УДК 519.816
ББК 22.18

СНИЖЕНИЕ ЗАТРАТ НА ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ЦЕННОСТИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕШАЮЩИХ ПРАВИЛ ТЕОРИИ ВАЖНОСТИ КРИТЕРИЕВ ПО СРАВНЕНИЮ С ТРАДИЦИОННЫМ ПОДХОДОМ ТЕОРИИ ПОЛЕЗНОСТИ

Салтыков С. А.[1]
(*Учреждение Российской академии наук Институт проблем управления РАН, Москва*)

По результатам вычислительного эксперимента использование решающих правил теории важности критериев позволяет снизить затраты времени на построение функции ценности примерно в 2–5 раз по сравнению с традиционным подходом теории полезности. Для отбора из двух вариантов на основании двух критериев доказана теорема, определяющая количественно, во сколько раз при использовании теории важности критериев снижается доля случаев, когда нужно строить функцию ценности.

Ключевые слова: многокритериальный анализ решений, теория важности критериев, функция ценности, снижение затрат, имитационное моделирование.

1. Введение

Решать многокритериальные задачи можно разными методами: методом теории полезности (с построением функции полезности или ценности) [3], теории важности критериев [4], методом взвешенной суммы.

[1] *Сергей Анатольевич Салтыков, младший научный сотрудник* (*ssaltykov@mail.ru*).

Разграничение терминов «полезность» и «ценность» требует пояснения. Согласно [12, с. 266], разделение концептов ценности и полезности было введено Кини и Райфа в 1976 году и с тех пор основательно укоренилось в литературе: было предложено использовать термин «функция полезности» для случаев принятия решения в условиях риска и «функция ценности» для порядкового сравнения (*ordinal comparisons*). Уже здесь видна некая условность введенного разделения, так как ситуации делятся не по одному основанию, а по разным на «рисковые» и «порядковые». В дальнейшем, согласно [12, с. 293], такое разделение привело к тому, что теперь фактически есть три различных метода, базирующихся на разных исходных допущениях (аксиоматике): метод порядковой (ординальной) аддитивной функции ценности, метод измеримой (*measurable*) аддитивной функции ценности и метод, использующий функцию полезности. Последний используется исключительно для принятия решений в условиях риска и не может быть применен в безрисковом случае [12, с. 267], это несмотря на то, что существует очень большое число классов многокритериальных задач, где нет предположений о риске [12, с. 267], что говорит об ограниченности применения *MAUT* (*multiattribute utility theory* – многокритериальная теория полезности).

Идея *MAVT* (*multiattribute value theory* – многокритериальная теория ценности), куда входит использование порядковой и измеримой функции ценности, состоит в следующем. Предполагается, что существует ряд критериев, которые ЛПР учитывает при отборе из множества вариантов принятия решений, и характер влияния этих критериев в их взаимосвязи на конечное решение ЛПР неясен и сложен. Тогда может существовать способ не определять характер этой взаимосвязи в явном виде: если эти критерии удовлетворяют определенным условиям, можно построить некую специфическую функцию в аддитивном виде, называемую функцией ценности, большим значениям которой соответствуют более предпочтительные варианты, а меньшим – менее предпочтительные. Специфичность этой функции заключается в том, что, в общем случае, эта ординальная функция ценности напрямую не связана с «силой» предпочтения ЛПР, именно поэтому значения ординальной функции ценности считаются измеренными в шкале порядка (следовательно, в частности, их нельзя делить друг на друга). С измеримой аддитивной функцией ценности принципиально ситуация такая же с той лишь разницей, что условия её существования строже, но если она существует, то над ее значениями допустим более широкий диапазон действий, так как она является измеренной в шкале интервалов. Построение функции ценности является весьма сложным [12, с. 275], утомительным [12, с. 278] и громоздким [12, с. 293], поэтому если проверка условий существования функции ценности и ее построение является более легким, чем определение характера взаимосвязанного влияния критериев на конечный отбор, то *MAVT* имеет смысл использовать. Если же из специфики предметной области характер этой взаимосвязи виден достаточно ясно, то в использовании специфической функции в аддитивном виде, которая не соотносится в содержательном плане с «силой» предпочтения ЛПР, нет смысла. Как видим, и в основе *MAVT* лежат довольно сильные допущения, которые существенным образом ограничивают класс ситуаций, к которым целесообразно этот метод применять. В [12, с. 293] также отмечается, что в методе анализа иерархий (AHP), считается, что «сила» предпочтения ЛПР может быть оценена прямо или косвенно экспертом или аналитиком в шкале отношений. Этот подход, применяемый в методе анализа иерархий, не покрывается полностью ни *MAUT*, ни *MAVT*, так как не использует их вышеперечисленных допущений, и, кроме того, распространяется на важные классы прикладных задач, не покрываемых *MAUT* и *MAVT*. Парадоксально, но этот подход к оценке «силы» предпочтений ЛПР, применяемый в широко распространенном методе анализа иерархий, сам по себе никак не именуется.

Видимо, именно поэтому за пределами МКАР сформировалась другая линия исследований, в рамках которой функцией полезности называется не то же, что и в МКАР. Так, в институтском учебнике по теории управления организационными системами [2, с. 30] читаем: «Предположим, что предпочтения этого субъекта описываются *функцией полезности* $f(y): A \to R^1$ (или целевой функцией, функцией предпочтения – будем использовать эти термины как синонимы), которая отображает множество его *действий* (альтернатив) A на числовую ось R^1». В рамках этого подхода «сила» предпочтений ЛПР определяется непосредственно (без введения специфических функций и предположений о риске) и является синонимом полезности, а возможно, и ценности. Идея этого подхода предельно проста: изучать влияние не просто самого значения величины (скажем, в килограммах или миллиметрах) на принятие решения ЛПР, а «полезности» значения этой величины (то есть, «полезности» этих килограммов и миллиметров).

Не имея прямой необходимости базироваться на исходных допущениях *MAUT* или *MAVT*, солидаризуемся в данной работе с последним описанным подходом и будем считать ценность, полезность и «силу» предпочтений ЛПР синонимами (в отличие от [12, с. 266], где ценность и полезность выступают частными случаями «силы» предпочтения). Еще раз подчеркнем, что использование такого подхода в МКАР не является новшеством (он «зашит» в метод анализа иерархий), но по стечению обстоятельств до сих пор не имеет в МКАР адекватного устоявшегося названия (встречаются «вынужденные» именования этой «силы» предпочтения, которая не есть функция ценности, например – «*true preferences*», «*true preference function*» [12, с. 276]).

Из всего синонимического ряда в связи с подходом, теорией в название данной работы вынесено словосочетание «теория полезности», так как оно, во-первых, соотносится с определением функции полезности, данным в [2, с. 30], а во вторых, более знакомо и интуитивно понятно специалистам за пределами МКАР, так как словосочетание «теория ценности» не является употребительным. С другой стороны, в названии работы фигурирует именно «функция ценности», ввиду того, что функция ценности, в том смысле, как она употребляется в настоящей работе, может быть интерпретирована как аддитивная измеримая функция ценности, и в то же время этот термин свободен от ассоциаций с риском.

Итак, в работе [10] были проанализированы подход к решению многокритериальной задачи с построением функции ценности и метод взвешенной суммы, и было показано, что доля случаев, когда использование метода взвешенной суммы может привести к ошибочному отбору из множества вариантов, весьма высока – может достигать 35–40%.

Поясним, что подразумевается под ошибочным отбором из множества вариантов. В метод взвешенной суммы «зашито» неявное предположение, что предпочтения ЛПР равномерно растут вдоль шкалы, что в действительности не всегда верно. Поэтому может сложиться ситуация, когда у некоторого варианта средневзвешенное больше других, однако он не является наилучшим, так как его интегральная ценность (определенная с помощью функции ценности, отражающей неравномерный рост предпочтений) окажется меньше интегральной ценности другого варианта. В этом случае отбор варианта с наибольшим средневзвешенным, но не с самой большой интегральной ценностью будет ошибочным отбором варианта.

Согласно проведенному вычислительному эксперименту [10], эта доля ошибочных отборов при использовании метода взвешенной суммы не опускается ниже полутора процентов. Если из специфики предметной области известно, что «цена» одной такой ошибки значительна, то, по-видимому, придется использовать методы, корректно учитывающие характер роста предпочтений ЛПР при движении вдоль шкалы. Например, методы теории полезности или методы теории важности критериев. Поскольку построение функции ценности – всегда весьма трудоемкая операция, актуальным становится снижение доли случаев, когда придется строить функцию ценности. В работе [10] показано, что использование решающих правил теории важности критериев позволяет определять наилучший вариант, не строя функцию ценности примерно в 39–66% случаев. В данной работе мы пойдем дальше и выясним, во сколько раз использование теории важности критериев позволяет снизить затраты времени на построение функции ценности по сравнению с традиционным подходом теории полезности. На наш взгляд, количественная оценка снижения затрат времени будет еще более способствовать технико-экономическому обоснованию применения решающих правил теории важности критериев. В данной работе анализируется класс ситуаций, когда варианты оцениваются по нескольким критериям, имеющим общую балльную шкалу.

Работа является продолжением и развитием исследований [1, 7, 8, 9, 10].

2. Описание используемой многокритериальной модели

Многокритериальная модель, рассматриваемая в статье, может быть представлена следующим образом:

(1) $<S, K_1, ..., K_m, R>$,

где S – это множество вариантов решений (стратегий, планов, альтернатив и т.д.), далее называемое множеством вариантов; $K_1, ..., K_m$ – критерии (целевые функции и т.д.); R – отношение нестрогого предпочтения.

Поясним представленную модель (1). Каждый вариант s из множества S всех (данных) вариантов характеризуется значениями $m \geq 2$ критериев K_i. Под критерием K_i мы понимаем функцию, определенную на множестве S и принимающую значения из множества X_i, называемого шкалой (а также множеством оценок, шкальных градаций, значений критериев). Без ограничения общности будем считать, что все оценки выражены в численном виде и большие значения предпочтительней меньших. Таким образом, каждый вариант s характеризуется значениями $K_i(s)$ всех критериев, формирующих вектор оценок этого варианта, или его векторную оценку $x(s) = (K_1(s), ..., K_m(s))$. Следовательно, варианты сравниваются по предпочтительности посредством сопоставления их векторных оценок. Множество всех векторов оценок $X = X_1 \times ... \times X_m$. Мы предполагаем далее, что критерии являются однородными, т. е. имеют одинаковую (общую) шкалу $X_0 = X_1 = ... = X_m$ (так что $X = X_0^m$); более того, если критерий K_j заменить на $x(K_j)$, где x – некоторое допустимое преобразование, определяемое типом шкалы, то и все остальные критерии K_i следует заменить на $x(K_i)$. Примем также, что множество X_0 конечно: $X_0 = \{1, ..., q\}$. Элементы этого множества будем называть шкальными градациями.

Предпочтения ЛПР моделируются отношением предпочтения R на X: xRy означает, что вектор оценок x не менее предпочтителен, чем y. Отношение R порождает отношения безразличия I и (строгого) предпочтения P: xIy имеет место, когда справедливо xRy и yRx; xPy выполнено, когда верно xRy и неверно yRx.

В данной работе рассматриваются отношения нестрогого предпочтения Парето P^0; отношение предпочтения количественной важности критериев с порядковой шкалой R^{Θ} [5] и отношение предпочтения со шкалой первой порядковой метрики при замедлении роста предпочтений вдоль шкалы $R^{\Theta\&\mathrm{D}}$ [6].

Поясним представленные отношения предпочтения. Отношение R^{Θ} определяет более предпочтительный вариант на основании информации о значении критериев для данных вариантов и важности критериев. Стоит подчеркнуть, что при этом не делается никаких предположений о характере роста предпочтений ЛПР при движении от меньших шкальных градаций к большим. В теории важности критериев разработаны решающие правила [5], позволяющие определить более предпочтительный вариант из двух на основании информации лишь о значении критериев для этих вариантов и важности критериев, или констатировать, что этой информации недостаточно для определения более предпочтительного из них. В последнем случае говорят, что варианты несравнимы по отношению предпочтения R^{Θ}.

Отношение $R^{\Theta\&\mathrm{D}}$ определяет более предпочтительный вариант на основании информации о значении критериев для данных вариантов, важности критериев и информации о «затухающем» характере роста предпочтений ЛПР при движении от меньших шкальных градаций к большим. Стоит подчеркнуть, что «сила» «затухания» роста предпочтений никак не ограничивается и не задается, известно лишь, что затухание роста существует. В теории важности критериев разработаны решающие правила [6], позволяющие определить более предпочтительный вариант из двух на основании информации о значении критериев для этих вариантов, важности критериев и информации, что предпочтения растут «с затуханием», или констатировать, что этой информации недостаточно для определения более предпочтительного из них. В последнем случае говорят, что варианты несравнимы по отношению предпочтения $R^{\Theta\&\mathrm{D}}$.

Информацию о количественной важности критериев будем использовать в форме значений важности критериев – чисел β_i, $1 \le i \le m$, так как это более удобно для целей проводимого вычислительного эксперимента. Обобщенную (интегральную) функцию ценности будем задавать в аддитивном виде, сопоставляя каждой шкальной градации k её ценность $v(k)$ (критерии предполагаются однородными, т.е. у них одна общая шкала).

Необходимо сделать некоторые пояснения относительно целесообразности исследования многокритериальных задач с однородными критериями. Когда аналитик сопоставляет по предпочтительности два варианта, он или делает это напрямую, определяя замещения, или опосредованно, сводя предпочтительности этих двух исходных вариантов к предпочтительности (или предпочтительностям) некого промежуточного объекта (или объектов) и сопоставляет уже последние. Делается это тогда, когда сравнение исходных вариантов (альтернатив) оказывается проблематичным для ЛПР, отчасти из-за того, что они с познавательной точки зрения являются «слишком разными», слишком далекими друг от друга семантически для их прямого сопоставления через определение замещений. Тогда аналитик вынужден предложить ЛПР оценивать по предпочтительности некие «промежуточные» объекты, к которым могут быть сведены исходные варианты, тем самым несколько «сближая» изначально слишком (для использования замещений) семантически «далекие» варианты. Такими «промежуточными объектами» могут быть значения обобщенных критериев, а также варианты (альтернативы), у которых исходные шкалы критериев, по которым они изначально оценивались, сведены к одной общей шкале (т.е. варианты теперь сравниваются по однородным критериям).

Таким образом, получается, что для альтернатив, условно говоря, семантически близких, имеет смысл определять замещения для сравнения их по предпочтительности, а для семантически далеких одним из способов их некоторого «сближения» (для повышения адекватности сравнения по предпочтительности) является сведение критериев к общей шкале (к однородным критериям). В этом свете оказывается, что класс многокритериальных задач с однородными критериями является весьма обширным и представительным, так как выступает адекватным подходом для сравнения семантически неблизких альтернатив. Поэтому мы считаем, что исследование в данной работе многокритериальных задач именно с однородными критериями не является сильным сужением сферы применимости её выводов.

Для большей ясности необходимо привести пример: такой подход к разграничению применения методов многокритериального отбора с определением замещений и методов решения многокритериальных задач с однородными критериями был использован в работе [11]. Там эти два подхода используются на разных этапах многокритериальной процедуры отбора прогнозных экспертных методов. Сначала производится отбор между различными экспертными методами, а затем на следующем этапе процедуры отбор между различными разновидностями экспертных методов. Выбирая между содержательно столь различными методом Дельфи и, скажем, методом морфологического анализа, ЛПР сложно определять замещения: непросто сказать, насколько прирост быстроты метода Дельфи по сравнению с морфологическим анализом может компенсировать его (Дельфи) меньшую вероятность (возможность) получения правильного ответа. Для ЛПР проще и адекватнее оказывается привести критерии быстроты и возможности правильного решения, так сказать, к общему знаменателю – свести критерии к однородным по определенным правилам и решать многокритериальную задачу с однородными критериями. Здесь дополнительная операция, выполняемая аналитиком, – сведение критериев к однородным – позволяет компенсировать изначальное содержательное (семантическое) «расстояние» между непохожими Дельфи и морфологическим анализом.

Напротив, когда на следующем этапе многокритериальной процедуры производится отбор, скажем, между разновидностями метода Дельфи – Дельфи I и Дельфи II, то здесь имеет смысл определять замещения и не сводить критерии к однородным, так как эти разновидности во многом похожи, близки друг другу. Аналитик/ЛПР сможет оценить, насколько выгоды от использования многоточечной экспертной оценки, «зашитой» в одну из разновидностей Дельфи, могут компенсировать некоторую сложность ее применения.

Еще раз подчеркнем, что в свете вышеописанного мы считаем, что многокритериальные задачи с однородными критериями покрывают весьма обширный класс задач, и использование однородных критериев в вычислительном эксперименте и аналитических выкладках несильно сужают сферу применимости практических выводов данной статьи.

3. Описание вычислительного эксперимента с использованием отношений предпочтения P^0, R^{Θ}, $R^{\Theta\&D}$ и его результатов

Итак, проведем вычислительные эксперименты для получения ответов на вопросы, поставленных во введении. Сначала исследуем случай, когда используется отношение предпочтения Парето. В ходе проведения нового имитационного моделирования (вычислительного эксперимента) было решено 64 миллиона случайно сгенерированных многокритериальных задач. Вычислительный эксперимент строился следующим образом. Фиксировалась размерность многокритериальной задачи некоторой размерности (например, 7 вариантов и 5 критериев). Генератор случайных чисел выдавал балльные векторные оценки для каждого из вариантов. Баллы использовались от 2 до 5 по аналогии со школьными оценками, понятными и знакомыми большинству ЛПР[1].

Появление любой из балльных оценок по каждому критерию было равновероятным. После этого генератором случайных чисел определялась важность критериев. Она определялась не через коэффициенты важности, а через N-модель [4]. Если (для простоты интерпретации) представлять одну из многокритериальных задач, решаемых в эксперименте, задачей выбора наилучшего студента по его оценкам по разным предметам, тогда элемент N-модели может иметь следующий смысл: это число равноважных разделов в данном предмете. Также предполагалось, что предмет может иметь любое число «разделов» от 1 до максимального с равной вероятностью. При решении многокритериальных задач одной размерности максимальное число разделов в предмете считалось постоянным. Таким образом, гене-

---

[1] *В данном исследовании, как и в работе* [10]*, используется «школьная» пятибалльная шкала («урезанная» до четырехбалльной). Более подробно возможность ее использования обсуждается в* [10]*. Для других стран результаты, полученные на ее основе, могут быть менее репрезентативными.*

ратором случайных чисел определялись значения важности критериев, а не коэффициенты их важности.

Если удается выделить единственный недоминируемый вариант, т. е. лучший, (точнее, один недоминируемый класс эквивалентности вариантов), это значит, что имеющейся информации для данной задачи достаточно и функцию ценности можно не строить.

Решался миллион таких задач одной размерности (случайно сгенерированных). И определялась доля случаев, когда для задачи данной размерности использование соответствующей информации достаточно для выделения одного лучшего (с точностью до эквивалентности) варианта.

Предполагается, что отношение Парето является «очевидным», точнее очевидным для ЛПР является, доминирует ли какой-либо вариант над другим по Парето или нет. В то время как для других, более «сильных» отношений предпочтения почти всегда является не очевидным, доминирует ли данный вариант по ним над другим вариантом. То есть если есть два варианта, один оценивается по двум критериям на «отлично» и «отлично», а второй на «удовлетворительно» и «плохо», очевидно без построения функции ценности, что первый вариант лучше. Поэтому для того чтобы определить долю случаев, когда приходится строить функцию ценности в традиционном подходе теории полезности, надо от ста процентов отнять долю случаев, когда отношения Парето достаточно для определения единственного (с точностью до эквивалентности) недоминируемого варианта. Вычислительный эксперимент для определения такой доли случаев был проведен в данном исследовании, его результаты представлены в таблице 1.

Для определения того, в какой доле случаев придется строить функцию ценности при использовании решающих правил теории важности критериев, нужно от ста процентов отнять долю случаев, когда отношения предпочтения R^{Θ} или $R^{\Theta\&D}$ достаточно для определения единственного (с точностью до эквивалентности) недоминируемого варианта. Вычислительные эксперименты по определению вышеуказанных долей были проведены в работе [10], и для удобства читателя мы продублируем результаты из того эксперимента в таблицах 2 и 3 соответственно.

Таблица 1. Доля случаев, когда отношения Парето достаточно для определения одного (с точностью до эквивалентности) недоминируемого варианта

Число вари-антов	Число критериев							
	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0,718	0,473	0,301	0,190	0,119	0,075	0,047	0,029
3	0,589	0,298	0,143	0,068	0,032	0,015	0,007	0,003
4	0,533	0,229	0,092	0,036	0,014	0,006	0,002	0,001
5	0,511	0,197	0,070	0,024	0,008	0,003	0,001	0,000
6	0,503	0,182	0,060	0,019	0,006	0,002	0,001	0,000
7	0,506	0,176	0,055	0,016	0,005	0,002	0,000	0,000
8	0,515	0,174	0,052	0,015	0,004	0,001	0,000	0,000
9	0,529	0,176	0,051	0,015	0,004	0,001	0,00	0,000

Таблица 2. Доля случаев, когда количественной важности критериев достаточно для определения одного (с точностью до эквивалентности) недоминируемого варианта; 5 различных значений важности критериев

Число вари-антов	Число критериев							
	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0,850	0,738	0,669	0,627	0,602	0,585	0,574	0,566
3	0,778	0,624	0,536	0,484	0,454	0,435	0,422	0,415
4	0,754	0,574	0,472	0,413	0,380	0,359	0,345	0,336
5	0,753	0,554	0,439	0,374	0,336	0,313	0,298	0,287
6	0,763	0,549	0,422	0,350	0,307	0,281	0,265	0,255
7	0,778	0,550	0,412	0,333	0,288	0,259	0,243	0,231
8	0,796	0,554	0,406	0,323	0,273	0,243	0,224	0,212
9	0,813	0,560	0,404	0,315	0,263	0,230	0,210	0,197

Напомним, что варианты сравниваются по отношению предпочтения R^{Θ}, когда информации о скорости роста предпочтений вдоль шкалы критериев нет и, следовательно, можно применить методы теории количественной важности критериев с порядковой шкалой.

И если предполагать наличие информации о том, что предпочтения ЛПР растут вдоль шкалы (при движении от меньших градаций к большим) с затуханием (так называемая информация D), то можно применить методы теории количественной важности критериев со шкалой первой порядковой метрики. То есть варианты в этом случае будут сравниваться по отношению нестрогого предпочтения $R^{\Theta\&D}$.

Таблица 3. Доля случаев, когда количественной важности критериев и информации D достаточно для определения одного (с точностью до эквивалентности) недоминируемого варианта; 5 различных значений важности критериев

Число вари-антов	Число критериев							
	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0,938	0,888	0,863	0,832	0,813	0,816	0,806	0,807
3	0,903	0,831	0,783	0,743	0,731	0,720	0,710	0,713
4	0,898	0,801	0,739	0,698	0,660	0,649	0,637	0,633
5	0,890	0,788	0,705	0,659	0,635	0,609	0,594	0,585
6	0,897	0,773	0,696	0,637	0,603	0,581	0,551	0,558
7	0,907	0,778	0,691	0,628	0,589	0,564	0,535	0,530
8	0,910	0,787	0,694	0,618	0,575	0,539	0,517	0,508
9	0,920	0,781	0,683	0,605	0,550	0,533	0,501	0,481

Расчеты проводились при помощи специально разработанной компьютерной программы.

Необходимо отдельно остановиться на вышеприведенных в тексте предположениях относительно равномерного распределения некоторых величин, участвующих в вычислительном эксперименте и при доказательстве теорем. Мы считаем, что отличие реального распределения этих величин от равномерного хоть и влияет на результаты, полученные в эксперименте, и на формулы в теоремах, но не настолько, чтобы изменить принципиальный вывод данной статьи о том, что снижение затрат на построение функции ценности, получаемое при использовании решающих правил теории важности критериев, является весьма существенным. Доказанные теоремы в их текущем виде, хоть и даны для частного подкласса случаев, но все равно хорошо подходят для ориентировочного определения величины этого снижения затрат.

И, наконец, несколько слов относительно возможности использования статистического подхода в настоящем исследовании. Мы понимаем, что каждая практическая задача многокритериального отбора по-своему уникальна, и нередко бывают случаи, когда аналитик и ЛПР собираются разово для решения данной многокритериальной задачи. Но также считаем, что довольно часто бывает ситуация, когда одной группе экспертов, аналитиков, ЛПР приходится решать типичные для некоторой предметной области задачи многокритериального отбора на системной основе. Таким задачами являются отбор перспективных для выполнения проектов, отбор контрагентов, подрядчиков и многие другие. И для каждой задачи может быть выбран в общем случае свой многокритериальный метод, когда-то более подходящий и удачный, когда-то менее. И в среднем деятельность этой рабочей группы по отбору (проектов, подрядчиков и т.д.) может быть более или менее эффективной. Поэтому знание о возможности снижения затрат может повысить эту среднюю эффективность на системной основе. В этой связи считаем, что использование статистического подхода в данном исследовании оправданным, хотя и признаем существование отдельных уникальных многокритериальных задач.

4. Количественная оценка снижения затрат на построение функции ценности при использовании решающих правил теории важности критериев

Определим, во сколько раз снижаются затраты на построение функции ценности при использовании решающих правил теории важности критериев по сравнению с традиционным подходом теории полезности. Другими словами, во сколько раз снижается доля случаев, когда не удается определить единственный недоминируемый вариант по отношению P^{Θ} и $P^{\Theta\&D}$ по сравнению долей случаев, когда не удается определить единственный недоминируемый вариант по отношению Парето. Предполагается, что операция определения доминируемости по отношению Парето является «очевидной» для ЛПР в отличие от отношений P^{Θ} и $P^{\Theta\&D}$.

Например, для случая отбора из трех вариантов на основании трех критериев вероятность определить наилучший вариант по отношению Парето – 29,8%, а по отношению P^{Θ} – 62,4%. То есть при следовании традиционному подходу теории полезности функцию ценности придется строить в 100 – 29,8 = 70,2% случаев, а при использовании решающего правила теории важности критериев, не налагающего никаких ограничений на характер возрастания предпочтений ЛПР вдоль шкалы, 100 – 62,4 = 37,6% случаев. Получается, что доля случаев, когда нужно тратить время на построение функции ценности уменьшается в 70,2/37,6 ≈ 1,87 раза! Аналогично, можно посчитать, что если для данной балльной шкалы критериев верен закон «убывающей предельной полезности» (полезности/ценности для ЛПР), то эти затраты времени по сравнению с традиционным подходом сократятся в (100 – 29,8)/(100 – 83,1) ≈ 4,15 раза! Результаты, полученные таким образом, представлены в таблицах 4 и 5.

Таблица 4. Отношение долей случаев, когда функцию ценности придется строить в подходе теории полезности и при использовании количественной важности критериев; 5 различных значений важности критериев

Число вариантов	Число критериев							
	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1,880	2,011	2,112	2,172	2,214	2,229	2,237	2,237
3	1,851	1,867	1,847	1,806	1,773	1,743	1,718	1,704
4	1,898	1,810	1,720	1,642	1,590	1,551	1,524	1,505
5	1,980	1,800	1,658	1,559	1,494	1,451	1,423	1,403
6	2,097	1,814	1,626	1,509	1,434	1,388	1,359	1,342
7	2,225	1,831	1,607	1,475	1,397	1,347	1,321	1,300
8	2,377	1,852	1,596	1,455	1,370	1,320	1,289	1,269
9	2,519	1,873	1,592	1,438	1,351	1,297	1,266	1,245

Таблица 5. Отношение долей случаев, когда функцию ценности придется строить в подходе теории полезности и при использовании количественной важности критериев с информацией D; 5 различных значений важности критериев.

Число вариантов	Число критериев							
	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4,548	4,705	5,102	4,821	4,711	5,027	4,912	5,031
3	4,237	4,154	3,949	3,626	3,599	3,518	3,424	3,474
4	4,578	3,874	3,479	3,192	2,900	2,832	2,749	2,722
5	4,445	3,788	3,153	2,862	2,718	2,550	2,461	2,410
6	4,825	3,604	3,092	2,702	2,504	2,382	2,225	2,262
7	5,312	3,712	3,058	2,645	2,421	2,289	2,151	2,128
8	5,389	3,878	3,098	2,579	2,344	2,167	2,070	2,033
9	5,888	3,763	2,994	2,494	2,213	2,139	2,004	1,927

5. Аналитический вывод

Для класса ситуаций отбора из двух вариантов на основе двух критериев произведем следующие аналитические выводы, представленные двумя нижеследующими теоремами и следствиями из них. Для других классов ситуаций получить применением одной формулы числа, приведенные в таблицах 4 и 5, пока не удается.

Теорема 1. Пусть l – максимальное число различных значений важности критериев; n – число вариантов; m – число критериев, а $Q(n, m, l)$ – доля случаев, когда функцию ценности можно не строить (без наложения ограничений на скорость роста предпочтения для ЛПР). Тогда

$$Q(2, 2, l) = \frac{107l + 9}{128l}.$$

Доказательство. Доказательство основано на переборе сопоставлений всех векторных оценок с четырьмя градациями друг с другом по отношению предпочтения P^{Θ}. Это сопоставление основывается на применении решающего правила, приведенного в [5]. Рассмотрим его применение на примере сравнения по предпочтительности двух векторных оценок $s_1 = (5; 3)$ и $s_2 = (4; 4)$. Предположим, что значения важности критериев есть $x > 0$ и $y > 0$. Их сравнение по отношению предпочтения P^{Θ} сводится к сравнению по отношению Парето оценок $e_1 = (x; x; x + y)$ и $e_2 = (0; x + y; x + y)$. Эти оценки получены следующим образом: первая компонента векторной оценки показывает, есть ли в исходной векторной оценке компонента, равная 5. Если она есть, то она учитывается столько раз, каково значение важности критерия. Вторая компонента оценки е показывает, есть ли в векторной оценке s компонента, большая или равная 4. Учитывается столько раз, каково значение важности критериев, где она присутствует. Аналогично определяется третья компонента векторной оценки e. Легко видеть, что оценки e_1 и e_2 не сравнимы по Парето, из этого следует, что оценки s_1 и s_2 не сравнимы по отношению P^{Θ}. Результаты, полученные таким образом для случая, когда $x > y$, занесены в таблицу, изображенную на рисунке в Приложении 2. А для ситуации, когда важности двух критериев равны между собой – в Приложении 1. Темно-серым цветом выделены ячейки, соответствующие случаям, когда варианты несравнимы по данному отношению предпочтения.

Таким образом, если важности критериев равны между собой, то доля случаев, когда функцию ценности можно не строить, будет

$$1-\frac{12\times 2}{16^2}=1-\frac{3}{32}=\frac{29}{32}.$$

А если важности критериев не равны, то

$$1-\frac{21\times 2}{16^2}=1-\frac{21}{128}=\frac{107}{128}.$$

Предполагаем, что важность критерия представляется через значения важности критериев и принимает значения от 1 до l, тогда вероятность того, что значение важности второго критерия совпадет с первым (т.е. важности критериев будут равны) будет $1 / l$, соответственно, что важности критериев будут не равны – $(l - 1) / l$.

Таким образом:

$$Q(2,2,l)=\frac{1}{l}\times\frac{29}{32}+\frac{l-1}{l}\times\frac{107}{128}=\frac{4\times 29+(l-1)\times 107}{128l}=$$

$$=\frac{116+107l-107}{128l}=\frac{107l+9}{128l}.$$

Что и требовалось доказать.

Следствие 1 из теоремы 1. Пусть l – максимальное число различных значений важности критериев; n – число вариантов; m – число критериев; $Q(n, m, l)$ – доля случаев, когда функцию ценности можно не строить. Тогда $Q(2, 2, l)$ заключено в следующих пределах:

$$\frac{107}{128}\leq Z(2,\,2,\,l)<\frac{29}{32}.$$

Следствие 2 из теоремы 1. Сравнение результатов теоремы 1 и экспериментальных расчетов.

$$Q(2,\,2,\,5)=\frac{17}{20}=0{,}85,$$

что в точности совпадает с опубликованными экспериментальными данными [10].

$$Q(2,\,2,\,9)=\frac{27}{32}=0{,}84375.$$

В работе [9] было опубликовано значение, округленное до трех знаков после запятой, 0,844. Отметим также, что теорема 1 позволяет не только получить данные, совпадающие с результатами вычислительного эксперимента для 5-ти и 9-ти различных значений важности критериев, но и получить результаты для любого числа различных значений важности критериев. В этом смысле эта теорема дает более общие результаты, нежели вычислительный эксперимент.

Следствие 3 из теоремы 1. Сравнение результатов теоремы 1 и ранее сделанных предположений: в статье [10] по результатам экспериментов было сделано предположение, что число различных значений важности критериев не влияет на содержательные выводы статьи, поэтому, где не указано обратное, далее использовалось 5 различных значений важности критериев. Теперь это показано аналитически. Действительно, при любом числе различных значений важности критериев доля случаев для двух вариантов и двух критериев, когда функцию ценности можно не строить колеблется от примерно 0,836 до 0,906, что не меняет содержательных выводов.

Теорема 2. Для данного класса ситуаций снижение затрат $Z(2, 2, l)$ на построение функции ценности при использовании решающих правил Подиновского (без наложения ограничений на скорость роста предпочтения ЛПР) по сравнению с традиционным подходом теории полезности составляет

$$Z(2, 2, l) = \frac{12l}{7l - 3}.$$

Доказательство.

Согласно перебору сравнения вариантов по отношению Парето, приведенному в таблице в Приложении 3 вероятность того, что при данных условиях взятия отношения предпочтения Парето будет достаточно для определения единственного недоминируемого варианта (с точностью до эквивалентности) будет равна:

$$1 - \frac{36 \times 2}{256} = 1 - \frac{9}{32} = \frac{23}{32}.$$

В этой доле случаев строить функцию ценности не придется.

А отношение доли случаев, когда функцию ценности придется строить в традиционном подходе теории полезности и при использовании решающего правила теории важности критериев (без наложения ограничений на скорость роста предпочтения ЛПР) будет

$$Z(2, 2, l) = \frac{1 - \frac{23}{32}}{1 - \frac{107l + 9}{128l}} = \frac{9}{32} \div \frac{128l - 107l - 9}{128l} =$$

$$= \frac{9}{32} \times \frac{128l}{21l - 9} = \frac{3}{1} \times \frac{4l}{7l - 3} = \frac{12l}{7l - 3}.$$

Что и требовалось доказать.

Следствие 1 из теоремы 2. Для различных значений l (максимального значения различных значений важности критериев) $Z(l)$ заключено в пределах:

$$1{,}714 \approx \frac{12}{7} < Z(l) \le 3 .$$

Следствие 2 из теоремы 2.

$$Z(5) = \frac{60}{32} = \frac{15}{8} = 1{,}875,$$

что совпадает с экспериментально полученными данными в этой работе с точностью до ошибок округления.

6. Выводы

При принятии несильных допущений, приведенных ранее в тексте для многокритериальных задач с однородными критериями с числом вариантов от 5 до 9 и числом критериев от 5 до 9:

1. Применение решающих правил теории важности критериев позволяет снизить затраты времени на построение функции ценности в 2–5 раз.
2. Одно лишь предположение о том, что закон убывающей «предельной полезности» верен для имеющейся в данной задаче балльной шкалы, позволяет существенно снизить затраты на построение функции ценности – преимущество перед теорией полезности растет примерно с 1,2–2 раз до 2–5 раз. Это обуславливает актуальность поиска операциональных способов констатирования наличия затухания скорости роста предпочтений ЛПР вдоль балльной шкалы.

Проведенное исследование позволяет более обоснованно применять теорию важности критериев как эффективный инструмент анализа многокритериальных задач принятия решений.

Литература

1. БАРЫШНИКОВ Ю. М. *О среднем числе вариантов, недоминируемых по сравнению В.В. Подиновского* // Автоматика и телемеханика. – 1990. – №6. – С. 161–167.

2. БУРКОВ В.Н., КОРГИН Н.А., НОВИКОВ Д.А. *Введение в теорию управления организационными системами*: Учебник / Под ред. Д.А. Новикова. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 264 с.
3. КИНИ Р.Л., РАЙФА Х. *Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения* / Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1981.
4. ПОДИНОВСКИЙ В.В. *Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений*. – М.: Физматлит, 2007.
5. ПОДИНОВСКИЙ В.В. *Количественная важность критериев* // Автоматика и телемеханика. – 2000. – №5. – С. 110–123.
6. ПОДИНОВСКИЙ В.В. *Количественная важность критериев с дискретной шкалой первой порядковой метрики* // Автоматика и телемеханика. – 2004. – №8. – С. 196–203.
7. ПОДИНОВСКИЙ В.В. *Об оценке эффективности решающих правил в многокритериальных задачах* // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1987. – №1. – С. 3–9.
8. ПОДИНОВСКИЙ В.В. *Оценка эффективности решающих правил в дискретных многокритериальных задачах* // Методы оптимизации в экономико-математическом моделировании. – М.: Наука, 1991. – С. 308–324.
9. САЛТЫКОВ С.А. *Экспериментальное сопоставление различных многокритериальных подходов* // Материалы XXXVI Международной конференции «Информационные технологии в науке, социологии, экономике и бизнесе», Ялта, Гурзуф, май 2009 г. Приложение к журналу «Открытое образование». – С. 315–317.
10. САЛТЫКОВ С.А. *Экспериментальное сопоставление методов взвешенной суммы, теории полезности и теории важности критериев для решения многокритериальных задач с балльными критериями* // Управление большими системами. – 2010. – Вып. 29. – С. 16–41.
11. СИДЕЛЬНИКОВ Ю.В., САЛТЫКОВ С.А. *Процедура отбора наиболее приемлемых разновидностей экспертных методов* // Управление большими системами. –2010. – Вып. 30. – С. 35–66.

12. DYER J.S. *MAUT – Multiattribute Utility Theory* // Mutiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys. Springer Science + Business Media, Inc., 2005. – P. 265 – 295.

REDUCING COSTS OF CONSTRUCTION OF VALUE FUNCTION USING DECISION RULES OF CRITERIA IMPORTANCE THEORY AS COMPARED WITH TRADITIONAL APPROACH OF UTILITY THEORY

Sergey Saltykov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, junior researcher, (ssaltykov@mail.ru).

Abstract: According to the results of a computational experiment using decision rules of criteria importance theory can reduce 2–5 times the time spent on constructing a value function compared with a traditional approach of utility theory. For the case of two-variant and two-criterion choice the theorem is proved to quantify how many times criteria importance theory allows to reduce the proportion of cases when the value must be constructed.

Keywords: criteria importance theory, value function, reducing costs.

Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А. И. Орловым

Приложение 1

	5; 5	5; 4	5; 3	5; 2	4; 5	4; 4	4; 3	4; 2	3; 5	3; 4	3; 3	3; 2	2; 5	2; 4	2; 3	2; 2
5; 5		2k;2k;2k k;2k;2k	2k;2k;2k k;k;2k	2k;2k;2k k;k;k	2k;2k;2k k;2k;2k	2k;2k;2k 0;2k;2k	2k;2k;2k 0;k;2k	2k;2k;2k 0;k;k	2k;2k;2k k;k;2k	2k;2k;2k 0;k;2k	2k;2k;2k 0;0;2k	2k;2k;2k 0;0;k	2k;2k;2k k;k;k	2k;2k;2k 0;k;k	2k;2k;2k 0;0;k	2k;2k;2k 0;0;0
5; 4			k;2k;2k k;k;2k	k;2k;2k k;k;k	k;2k;2k k;2k;2k	k;2k;2k 0;2k;2k	k;2k;2k 0;k;2k	k;2k;2k 0;k;k	k;2k;2k k;k;2k	k;2k;2k 0;k;2k	k;2k;2k 0;0;2k	k;2k;2k 0;0;k	k;2k;2k k;k;k	k;2k;2k 0;k;k	k;2k;2k 0;0;k	k;2k;2k 0;0;0
5; 3				k;k;2k k;k;k	k;k;2k k;2k;2k	k;k;2k 0;2k;2k	k;k;2k 0;k;2k	k;k;2k 0;k;k	k;k;2k k;k;2k	k;k;2k 0;k;2k	k;k;2k 0;0;2k	k;k;2k 0;0;k	k;k;2k k;k;k	k;k;2k 0;k;k	k;k;2k 0;0;k	k;k;2k 0;0;0
5; 2					k;k;k k;2k;2k	k;k;k 0;2k;2k	k;k;k 0;k;2k	k;k;k 0;k;k	k;k;k k;k;2k	k;k;k 0;k;2k	k;k;k 0;0;2k	k;k;k 0;0;k	k;k;k k;k;k	k;k;k 0;k;k	k;k;k 0;0;k	k;k;k 0;0;0
4; 5						k;2k;2k 0;2k;2k	k;2k;2k 0;k;2k	k;2k;2k 0;k;k	k;2k;2k k;k;2k	k;2k;2k 0;k;2k	k;2k;2k 0;0;2k	k;2k;2k 0;0;k	k;2k;2k k;k;k	k;2k;2k 0;k;k	k;2k;2k 0;0;k	k;2k;2k 0;0;0
4; 4							0;2k;2k 0;k;2k	0;2k;2k 0;k;k	0;2k;2k k;k;2k	0;2k;2k 0;k;2k	0;2k;2k 0;0;2k	0;2k;2k 0;0;k	0;2k;2k k;k;k	0;2k;2k 0;k;k	0;2k;2k 0;0;k	0;2k;2k 0;0;0
4; 3								0;k;2k 0;k;k	0;k;2k k;k;2k	0;k;2k 0;k;2k	0;k;2k 0;0;2k	0;k;2k 0;0;k	0;k;2k k;k;k	0;k;2k 0;k;k	0;k;2k 0;0;k	0;k;2k 0;0;0
4; 2									0;k;k k;k;2k	0;k;k 0;k;2k	0;k;k 0;0;2k	0;k;k 0;0;k	0;k;k k;k;k	0;k;k 0;k;k	0;k;k 0;0;k	0;k;k 0;0;0
3; 5										k;k;2k 0;k;2k	k;k;2k 0;0;2k	k;k;2k 0;0;k	k;k;2k k;k;k	k;k;2k 0;k;k	k;k;2k 0;0;k	k;k;2k 0;0;0
3; 4											0;k;2k 0;0;2k	0;k;2k 0;0;k	0;k;2k k;k;k	0;k;2k 0;k;k	0;k;2k 0;0;k	0;k;2k 0;0;0
3; 3												0;0;2k 0;0;k	0;0;2k k;k;k	0;0;2k 0;k;k	0;0;2k 0;0;k	0;0;2k 0;0;0
3; 2													0;0;k k;k;k	0;0;k 0;k;k	0;0;k 0;0;k	0;0;k 0;0;0
2; 5														k;k;k 0;k;k	k;k;k 0;0;k	k;k;k 0;0;0
2; 4															0;k;k 0;0;k	0;k;k 0;0;0
2; 3																0;0;k 0;0;0
2; 2																

Приложение 2

	5; 5	5; 4	5; 3	5; 2	4; 5	4; 4	4; 3	4; 2	3; 5	3; 4	3; 3	3; 2	2; 5	2; 4	2; 3	2; 2
5; 5		x+y;x+y;x+y x;x+y;x+y	x+y;x+y;x+y x;x;x+y	x+y;x+y;x+y x;x;x	x+y;x+y;x+y y;x+y;x+y	x+y;x+y;x+y 0;x+y;x+y	x+y;x+y;x+y 0;x;x+y	x+y;x+y;x+y 0;x;x	x+y;x+y;x+y y;y;x+y	x+y;x+y;x+y 0;y;x+y	x+y;x+y;x+y 0;0;x+y	x+y;x+y;x+y 0;0;x	x+y;x+y;x+y y;y;y	x+y;x+y;x+y 0;y;y	x+y;x+y;x+y 0;0;y	x+y;x+y;x+y 0;0;0
5; 4			x;x+y;x+y x;x;x+y	x;x+y;x+y x;x;x	x;x+y;x+y y;x+y;x+y	x;x+y;x+y 0;x+y;x+y	x;x+y;x+y 0;x;x+y	x;x+y;x+y 0;x;x	x;x+y;x+y y;y;x+y	x;x+y;x+y 0;y;x+y	x;x+y;x+y 0;0;x+y	x;x+y;x+y 0;0;x	x;x+y;x+y y;y;y	x;x+y;x+y 0;y;y	x;x+y;x+y 0;0;y	x;x+y;x+y 0;0;0
5; 3				x;x;x+y x;x;x	x;x;x+y y;x+y;x+y	x;x;x+y 0;x+y;x+y	x;x;x+y 0;x;x+y	x;x;x+y 0;x;x	x;x;x+y y;y;x+y	x;x;x+y 0;y;x+y	x;x;x+y 0;0;x+y	x;x;x+y 0;0;x	x;x;x+y y;y;y	x;x;x+y 0;y;y	x;x;x+y 0;0;y	x;x;x+y 0;0;0
5; 2					x;x;x y;x+y;x+y	x;x;x 0;x+y;x+y	x;x;x 0;x;x+y	x;x;x 0;x;x	x;x;x y;y;x+y	x;x;x 0;y;x+y	x;x;x 0;0;x+y	x;x;x 0;0;x	x;x;x y;y;y	x;x;x 0;y;y	x;x;x 0;0;y	x;x;x 0;0;0
4; 5						y;x+y;x+y 0;x+y;x+y	y;x+y;x+y 0;x;x+y	y;x+y;x+y 0;x;x	y;x+y;x+y y;y;x+y	y;x+y;x+y 0;y;x+y	y;x+y;x+y 0;0;x+y	y;x+y;x+y 0;0;x	y;x+y;x+y y;y;y	y;x+y;x+y 0;y;y	y;x+y;x+y 0;0;y	y;x+y;x+y 0;0;0
4; 4							0;x+y;x+y 0;x;x+y	0;x+y;x+y 0;x;x	0;x+y;x+y y;y;x+y	0;x+y;x+y 0;y;x+y	0;x+y;x+y 0;0;x+y	0;x+y;x+y 0;0;x	0;x+y;x+y y;y;y	0;x+y;x+y 0;y;y	0;x+y;x+y 0;0;y	0;x+y;x+y 0;0;0
4; 3								0;x;x+y 0;x;x	0;x;x+y y;y;x+y	0;x;x+y 0;y;x+y	0;x;x+y 0;0;x+y	0;x;x+y 0;0;x	0;x;x+y y;y;y	0;x;x+y 0;y;y	0;x;x+y 0;0;y	0;x;x+y 0;0;0
4; 2									0;x;x y;y;x+y	0;x;x 0;y;x+y	0;x;x 0;0;x+y	0;x;x 0;0;x	0;x;x y;y;y	0;x;x 0;y;y	0;x;x 0;0;y	0;x;x 0;0;0
3; 5										y;y;x+y 0;y;x+y	y;y;x+y 0;0;x+y	y;y;x+y 0;0;x	y;y;x+y y;y;y	y;y;x+y 0;y;y	y;y;x+y 0;0;y	y;y;x+y 0;0;0
3; 4											0;y;x+y 0;0;x+y	0;y;x+y 0;0;x	0;y;x+y y;y;y	0;y;x+y 0;y;y	0;y;x+y 0;0;y	0;y;x+y 0;0;0
3; 3												0;0;x+y 0;0;x	0;0;x+y y;y;y	0;0;x+y 0;y;y	0;0;x+y 0;0;y	0;0;x+y 0;0;0
3; 2													0;0;x y;y;y	0;0;x 0;y;y	0;0;x 0;0;y	0;0;x 0;0;0
2; 5														y;y;y 0;y;y	y;y;y 0;0;y	y;y;y 0;0;0
2; 4															0;y;y 0;0;y	0;y;y 0;0;0
2; 3																0;0;y 0;0;0
2; 2																

Приложение 3