УДК 519.17
ББК 22.143

АЛГОРИТМ ДЕКОМПОЗИЦИИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

Рудаков И. В.[1], **Шляпенко Д. А.**[2]
(*Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана, Москва*)

Предлагается метод декомпозиции вероятностных конечных автоматов. Алгоритм позволяет декомпозировать вероятностный конечный автомат в сеть вероятностных автоматов с меньшим числом состояний. В основе метода лежит общая теорема декомпозиции, модифицированная для применения к вероятностным автоматам. Указаны параметры, характеризующие однозначность разбиения, и предложена система оценки таких параметров.

Ключевые слова: анализ системы управления, конечный автомат, декомпозиция, стохастическая система.

Введение

При анализе и проектировании структур сложных дискретных устройств, таких как микропроцессорные и робототехнические системы, системы управления технологическими процессами, комплексные автоматизированные системы, используется блочно-иерархический метод [6], который предусматривает декомпозицию процесса проектирования на ряд последовательных уровней и сведение задачи большей размерности к совокупности задач значительно меньшей размерности. При таком методе происходит разбиение исследуемой системы на части, моделирование и проверка работы каждой компоненты.

---

[1] *Игорь Владимирович Рудаков, кандидат технических наук, доцент,* (*irudakov@yandex.ru*).
[2] *Денис Андреевич Шляпенко, студент* (*dent.yootumi@gmail.com*).

Случайный характер процессов формирования, обработки и передачи данных в сложных дискретных системах обуславливает необходимость применения стохастических моделей, в качестве которых широко используются модели вероятностных автоматов. При этом встаёт проблема декомпозиции дискретных систем, формализованных подобными схемами. Определим задачу декомпозиции формально.

1. Существующие методы

Задачу структурной декомпозиции вероятностного автомата с детерминированной функцией выходов решил Бэкон [7]. Следуя его методам можно получить последовательную (автоматы сети соединены строго последовательно) или параллельную (автоматы сети соединены строго последовательно) декомпозицию исходного автомата. При этом параллельная структура может быть как синхронной, так и асинхронной. Дальнейшее развитие этого метода описано Бухараевым [2]. В его работе приведено описание декомпозиции вероятностных автоматов с выделением стандартного заданного вероятностного подавтомата. Методы, описанные в работах Бэкона и Бухараева, сводятся к решению системы матричных уравнений. В случае когда система уравнений не имеет решения, декомпозиция не может быть произведена. Это накладывает серьёзные ограничения на исходный вероятностный автомат. Таким образом, эти методы применимы лишь в частных случаях.

Описанный в данной работе метод является обобщением общего алгоритма декомпозиции обычного (не вероятностного) автомата и применим для любого вероятностного автомата. Однако в силу общности структура получаемой сети является более сложной (большее число соединений между компонентами сети), чем в частных случаях, описанных Бэконом и Бухараевым.

2. Постановка задачи

Абстрактный автомат S определяется как кортеж, или вектор, $S = (A, Z, W, \delta, \lambda)$, где:

1) $A = a_1, \ldots, a_m, \ldots, a_M$ — множество состояний (алфавит состояний);

2) $Z = z_1, \ldots, z_f, \ldots, z_F$ — множество входных сигналов (входной алфавит);

3) $W = w_1, \ldots, w_m, \ldots, w_M$ — множество выходных сигналов (выходной алфавит);

4) $\delta : A \times Z \to A$ — функция переходов, реализующая отображение $D_\delta \subseteq A \times Z$ в A;

5) $\lambda : A \times Z \to W$ — функция выходов, реализующая отображение $D_\lambda \subseteq A \times Z$ в W;

Автомат (A, Z, δ), не имеющий выходов, будем называть полуавтоматом.

Автомат $S^{'} = (A^{'}, Z^{'}, W^{'}, \delta^{'}, \lambda^{'})$ называется подавтоматом автомата $S = (A, Z, W, \delta, \lambda)$, если и только если $A^{'} \subseteq A, Z^{'} \subseteq Z, W^{'} \subseteq W$, а также для любого $a_m \subseteq A^{'}$ и любого $z_f \subseteq Z^{'}$ справедливо

$$\delta^{'}(a_m, z_f, p) = \delta(a_m, z_f, p) \tag{1}$$

$$\delta^{'}(a_m, z_f, p) = \delta(a_m, z_f, p) \tag{2}$$

где $p \in [0; 1]$.

Другими словами, на области определения автомата $S^{'}$ поведение обоих автоматов совпадает. Таким образом, автомат S «делает столько же, сколько и $S^{'}$, и, быть может, несколько больше».

Автоматы S и $S^{'}$ называются изоморфными, если существуют три взаимно-однозначных отображения

$$\psi_1 : A \to A^{'}, \psi_2 : Z \to Z^{'}, \psi_3 : W \to W^{'}, \tag{3}$$

таких, что

(4) $$\psi_1(\delta(a_m, z_f, p)) = \delta'(\psi_1(a_m), \psi_2(z_f), p))$$

и

(5) $$\psi_3(\lambda(a_m, z_f, p)) = \lambda'(\psi_1(a_m), \psi_2(z_f), p))$$

для любых $a_m \in A$ и $z_f \in Z$, где $p \in [0; 1]$.

Тройку отображений ψ_1, ψ_2 и ψ_3 называют изоморфизмом автоматов S и S'. Кратко понятие изоморфизма формулируется следующим образом: образ функции равен функции образов. Иначе, изоморфные автоматы идентичны с точностью до обозначений состояний, входных и выходных сигналов.

Автомат S назовём реализацией автомата S' (обозначение $S = R(S'))$, если у автомата S существует подавтомат, изоморфный S'. Таким образом, если автомат S реализует автомат S', то поведение S с точностью до обозначений совпадает с поведением S' на области определения S', так как у автомата S должен быть некоторый подавтомат S'', изоморфный S'.

В качестве модели, описывающей совместную работу совокупности автоматов, будем использовать понятие сети автоматов. Сеть автоматов — это кортеж

(6) $$N = (Z, \{S_i\}, W, \{f_i\}, \{\psi_i\}, g),$$

где:

1) Z — входной алфавит;

2) $\{S_i = (A_i, Z_i, \delta_i)\}, 1 \leqslant i \leqslant n$ — множество компонентных автоматов (КА) сети. КА S_i — полуавтомат, A_i — его множество состояний, Z_i — его входной алфавит:

   (7) $$Z_i = \begin{cases} Z_i' \times Z_i'' & \text{для } Z_i' \neq \varnothing, \\ Z_i'' & \text{для } Z_i' = \varnothing \end{cases}$$

   δ_i — его функции переходов $(\delta_i : A_i \times Z_i \to A_i)$;

3) W — выходной алфавит сети;

4) $\{f_i : (\overset{\times}{_j} A_j) \to Z_i'\}, 1 \leqslant i, j \leqslant n$ — множество функций соединения компонентных автоматов сети;

5) $\{\psi_i : Z \to Z_i'\}, 1 \leqslant i \leqslant n$ — множество входных функций;

6) $g : (\times_i A_i) \times Z \to W$ — выходная функция сети.

Результирующим автоматом сети

(8) $$N = (Z, \{S_i\}, W, \{f_i\}, \{\psi_i\}, g)$$

назовём автомат

(9) $$N = (A_N, Z_N, W, \delta_N, \lambda_N),$$

у которого:

1) $A_N =_i^\times A_i, i = 1, \ldots, n$;

2) $Z_N = Z$;

3) $W_N = W$;

4) Функция переходов $\delta_N : A_N \times Z_N \to A_N$, определяется следующим образом:

(10) $$\begin{aligned}&\delta_N(a_m, z_f) = \delta_N((a_{m_1}, \ldots, a_{m_i}, \ldots, a_{m_n}), z_f) = \\ &=_i^\times \delta_i(a_{m_i}, (f_i(a_{m_1}, \ldots, a_{m_n}), \psi_i(z_f)))\end{aligned}$$

Здесь $a_m \in A_N, z_f \in Z_N, a_{m_i} \in A_i, a_m = (a_{m_i}, \ldots, a_{m_n})$;

5) Функция выходов $\lambda_N : A_N \times Z_N \to W_N$ (в модели Мили), определяется следующим образом:

(11) $$\lambda_N(a_m, z_f) = g((a_{m_1}, \ldots, a_{m_n}), z_f)$$

в модели Мура:

(12) $$\lambda_N : A_N \to W_N, \lambda_N(a_m) = (a_{m_1}, \ldots, a_{m_n}).$$

Под задачей декомпозиции автомата S будем понимать задачу построения сети N такой, что её результирующий автомат S_N реализует заданный автомат S, т.е. $S_N = R(S)$.

3. Разбиение множества

Разбиением множества называется множество $\pi = \{B_1, \ldots, B_m\}$, элементы которого – подмножества A ($B_i \subseteq A, i = 1, \ldots, m$), удовлетворяющие следующим условиям:

1) Для любых двух множеств B_i и $B_j (i \neq j) B_i \cap B_j = \varnothing$.

2) $\bigcup_{i=1}^{m} B_i = A$.

3) $B_i \neq \varnothing, i = 1, \ldots, m$.

Множества $B_i (i = 1, \ldots, m)$ назовём блоками разбиения π.

Пусть $a_m = (a_{m_1}, \ldots, a_{m_n}), a_p = (a_{p_1}, \ldots, a_{p_n}); a_m \in A_N; a_{m_j}, a_{p_j} \in A_j; A_j$ — множество состояний компонентного автомата $S_j, j = 1, \ldots, n$. Определим разбиение $\pi_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ на множестве A_N следующим образом: $a_m \equiv a_p(\pi_{i_1 i_2 \ldots i_r})$, если и только если $a_m = a_p$ для всех $j = i_1, i_2, \ldots, i_r$. Таким образом, два состояния a_m и a_p результирующего автомата попадают в один блок $\pi_{i_1 i_2 \ldots i_r}$, если и только если в их кодах соответственно равны компоненты $i_1, i_2, \ldots, i_r$.

Каждый блок $\pi_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ соответствует различным элементам во множестве $A_{i_1} \times A_{i_2} \times \ldots \ltimes A_{i_r}$ (A_{i_j} — множество состояний компонентного автомата $S_{i_j}, j = 1, \ldots, r$), т. е. в $\pi_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ столько блоков, сколько различных внутренних состояний имеет система автоматов $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_r}$. Если в $\pi_{i_1 i_2 \ldots i_r} r = 1$, то на A_N можно аналогичным образом задать разбиение π_i (иногда его называют примарным разбиением). Это разбиение, очевидно, определяется следующим образом: $a_m \equiv a_p(\pi_i)$, если и только если $a_{m_i} = a_{p_i} (a_m, a_p \in A_N; a_{m_i}, a_{p_i} \in A_i)$. Таким образом, в один блок разбиения π_i попадают те состояния результирующего автомата, которые имеют одинаковые i-е компоненты. Следовательно, число блоков разбиения π_i равно числу состояний компонентного автомата S_i и между блоками π_i и состояниями S_i имеется взаимнооднозначное соответствие. В связи с этим можно отождествлять состояния S_i с блоками разбиения π_i [5].

4. СП-разбиение

Разбиение π на множестве состояний автомата $S = (A, Z, W, \delta, \lambda)$ обладает свойством подстановки (является СП-разбиением), если и только если из $a_m \equiv a_s(\pi)$ (a_m и a_s — в одном блоке π) следует, что $\delta(a_m, z_f) \equiv \delta(a_s, z_f)(\pi)$ для всех $z_f \in Z$.

Иначе, под действием любого входного сигнала автомат из состояний, находящихся в одном блоке π, переходит в состояния, также находящиеся в одном блоке, т.е. каждый входной сигнал отображает блоки π в блоки π. Таким образом, для $z_f \in Z$ и $B \in \pi$ существует единственный блок $B' \in \pi$, такой, что $\delta(B, z_f) \in B'$.

Пусть π — СП-разбиение на множестве состояний автомата $S = (A, Z, W, \delta, \lambda)$. Тогда образом автомата S назовём полуавтомат $S_\pi = (B_\pi, Z, \delta_\pi), B_\pi \in \pi$, у которого $\delta_\pi(B_\pi, z_f) = B'_\pi$, если и только если $\delta(B_\pi, z_f) \subseteq B'_\pi$.

Если π_1 и π_2 — СП-разбиения, то $\pi_1\pi_2$ и $\pi_1 + \pi_2$ — тоже СП-разбиения.

5. Процедура нахождения всех СП-разбиений

Процедура нахождения всех СП-разбиений состоит из двух этапов:

1) Для каждой пары состояний (a_m, a_s) вычисляется наименьшее СП-разбиение $\pi(a_m, a_s)$, которое отождествляет a_m с a_s (первичные СП-разбиения).

2) Находятся всевозможные суммы полученных на первом шаге $\pi(a_m, a_s)$. Эти суммы образуют вторичные СП-разбиения.

Отождествим два состояния a_m и a_s $(a_m, a_s \in A)$ в одном блоке искомого разбиения $\pi : a_m \equiv a_s(\pi)$. Тогда из определения разбиения с СП следует, что для любого $z_f \in Z$ состояния $\delta(a_m, z_f, p)$ и $\delta(a_s, z_f, p)$ также должны быть отождествлены $\delta(a_m, z_f, p) \equiv \delta(a_s, z_f, p)(\pi)$, где $p \in [0; 1]$. Ясно, что если состояние a_k отождествлено с a_i, а a_i с a_r, то состояния a_k и a_r также должны быть отождествлены, поскольку разбиение соответствует эквивалентности, а последняя транзитивна. Процесс повторяется для каждой пары состояний, вошедших в один блок, до тех пор, пока не перестанут отождествляться новые состояния. Построенное таким образом разбиение $\pi(a_m, a_s)$ имеет свойство подстановки и является минимальным разбиением, которое отождествляет состояния a_m и a_s в одном блоке. Чтобы получить другие разбиения, процесс повторяется для каждой пары состояний, т.е. $M(M-1)/2$ раз, где M — число состояний автомата [4].

6. Пары разбиений

Два разбиения (π, π'), определённых на множестве состояний A автомата $S = (A, Z, W, \delta, \lambda)$, назовём парой разбиений, если и только если из $a_m \equiv a_s(\pi)$ следует $\delta(a_m, z_f, p) \equiv \delta(a_s, z_f, p)(\pi')$ для всех $z_f \in Z; a_m, a_s \in A$.

Т. е. при работе S блоки π переводятся в блоки π' под действием любого входного сигнала, иначе говоря, для каждого $z_f \in Z$ и $B \in \pi$ существует единственный блок $B' \in \pi'$ такой, что $\delta(B, z_f, p) \subseteq B'$.

Если π – СП-разбиение, то (π, π) – пара разбиений. Также можно показать, что если (π, π') и (τ, τ') – две пары разбиений на множестве состояний A автомата S, то $(\pi\tau, \pi'\tau')$ и $(\pi + \tau, \pi' + \tau')$ – тоже пары разбиений на множестве A.

По аналогии с взаимнооднозначным соответствием между блоками π_i и состояниями S_i, $\pi_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ определяет входы в f_i от других автоматов. Т. е. существует взаимнооднозначное соответствие между блоками $\pi_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ и состояниями системы автоматов $S_{i_1}, S_{i_1}, \ldots, S_{i_r}$. Как и в любом автомате Мили, следующее состояние S_i (блок разбиения π_i) определяется его текущим состоянием и входным сигналом (входной сигнал здесь — состояние системы автоматов $S_{i_1}, S_{i_1}, \ldots, S_{i_r}$ и буква внешнего входного алфавита $z_f \in Z_i^{''}$). Таким образом, состояние S_i в любой момент времени определяется состоянием системы автоматов $S_{i_1}, S_{i_1}, \ldots, S_{i_r}, S_i$ и $z_f \in Z_i^{''}$, т. е. блоком разбиения $\pi_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ и $z_f \in Z_i^{''}$, поэтому $(\pi_{i_1 i_2 \ldots i_r}, \pi_i)$ – пара разбиений, а δ_i реализует отображение $\pi_{i_1 i_2 \ldots i_r} \times Z_i$ в π_i.

7. Общая теорема декомпозиции

Пусть $\pi_i, 1 \leqslant i \leqslant n$ – некоторое множество разбиений на множестве A состояний декомпозируемого автомата $S = (A, Z, W, \delta, \lambda)$.

Теорема. Множеству разбиений $\pi_i, 1 \leqslant i \leqslant n$ можно поставить в соответствие абстрактную сеть автоматов N так, чтобы $R(S) = S_N$, если и только если

$$\prod_{i=1}^{n} \pi_i = \pi(0). \tag{13}$$

При этом устанавливается взаимнооднозначное соответствие между разбиениями π_i и компонентными автоматами S_i.

Полностью доказательство теоремы приведено в [1, 3].

Множество разбиений, удовлетворяющих условию (1), будем называть ортогональным множеством разбиений. Таким образом, для декомпозиции автомата необходимо выбрать ортогональное множество разбиений. Способ выбора такого множества будет описан ниже в соответствующем параграфе.

Поставим в соответствие каждому разбиению π_i функцию $F_i : A \times Z \to \pi_i$, такую, что $F_i(a_m, z_f, p) = \pi_i(\delta(a_m, z_f, p))$, т. е. значение функции F_i на паре (a_m, z_f) равно блоку π_i, в котором содержится состояние $a_s = \delta(a_m, z_f, p), a_m, a_s \in A, z_f \in Z, p \in [0; 1]$.

Образуем на множествах A и Z соответственно разбиения τ_i и η_i так, что:

1) a_m и a_s находятся в одном блоке разбиения $\tau_i(a_m \equiv a_m(\tau_i))$, если и только если для любого $z_f \in Z$ справедливо $F_i(a_m, z_f, p) = F_i(a_s, z_f, p)$. Иначе $\tau_i = a \in A : \forall z \in Z, p \in [0; 1], F_i(a, z, p) = r_i$.

2) z_f и z_t находятся в одном блоке разбиения $\eta_i(z_f \equiv z_t(\eta_i))$, если и только если для любого $a_m \in A$ справедливо $F_i(a_m, z_f, p) = F_i(a_m, z_t, p)$. Иначе $\eta_i = z \in Z : \forall a \in A, p \in [0; 1], F_i(a, z, p) = r_i$.

Полученные таким образом (τ_i, π_i) – пара разбиений, т. е. каждый блок τ_i отображается любым входным сигналом в некоторый блок π_i. При этом τ_i – максимальное разбиение, образующее пару (τ_i, π_i).

Построим сеть $N = (Z_N, S_i, W_N, f_i, \psi_i, g)$, для чего определим все компоненты кортежа N. Начнём с входного и выходного алфавитов сети.

1) Полагаем $Z_N = Z$.

2) Полагаем $W_N = W$.

3) Построим компонентные автоматы $S_i = (A_i, Z_i, \delta_i), 1 \leqslant i \leqslant n$, т. е. определим базис сети.

   а) Полагаем $A_i = \pi_i$.

   б) Для определения входного алфавита компонентного автомата Z_i воспользуемся построенными разбиениями τ_i и η_i. Необходимо учитывать, что

(14) $$Z_i = \begin{cases} Z_i^{'} \times Z_i^{''} & \text{для } Z_i^{'} \neq \varnothing, \\ Z_i^{''} & \text{для } Z_i^{'} = \varnothing \end{cases}$$

   Здесь $Z_i^{'}$ и $Z_i^{''}$ – соответственно внутренний и внешний входные алфавиты автомата S_i.

   Если на вход функции f_i поступают $\pi_{i_1}, \pi_{i_1}, \ldots, \pi_{i_r}$ – выходы компонентных автоматов $S_{i_1}, S_{i_1}, \ldots, S_{i_r}$, то $(\pi_{i_1 i_2 \ldots i_r i}, \pi_i)$ – пара разбиений, где $\pi_{i_1 i_2 \ldots i_r i} \leqslant \tau_i$, так как τ_i – максимальное разбиение, образующее пару с π_i. Нетрудно также доказать, что $\pi_{i_1 i_2 \ldots i_r i} = \pi_{i_1} \pi_{i_1} \ldots \pi_{i_r} \pi_i$. Таким образом, для нахождения автоматов, выходы которых присоединяются ко входу f_i, необходимо найти такое произведение $\pi_{i_1} \pi_{i_1} \ldots \pi_{i_r} \pi_i = \pi_i \prod_{j=i}^{i_r} \pi_i$, которое не превосходит τ_i, и тогда выходы $S_{i_1}, S_{i_1}, \ldots, S_{i_r}$ должны быть соединены со входом f_i.

   Определим разбиение ε_i следующим образом:

(15) $$\varepsilon_i = \prod_{j=i}^{i_r} \pi_i, i \neq j,$$

   т. е. π_i не входит в это произведение, так как ко входу f_i могут присоединяться выходы других, отличных от S_i, компонентных автоматов. В автомате S_i полагаем $Z_i^{'} = \varepsilon_i, Z_i^{''} = \eta_i$, а Z_i определяется согласно равенствам (7).

в) Определим функцию переходов компонентного автомата $\delta_i : \pi_i \times Z_i \times p \to \pi_i$.

Пусть α, β и γ – соответственно блоки разбиений π_i, ε_i и η_i ($\alpha \in_i, \beta \in \varepsilon_i, \gamma \in \eta_i$). Если $\varepsilon_i = Z_i^{'} = \varnothing$, т. е. $\pi_i \leqslant \tau_i$ (π_i – СП-разбиение), то $\delta_i(\alpha, \gamma, p) = B_{\pi_i}(\delta(\alpha, \gamma, p))$. Таким образом, значение функции переходов δ_i равно блоку разбиения π_i, содержащему $\delta(\alpha, \gamma, p)$. Здесь δ – функция переходов декомпозируемого автомата $S = (A, Z, W, \delta, \lambda)$.

Если же $\varepsilon_i = Z_i^{'} \neq \varnothing$, то

$$\delta_i(\alpha, (\beta, \gamma), p) = \begin{cases} B_{\pi_i}(\delta(\alpha \cap \beta, \gamma, p)) & \alpha \cap \beta \neq \varnothing \\ \forall \pi_i \text{ (не определена)} & \alpha \cap \beta = \varnothing \end{cases} \tag{16}$$

4) Построим функции соединения компонентных автоматов $f_i : \times_{j=i}^{i_r} A_i \to Z_i^{'}$; иначе (в терминах разбиений) $f_i : \times_{j=i}^{i_r} \pi_i \to \varepsilon_i$.

Пусть $\pi_{i_1} \times \pi_{i_2} \times \ldots \times \pi_{i_r} = T_i$. Образуем множество $T_i^{'} \subseteq T_i, t_s \in T_i^{'}, t_s = (t_{s_1}, t_{s_2}, \ldots, t_{s_r})$, такое, что $\bigcap_{j=1}^{r} t_{s_j} \neq \varnothing$. Таким образом, в $T_i^{'}$ попадают только те векторы из T_i, у которых пересечение всех компонентов не пусто. Такое пересечение $\bigcap_{j=1}^{r} t_{s_j}$ имеет место, так как компоненты $t_{s_1}, t_{s_2}, \ldots, t_{s_r}$ – блоки разбиений, т. е. множества.

Функция f_i реализует отображение $T_i^{'} \to \varepsilon_i$. Значение f_i определим следующим образом:

$$f_i(t_{s_1}, t_{s_2}, \ldots, t_{s_r}) = p_k \in \varepsilon_i, \text{если} \bigcap_{j=1}^{r} t_{s_j} \subseteq p_k, \tag{17}$$

т. е. значение функции f_i равно тому блоку разбиения ε_i, в который входит пересечение компонентов $t_{s_1}, t_{s_2}, \ldots, t_{s_r}$.

На множестве $T_i \setminus T_i'$ функция f_i не определена.

5) Определим множество входных функций следующим образом:

$$\psi_i(z_f) = B_{\eta_i}(z_f), i = 1, \ldots, n, \tag{18}$$

т. е. значение функции ψ_i на $z_f \in Z$ равно блоку разбиения η_i, содержащему z_f. Отсюда ясно, что автомат S_i не различают тех букв входного алфавита Z, которые входят в один блок разбиения η_i.

6) Построим выходную функцию сети $g : (\times_{i=1}^{n} A_i) \times Z \to W$, иначе (в терминах разбиений) $g : (\times_{i=1}^{n} \pi_i) \times Z \to W$.

Пусть $\pi_1 \times \pi_2 \times \ldots \times \pi_n = H$. Образуем множество $H' \subseteq H, h_m \in H', h_m = (h_{m_1}, \ldots, h_{m_i}, \ldots, h_{m_n})$, такое, что $\bigcap_{i=1}^{n} h_{m_i} \neq \varnothing$. Таким образом, в H' попадают только те векторы из H, у которых пересечение всех компонентов не пусто.

Функция g реализует отображение $H' \times Z \to W$. Значение g определим следующим образом:

$$g((h_{m_1}, \ldots, h_{m_i}, \ldots, h_{m_n}), z_f, p) = \lambda(\bigcap_{i=1}^{n} h_{m_i}, z_f, p), \tag{19}$$

т. е. значение выходной функции сети совпадает со значением функции выхода λ декомпозируемого автомата S на паре (a_m, z_f), где a_m – состояние, попавшее в пересечение компонентов вектора $h_m \in H'$. На множестве $H \setminus H'$ функция g не определена.

В [2] показано, что построенная таким образом сеть реализует исходный автомат S. Разбиения τ_i и η_i однозначно определяется разбиением π_i (с помощью функции F_i); τ_i показывает, какие автоматы воздействуют на автомат S_i, а η_i определяет классы неразличимых автоматом S_i букв входного алфавита Z.

Таким образом, (π_i, τ_i, η_i) – характеристическая тройка автомата S_i. Стоит отметить, что τ_i и η_i являются наибольшими разбиениями, причем чем больше τ_i, тем меньше выходов других автоматов воздействует на S_i. Чем больше η_i, тем проще зависимость δ_i от внешнего входа Z. Использование разбиений τ_i и η_i при построении S_i является, таким образом, необходимым условием для построения сети N наименьшей сложности.

На рис. 1 представлена общая схема алгоритма декомпозиции вероятностного автомата.

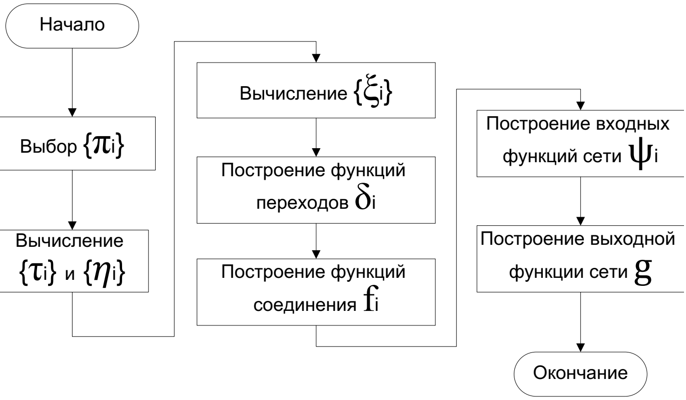

Рис. 1. Алгоритм декомпозиции вероятностного автомата

8. Выбор ортогонального множества разбиений

Из конструктивного способа построения сети N видно, что структура сети N определена в общем случае неоднозначно, поскольку неравенство $\pi_i \prod_{j=i}^{i_r} \pi_i \leqslant \tau_i$, которое определяет автоматы $S_{i_1}, S_{i_1}, \ldots, S_{i_r}$, влияющие на поведение S_i, может быть выполнено при различных совокупностях разбиений из $\pi_i, i = 1, \ldots, n$, где последнее является ортогональным множеством разбиений (т. е. $\prod_{i=1}^{n} \pi_i = \pi(0)$).

Как показано выше, от выбора ортогонального множества разбиений зависит структура и состав результирующей сети N.

Выбор данного множества должен быть осуществлён до начала декомпозиции автомата. Так как имеется однозначное соответствие между этим выбором и результирующей сетью, то в зависимости от целей декомпозиции можно ввести критерий выбора (оценки) конкретного множества, который позволит получить результат, наиболее полно удовлетворяющий этим целям.

Например, из всех возможных вариантов декомпозиции особый интерес представляют случаи, при которых распределение состояний по подавтоматам сети наиболее равномерно. Рассмотренный выше критерий даёт количественную оценку каждому множеству ортогональных разбиений (в процентах):

$$p = \left(1 - \frac{\sum_{j=1}^{k} \left|b_j - \frac{N}{k}\right|}{\sum_{i=1}^{n} 2 \cdot \frac{k_i N - k_i^2 + k_i - N}{k_i}}\right) \cdot 100\%, \tag{20}$$

где n – число элементов во множестве ортогональных разбиений, N – число элементов во множестве состояний исходного автомата, b_j – количество элементов в j-ом блоке оцениваемого разбиения, k- количество блоков, оцениваемого разбиения, k_i – количество блоков i-ого разбиения. Данный критерий даёт тем большую оценку, чем больше разбиение соответствует ему.

9. Заключение

В статье изложен метод декомпозиции вероятностного конечного автомата в сеть вероятностных автоматов. Установлено, что выбор ортогонального множества СП-разбиений однозначно задаёт структуру результирующей сети. Варьируя выбор данного множества, можно задавать некоторые параметры сети: количество элементов, пропорции распределения состояний по данным элементам. Данный метод может использоваться для исследования (анализа) и проверки правильности функционирования сложных дискретных систем, формализованных вероятностными автоматами.

Литература

1. БАРАНОВ С.И. *Синтез микропрограммных автоматов*. – Л.: Энергия Ленингр. отд-ние, 1979.
2. БУХАРАЕВ Р.Г. *Вероятностные автоматы. Итоги науки и техн.* / Сер. Теор. вероятн. Мат стат. Теор киберн., 1978, – С. 79-122.

3. КЕЭВАЛЛИК А.Э. *Теорема декомпозиции конечных автоматов*. – М.: Автоматика и вычислительная техника, 1974.
4. ЛАЗАРЕВ В.Г., ПИЙЛЬ Е.И. *Синтез управляющих автоматов*. – М.: Энергоатомиздат, 1989.
5. МЕЛИХОВ А.Н. *Ориентированные графы и конечные автоматы*. – М.: Наука, 1971.
6. НОРЕНКОВ И.П. *Основы автоматизированного проектирования: Учеб. для вузов.* – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 306 с.
7. BACON G.C. *The decomposition of stochastic automata.* // Inform. and Contr. – 1964, – No 7, – P. 320-339.

PROBABILISTIC FINITE STATE MACHINE DECOMPOSITION ALGORITHM

Igor Rudakov, Moscow State Technical University n.a. N.E. Bauman, Moscow, Cand.Sc., assistant professor (irudakov@yandex.ru).
Denis Shlyapenko, Moscow State Technical University n.a. N.E. Bauman, Moscow, student (dent.yootumi@gmail.com).

Abstract: A method of the probabilistic finite state machine decomposition is proposed. A method is based on the Main Decomposition Theorem, modified for application to probabilistic state machines. The parameters of decomposition are described and the system of parameters estimation is proposed.

Keywords: analysis of a control system, state machine, decomposition, stochastic system.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии М. В. Губко