechnic Institute of R.E. Alekseev,  
Nizhny Novgorod State Technical University, Arzamas,  
post-graduate student (zhilina@apingtu.edu.ru).

*Abstract: We consider stochastic systems modeled by Ito differential equations with Markovian switching, and propose the parametric description (parametrization) of all static output feedback stabilizing controllers. This controllers provide exponential stability in the mean square of the closed-loop system. Using this parametrization we obtain sufficient conditions of stabilization, which allow to develop an LMI-based algorithm for gain matrixes computation of both static and a dynamic regulators. This algorithm is applied to the solution of a stabilization problem of the inverted pendulum on the moving platform under conditions of step-like mass change and random vibration of the platform.*

Keywords: stabilization, output feedback, diffusion systems.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии П. С. Щербаковым*