УДК 62.50
ББК Ж 30

СТАБИЛИЗИРУЮЩЕЕ СЕТЕВОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИСКРЕТНЫМИ СИСТЕМАМИ В УСЛОВИЯХ ПОТЕРИ ПАКЕТОВ ДАННЫХ[1]

Жучков Р. Н.[2], **Пакшин П. В.**[3]
(*Арзамасский политехнический институт* (*филиал*)
Нижегородского государственного технического университета им. Р. Е. Алексеева)

Рассматривается линейная система, в которой объект управления и регулятор обмениваются информацией через сетевой канал связи. Решается задача стабилизации в условиях возможных потерь пакетов данных, которые моделируются марковской цепью. Рассматриваются случаи обратной связи по состоянию и по измеряемому выходу. В обоих случаях эффективно используется техника линейных матричных неравенств.

Ключевые слова: линейные дискретные системы, сетевое стабилизирующее управление, потери пакетов, марковская модель, линейные матричные неравенства.

Введение

В классической теории управления предполагается, что информация об измеряемых координатах объекта управления может быть мгновенно получена и мгновенно использована для формирования управляющего воздействия. Однако в последние годы получили широкое распространение системы, в которых способ обмена данными играет существенную роль. К таким относятся

---

[1] *Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 10-08-00843_а, 11-01-97025-р_поволжье_а.*

[2] *Роман Николаевич Жучков, аспирант,* (*roman_jkv@mail.ru*)

[3] *Павел Владимирович Пакшин, доктор физико-математических наук, профессор,* (*pakshinpv@gmail.com*).

системы управления удаленными объектами по беспроводным каналам с ограниченной пропускной способностью, системы управления движением в транспортных сетях и т. д. [8]

В связи с этим в настоящее время стала активно развиваться теория сетевого управления, посвященная исследованию систем управления, в которых объект управления и регулятор обмениваются информацией через сетевой канал связи с ограниченной пропускной способностью.

Необходимость учета информационных ограничений при использовании сетевых каналов вносит существенные особенности в решение задачи синтеза стабилизирующего управления с обратной связью [1, 8]. В самом деле, если скорость передачи данных по каналу недостаточна, задача управления при использовании этого канала неразрешима в принципе. Таким образом, возникает глобальная задача определения границ скорости передачи данных в информационных каналах систем сетевого управления. После того как эта задача будет решена, необходимо учесть эффекты запаздывания, квантования и потери пакетов в процессе передачи квантованных сигналов. Перечисленные эффекты могут привести к существенному ухудшению качества переходных процессов и даже к неустойчивости [9].

В данной работе рассматривается дискретная система с управлением через сетевой информационный канал с учетом только одного фактора – потери пакетов данных. Процесс потери пакетов моделируется марковской цепью. Ставится задача синтеза управления с обратной связью по выходу, обеспечивающую экспоненциальную устойчивость системы в среднем квадратическом.

При решении задач синтеза с учетом этого фактора в настоящее время используются различные подходы: в работе [6] используются идеи выпуклого анализа для решения билинейного матричного неравенства, из которого находится стабилизирующее управление; в [7] используются идеи оптимизации; в [5] задача синтеза управления с обратной связью по вектору состояния сводится к решению линейного матричного неравенства. Существующие результаты по синтезу управления с обратной связью по выходу не доведены до эффективных алгоритмов. В данной статье предлагается относительно простая идея искусственного разделения задач оценивания и управления для систем случайной структуры, которая сводит задачу синтеза стабилизирующего регулятора к решению линейных матричных неравенств.

1. Линейные системы с доступным измерению вектором состояния

Рассмотрим линейную дискретную систему, описываемую разностным уравнением:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \tag{1}$$

где x_k – n-мерный вектор состояния; u_k – m-мерный вектор управления. Закон управления формируется в виде обратной связи по состоянию

$$u_k = -Gx_k \tag{2}$$

и обмен информацией между объектом (1) и регулятором (2) осуществляется через сетевой канал связи, в котором может происходить потеря пакета данных (рис. 1). Предполагается, что потерянный пакет не может позднее придти ни на сторону объекта ни на сторону регулятора, т. е. происходит абсолютная потеря. Задача состоит в нахождении такой матрицы усиления G, при которой управление в (2) обеспечивает устойчивость замкнутой системы при указанных условиях потери пакетов данных. При

сделанных предположениях в каждый дискретный момент времени рассматриваемая система может находиться в двух структурных состояниях. В первом обмен информацией между объектом и регулятором осуществляется нормально, во втором пакет теряется либо при передаче на сторону объекта, либо при передаче на сторону регулятора. Будем считать, что в случае потери пакета управление на объект не подается и что переход из одного структурного состояния в другое описывается марковской цепью с известной стохастической матрицей. Таким образом, модель системы с учетом возможных потерь пакетов можно описать

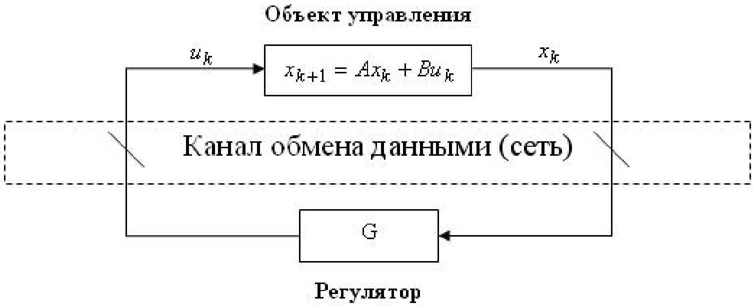

Рис. 1. Схема сетевой системы управления

следующими уравнениями

$$
\begin{aligned}
(3)\qquad & S_1: \quad x_{k+1} = Ax_k + Bu_k,\\
& S_2: \quad x_{k+1} = Ax_k.
\end{aligned}
$$

Структурные состояния S_1 и S_2 будем рассматривать как возможные состояния марковской цепи r_k, $k = 0, 1, ...$ с вероятностями перехода $p_{ij} = P[r_{k+1} = S_j \mid r_k = S_i]$. Относительно простая стратегия, приводящая к модели (3) представляется вполне разумной при достаточной надежности канала связи, даже если разомкнутая система неустойчива.

Поскольку модель (3) является стохастической, необходимо соответствующим образом ввести понятие устойчивости. Достаточно сильным и адекватным рассматриваемой задаче является понятие экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом (ЭУСК) [3].

Определение 1. *Система (3) называется экспоненциально устойчивой в среднем квадратичном, если существуют числа* $\Theta > 0$ *и* $0 < \zeta < 1$ *такие, что*

$$\mathrm{M}[\| x_k \|^2 | \, x_o = x] \leqslant \Theta \, \| x \|^2 \, \zeta^k,$$

где M *– оператор математического ожидания.*

Необходимые и достаточные условия ЭУСК дает следующее утверждение [3].

Теорема 1. *Для экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом системы (3) необходимо и достаточно, чтобы существовала квадратичная форма* $V(x,i) = x^{\mathrm{T}} H_i x,\ H_i = H_i^{\mathrm{T}} > 0,\ i = 1,2$*, такая, что*

$$\mathrm{M}[V(x_{k+1}, r_{k+1} \mid x_k = x, r_k = i)] - V(x,i) < 0,\ i = 1,2.$$

Будем искать управление (2) из условия ЭУСК системы (3). Применяя теорему 1, получим, что матрица усиления должна удовлетворять следующей системе матричных неравенств:

$$(A - BG)^{\mathrm{T}}(H_1 p_{11} + H_2 p_{12})(A - BG) - H_1 < 0 \tag{4}$$

$$A^{\mathrm{T}}(H_1 p_{21} + H_2 p_{22})A - H_2 < 0, \tag{5}$$

где H_1, H_2 – неизвестные симметричные положительно определенные матрицы; матрица G – искомая матрица усиления обратной связи.

Неравенство (4) может быть сведено к линейному умножением справа и слева на $X_1 = H_1^{-1}$ и заменой $X_2 = H_2, Y = GX_1$. Применяя теорему о дополнении Шура, получим следующую систему линейных матричных неравенств:

$$\begin{bmatrix} X_1 & \sqrt{p_{11}}\Gamma(X_1,Y)^{\mathrm{T}} & \sqrt{p_{12}}\Gamma(X_1,Y)^{\mathrm{T}} \\ \sqrt{p_{11}}\Gamma(X_1,Y) & X_1 & 0 \\ \sqrt{p_{12}}\Gamma(X_1,Y) & 0 & X_2 \end{bmatrix} > 0,$$

$$\begin{bmatrix} -X_2 & \sqrt{p_{21}}X_2 A^{\mathrm{T}} & \sqrt{p_{22}}X_2 A^{\mathrm{T}} \\ \sqrt{p_{21}}AX_2 & -X_1 & 0 \\ \sqrt{p_{22}}AX_2 & 0 & -X_2 \end{bmatrix} < 0,$$

где $\Gamma(X_1, Y) = AX_1 - BY$. Неизвестные матрицы в данной системе могут быть легко найдены средствами существующих пакетов решения линейных матричных неравенств [4].

2. Линейные системы с управлением по вектору измерений

В данном разделе рассмотрим случай, когда вместо вектора состояния прямому измерению доступен вектор

$$y_k = Cx_k. \tag{6}$$

В этом случае для построения стабилизирующего управления будем использовать обратную связь по оценке вектора состояния на основании доступных измерений.

Оценку вектора состояния будем искать в следующем виде:

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + K(y_k - C\hat{x}_k), \tag{7}$$

где K – неизвестная матрица. Стабилизирующее управление запишется как

$$u_k = -G\hat{x}_k. \tag{8}$$

В каждый момент времени замкнутая система может находиться в одном из следующих структурных состояний:

$$S1 : \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \tilde{x}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A - BG) & -BG \\ 0 & (A - KC) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \tilde{x}_k \end{bmatrix}, \tag{9}$$

$$S2 : \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \tilde{x}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \tilde{x}_k \end{bmatrix}, \tag{10}$$

где $\tilde{x}_k = x_k - \hat{x}_k$.

Примем далее гипотезу о возможности разделения переменных x и $\tilde{x}$ для того, чтобы получить отдельные соотношения для матриц усиления и наблюдателя. Эта гипотеза, справедливая для линейных систем постоянной структуры [2], в рассматриваем случае нуждается в проверке. После нахождения матриц K и G необходимо подставить их в (9)–(10) и проверить устойчивость полученной системы. Такой подход представляется вполне обоснованным с точки зрения эффективности использования аппарата линейных матричных неравенств.

После разделения переменных в системе (9)–(10) получим

$$S1 : \quad x_{k+1} = (A - BG)x_k, \tag{11}$$

$$S2 : \quad x_{k+1} = Ax_k, \tag{12}$$

$$S1: \quad \tilde{x}_{k+1} = (A - KC)\tilde{x}_k, \tag{13}$$

$$S2: \quad \tilde{x}_{k+1} = \tilde{x}_k. \tag{14}$$

Как и в предыдущем случае воспользуемся результатом теоремы 1. В результате получим следующие матричные неравенства для нахождения неизвестных матриц G и K:

$$(A - BG)^{\mathrm{T}}(H_1 p_{11} + H_2 p_{12})(A - BG) - H_1 < 0, \tag{15}$$

$$A^{\mathrm{T}}(H_1 p_{21} + H_2 p_{22})A - H_2 < 0; \tag{16}$$

$$(A - KC)^{\mathrm{T}}(\tilde{H}_1 p_{11} + \tilde{H}_2 p_{12})(A - KC) - \tilde{H}_1 < 0, \tag{17}$$

$$(\tilde{H}_1 p_{21} + \tilde{H}_2 p_{22}) - \tilde{H}_2 < 0. \tag{18}$$

Неравенство (15) умножим справа и слева на H_1^{-1}, а в неравенстве (17) заменим $\tilde{H}_1$ на $\tilde{H}_1 \tilde{H}_1^{-1} \tilde{H}_1$. После таких преобразований неравенства (15) и (17) примут следующий вид:

$$\begin{gathered}(AX_1 - BY)^{\mathrm{T}} X_1^{-1} p_{11}(AX_1 - BY_1) + \\ +(AX_1 - BY_1)^{\mathrm{T}} X_2^{-1} p_{12}(AX_1 - BY_1) - X_1 < 0,\end{gathered} \tag{19}$$

$$\begin{gathered}(\tilde{H}_1 A - Y_1 C)^{\mathrm{T}} \tilde{H}_1^{-1} p_{11}(\tilde{H}_1 A - Y_1 C) + \\ +(\tilde{H}_2 A - Y_2 C)^{\mathrm{T}} \tilde{H}_2^{-1} p_{12}(\tilde{H}_2 A - Y_2 C) - \tilde{H}_1 < 0,\end{gathered} \tag{20}$$

где $X_1 = H_1^{-1}$, $X_2 = H_2^{-1}$, $Y = X_1 G$, $Y_1 = \tilde{H}_1 K$, $Y_2 = \tilde{H}_2 K$.

Воспользуемся теоремой о дополнении Шура [4], чтобы привести неравенства (19)–(20) к линейным. В результате получим:

$$\begin{bmatrix} X_1 & p_{11}^{\frac{1}{2}}\Gamma(X_1, Y_1)^{\mathrm{T}} & p_{12}^{\frac{1}{2}}\Gamma(X_1, Y_1)^{\mathrm{T}} \\ p_{11}^{\frac{1}{2}}\Gamma(X_1, Y_1) & X_1 & 0 \\ p_{12}^{\frac{1}{2}}\Gamma(X_1, Y_1) & 0 & X_2 \end{bmatrix} > 0, \tag{21}$$

$$\begin{bmatrix} -X_2 & \sqrt{p_{21}} X_2 A^{\mathrm{T}} & \sqrt{p_{22}} X_2 A^{\mathrm{T}} \\ \sqrt{p_{21}} A X_2 & -X_1 & 0 \\ \sqrt{p_{22}} A X_2 & 0 & -X_2 \end{bmatrix} < 0, \tag{22}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_1 & p_{11}^{\frac{1}{2}}\Lambda(\tilde{H}_1, Y)^{\mathrm{T}} & p_{12}^{\frac{1}{2}}\Lambda(\tilde{H}_1, Y)^{\mathrm{T}} \\ p_{11}^{\frac{1}{2}}\Lambda(\tilde{H}_1, Y) & \tilde{H}_1 & 0 \\ p_{12}^{\frac{1}{2}}\Lambda(\tilde{H}_1, Y) & 0 & \tilde{H}_2 \end{bmatrix} > 0, \tag{23}$$

$$(\tilde{H}_1 p_{21} + \tilde{H}_2 p_{22}) - \tilde{H}_2 < 0, \tag{24}$$

где $\Lambda(\tilde{H}_1, Y) = \tilde{H}_1 A - YC$ и $\Gamma(X_1, Y_1) = AX_1 - BY_1$. Из линейных неравенств (21)–(24) теперь можно найти матрицы G и K для разделенной системы (11)–(14). Если при этом система (9)–(10) является устойчивой, то гипотеза о разделении справедлива и указанные матрицы являются искомыми матрицами усиления для исходной задачи. Для проверки устойчивости системы (9)–(10) подставим полученные матрицы в систему (9) и воспользуемся результатом теоремы 1 с функцией Ляпунова вида $V(x,i) = z_k^{\mathrm{T}} \hat{H} z_k$, где $z_k = \begin{bmatrix} x_k & \tilde{x}_k \end{bmatrix}$ и $\hat{H} = \hat{H}^{\mathrm{T}} > 0$ В итоге получим, что необходимо проверить совместность следующих линейных матричных неравенств:

$$p_{11} \tilde{A}^{\mathrm{T}} \hat{H}_1 \tilde{A} + p_{12} \tilde{A}^{\mathrm{T}} \hat{H}_2 \tilde{A} - \hat{H}_1 < 0, \tag{25}$$

$$p_{21} \hat{H}_1 < \hat{H}_2 (1 - p_{22}), \tag{26}$$

где

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} (A - BG) & -BG \\ 0 & (A - KC) \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Разрешимость полученных неравенств зависит от значений p_{ij}. Может оказаться, что при определенных значениях этих вероятностей построение стабилизирующего управления невозможно.

3. Пример

В качестве модельного примера была рассмотрена следующая система

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 1 \\ -3{,}1 & -2{,}7 & 1{,}2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 1 \\ 0{,}7 \end{bmatrix} u_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_k$$

Матрица P задавалась в следующем виде:

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} 1 - p_1 & p_1 \\ 1 - p_1 & p_1 \end{bmatrix}, \tag{28}$$

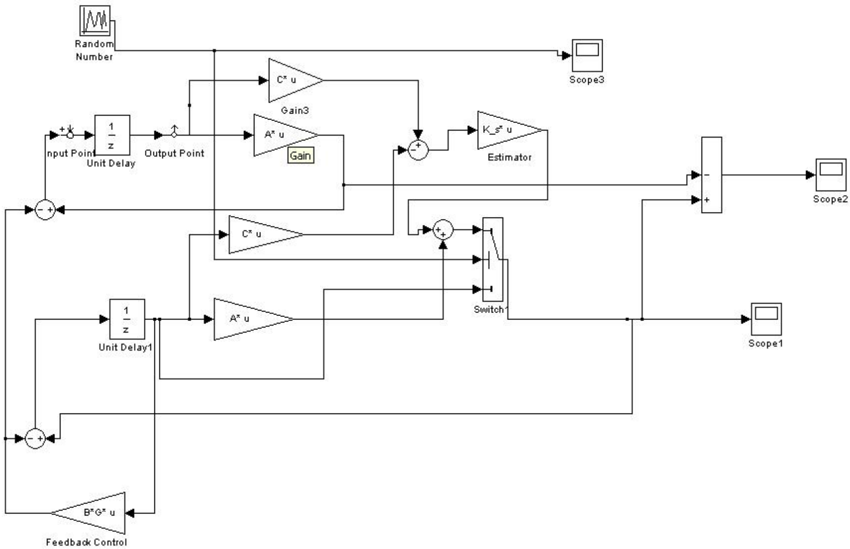

Рис. 2. Схема моделирования

т. е. предполагалось, что условные вероятности состояний S_1 и S_2 одинаковы.

Исходная система в разомкнутом состоянии является неустойчивой, вектор ее собственных значений равен $[1{,}3532; -0{,}1766 - 1{,}2028i; -0{,}1766 + 1{,}2028i]^{\mathrm{T}}$.

На рис. 2 представлена схема моделирования в *SIMULINK*. Рис. 3–5 содержат графики переходных процессов моделируемой системы.

Были рассмотрены значения условной вероятности потери пакета p_1 равные $0{,}1$, $0{,}2$ и $0{,}25$, для них получены следующие матрицы усиления G и K:

$$G_{0,1} = \begin{bmatrix} -0{,}3306 & 1{,}1745 & 0{,}7966 \end{bmatrix},$$

$$K_{0,1}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0{,}2475 & 0{,}9578 & 1{,}6791 \\ 0{,}7391 & 0{,}0103 & -2{,}8177 \end{bmatrix},$$

$$G_{0,2} = \begin{bmatrix} -0{,}2221 & 1{,}1789 & 0{,}7597 \end{bmatrix},$$

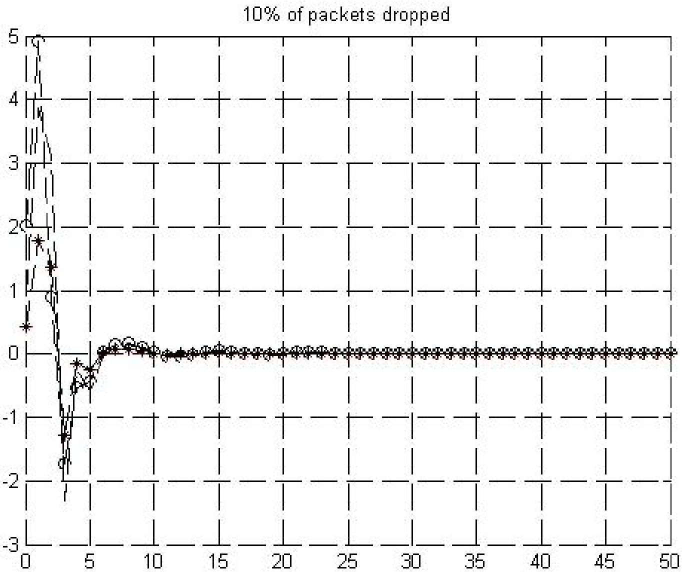

Рис. 3. Переходные процессы при вероятности потери пакета равной 0,1

$$K_{0,2}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0{,}2450 & 0{,}9514 & 1{,}6555 \\ 0{,}8811 & -0{,}0173 & -2{,}5508 \end{bmatrix},$$

$$G_{0,25} = \begin{bmatrix} 0{,}0596 & 0{,}9601 & 0{,}7801 \end{bmatrix},$$

$$K_{0,25}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0{,}2625 & 0{,}9287 & 1{,}6924 \\ 0{,}9747 & -0{,}0726 & -2{,}2852 \end{bmatrix},$$

которым соответствуют следующие собственные значения матрицы $(A - BG)$:

$$E_{0,1} = \begin{bmatrix} 0{,}3455 - 0{,}5906i & 0{,}3455 + 0.5906i & -0{,}0577 \end{bmatrix},$$

$$E_{0,2} = \begin{bmatrix} 0{,}5375 - 0{,}4708i & 0{,}3455 + 0{,}5906i & -0{,}2305 \end{bmatrix},$$

$$E_{0,25} = \begin{bmatrix} 0{,}3326 - 0{,}8141i & 0{,}3326 + 0{,}8141i & -0{,}0012 \end{bmatrix},$$

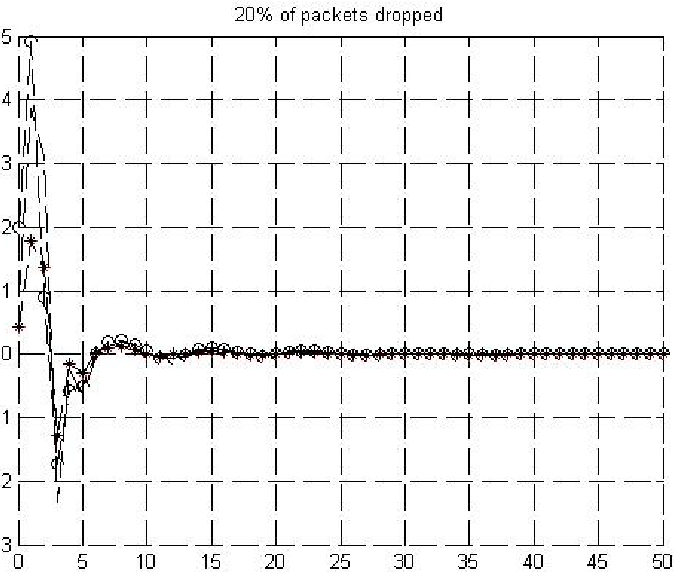

Рис. 4. Переходные процессы при вероятности потери пакета равной 0,2

и матрицы $(A - BK)$:

$$E_{0,1} = \begin{bmatrix} 0{,}2873 & -0{,}0247 & 0{,}0003 \end{bmatrix},$$

$$E_{0,2} = \begin{bmatrix} 0{,}2809 & 0{,}0346 & 0{,}0013 \end{bmatrix},$$

$$E_{0,25} = \begin{bmatrix} 0{,}2093 & 0{,}0541 - 0{,}0751i & 0{,}0541 + 0{,}0751i \end{bmatrix}.$$

С увеличением условной вероятности потери пакета собственные значения замкнутой системы все более смещаются к границе устойчивости. При этом переходные процессы становятся более колебательными и увеличивается их время (рис. 3–5).

При условной вероятности потери пакета данных более 0,25 матричные неравенства (21)–(24) становятся несовместными, и система не может быть стабилизирована в рамках принятой структуры управления.

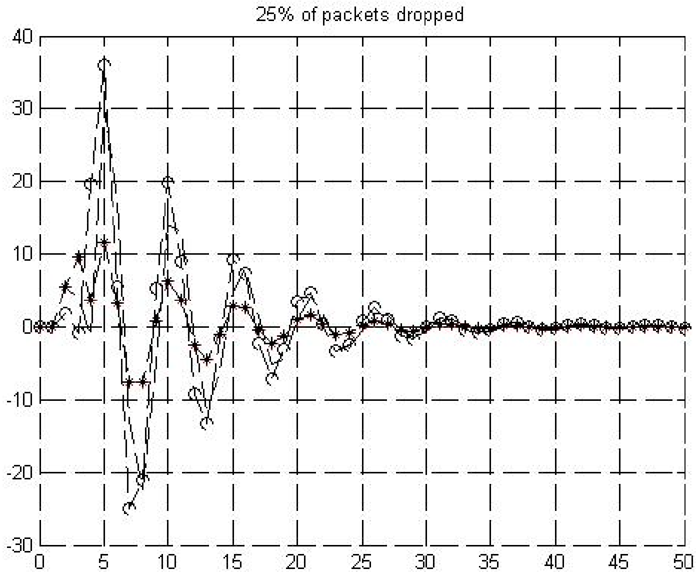

Рис. 5. Переходные процессы при вероятности потери пакета равной 0,25

Литература

1. АНДРИЕВСКИЙ Б.Р., МАТВЕЕВ А.С., ФРАДКОВ А.Л. *Управление и оценивание при информационных ограничениях: к единой теории управления, вычислений и связи (обзор)* // Автоматика и телемеханика. – 2010. – №4. – С. 34–99.
2. ОСТРЕМ К.Ю. *Введение в стохастическую теорию управления.* – М.: Мир, 1973.
3. ПАКШИН П.В. *Дискретные системы со случайными параметрами и структурой*. – М.: Физматлит, 1994.
4. ЧУРИЛОВ А.Н., ГЕССЕН А.В. *Исследование линейных матричных неравенств. Путеводитель по программным*

пакетам. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2004.

5. HONGO S., LI Y., ZHANG W. *Stabilization of Networked Control Systems with Communication Constraints and Packet Dropouts* // 48th IEEE Conference on Decision and Control. – 2009. – P. 7936–7941.
6. DAČIČ D., NEČSIČ D. *Quadratic stablization of linear networked control systems via simultaneous protocol and controller design* // Automatica. – 2007. – Vol. 43. – P. 1145–1155.
7. NILSSON J., BERNHARDSSON B. *LQG Control Over a Markov Communication Network* // Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control. – 1997. – Vol. 5. – P. 4586–4591.
8. ZAMPIERI S. *Trends in Networked Control Systems* // 17th IFAC World Congress (IFAC'08). – 2008. – P. 2886-2894.
9. ZHANG W., BRANICKY M., PHILIPS S. *Stability of Networked Control Systems* // IEEE Control Systems Magazine. – 2001. – P. 84–99.

STABILIZING NETWORKED CONTROL OF LINEAR DISCRETE-TIME SYSTEMS WITH PACKET DROPOUTS

Roman Zhuchkov,post-graduate student (roman_jkv@mail.ru), **Pavel Pakshin**, Dr.Sci., professor, Arzamas Polytechnic Institute of R.E. Alekseev, Nizhny Novgorod State Technical University, 19, Kalinina Street, Arzamas, 607227, Russia, (pakshinpv@gmail.com).

Abstract: For a linear system where a plant and a regulator communicate over a network a stabilization problem is solved in the presence of possible packet dropouts. Dropouts are modeled with a Markovian chain. Cases of state-based and output-based feedback are studied. In both cases LMI technique proved to be efficient.

Keywords: linear discrete systems, networked stabilizing control, packet dropouts, Markovian model, linear matrix inequalities.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А. П. Курдюковым