

УДК 629.7.052
ББК 22.18

ИГРОВЫЕ ПРИНЦИПЫ ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫМ ОБЪЕКТОМ

Андриенко А. Я.¹, Тропова Е. И.,² Чадаев А. И.³
(Учреждение Российской академии наук
Институт проблем управления РАН, Москва)

Рассмотрена игровая постановка задачи импульсного терминального управления линейным нестационарным объектом при ограничении управляющих воздействий. Представлены принципы решения этой задачи с учетом действия априори ограниченных помех (ошибок измерения) в канале обратной связи системы. Приводится пример.

Ключевые слова: игровая постановка задачи управления, нестационарный объект, ограниченные помеха и управление.

1. Введение

Игровые задачи управления ([5] и др.) правомерно ставятся в следующих случаях.

1. Когда возмущения, действующие на разрабатываемую систему управления, определяются стратегией управления другой системы (или человека), цель которой противоположна цели искомого управления. Подобного рода конфликтная ситуация имеет место, например, в задаче преследования [2].

2. Когда неизвестны вероятностные характеристики возмущений и априори задаются лишь ограничения, стесняющие возмущения (например, ограничения по модулю возмущений). Заметим, что в этом случае возможны и другие подходы к фор-

¹ Анатолий Яковлевич Андриенко, заведующий лабораторией, доктор технических наук, профессор (vladguc@ipu.rssi.ru).

² Елена Ивановна Тропова, научный сотрудник (тел. (495) 334-88-71).

³ Александр Иванович Чадаев, старший научный сотрудник, кандидат технических наук (тел. (495) 334-88-71).

мированию управлений: вероятностный (в предположении равномерности распределения возмущений в допустимом диапазоне) [3] и адаптивный [4].

3. Когда в силу особой важности результатов работы системы управления требуется, чтобы отклонения от цели управления, характеризующие точность управления, не превосходили заданных значений при любых априорно допустимых сочетаниях возмущений и помех [1]. Такое положение характерно, например, для систем жизнеобеспечения человека.

В статье ставится и решается задача формирования игровых принципов терминального управления линейным нестационарным объектом с учетом ограничений на управляющие воздействия; основное отличие этой задачи от известных состоит в учете действия в канале обратной связи системы помех – ошибок измерения.

2. Постановка задачи

Рассматривается линейный нестационарный объект управления, выходная координата которого измеряется в дискретные моменты времени i . Уравнения, описывающие объект, имеют вид

$$(1) \quad x_{i+1} = A_i \mathbf{v} + B_i \bar{u}_i, \quad i = 0, 1, \dots, I,$$

где $A_i = \|a_{in}\|$ – матрица-строка коэффициентов a_{in} , $n = 1, 2, \dots, N$; $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_N)^T$ – вектор возмущений, действующих на объект; $B_i = \|b_{ir}\|$ – матрица-строка коэффициентов b_{ir} , $r = 1, 2, \dots, i$; \bar{u}_i – временная последовательность управлений u_1, u_2, \dots, u_i . Отметим, что в (1) отсутствует начальное управление u_0 , обоснованный выбор которого в условиях поставленной задачи невозможен.

Измеренная сумма величины x_i и аддитивной случайной ошибки h_i ($y_i = x_i + h_i$, $i = 1, 2, \dots, I$) поступает на вход управляющего устройства. Управление должно удовлетворять неравенству

$$(2) \quad |u_i| \leq U_i, \quad i = 1, 2, \dots, I;$$

где U_i – максимально допустимое значение абсолютной величины u_i .

Считается, что возмущения и ошибки измерения по абсолютной величине не превосходят соответственно некоторых известных величин $V_n, n = 1, 2, \dots, N$, и $H_i, i = 1, 2, \dots, I$:

$$(3) \quad |v_n| \leq V_n, \quad |h_i| \leq H_i.$$

При формулировке задачи синтеза системы управления условно будем рассматривать процесс управления объектом (1) как некоторую игру между «природой», воздействующей на процесс управления выбором значений v_n , а также ошибок измерения h_i , и «конструктором», определяющим функцию управления $u_i, i = 1, 2, \dots, I$, от измеренных координат объекта и предшествующих управлений $u_j, j = 1, 2, \dots, i - 1$.

Примем, что исход игры характеризуется величиной $|x_{I+1}|$ (т.е. модулем значения выходной координаты в терминальный $(I + 1)$ -й момент времени), которую будем рассматривать как выигрыш для природы и проигрыш для конструктора: в интересах природы увеличить выигрыш $|x_{I+1}|$, а в интересах конструктора сделать свой проигрыш $|x_{I+1}|$ возможно меньшим.

Таким образом, ставится игровая задача определения функции $u_i = u_i(\bar{y}_i, \bar{u}_{i-1}), i = 1, 2, \dots, I$, удовлетворяющей критерию

$$(4) \quad \inf_{\mathbf{u}_I \in \omega_k} \sup_{\mathbf{v}, \bar{h}_I \in \omega_n} |x_{I+1}(\mathbf{u}_I, \mathbf{v}, \bar{h}_I)|,$$

где допустимые области ω_k и ω_n определяются соответственно неравенствами (2) и (3).

Отметим, что одна из сторон в игре (природа) влияет на процесс управления не только воздействием возмущениями, но и посредством искажения используемой другой стороной информации об игровой обстановке (через помехи h_i в измерительном канале).

3. Решение задачи

Введя вектор $\bar{x}_i^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_i^*)$, координаты которого определяются соотношением

$$x_i^* = x_i - B_{i-1} \bar{u}_{1(i-1)},$$

будем использовать форму записи уравнений объекта:

$$(5) \quad \bar{x}_{i+1}^* = \mathbf{A}_i \mathbf{v}, \quad i = 0, 1, \dots, I,$$

где \mathbf{A}_i – матрица, составленная из строк A_r , $r = 0, 1, \dots, i$.

В соответствии с принципом динамического программирования вначале будем определять управление u_i^* в дискретный момент времени I . Для этого представим критерий (4) в виде

$$(6) \quad \inf_{\mathbf{u}_I \in \omega_k} \sup_{\mathbf{v}, \bar{h}_I \in \omega_n} \left| A_I \mathbf{v} + \sum_{r=1}^{I-1} b_{I,r} u_r + b_{II} u_I \right|.$$

Рассмотрим вначале случай, когда отсутствуют ограничения (2) на управления. Величина u_I тогда представляет собой линейную функцию измеренных координат \bar{y}_I и предшествующих управлений \bar{u}_{I-1} , которая с учетом критерия (6), а также уравнения (5) может быть представлена в виде

$$(7) \quad u_I^* = -\frac{1}{b_{II}} \left(G_I \bar{y}_I + \sum_{r=1}^{I-1} b_{I,r} u_r \right),$$

где $G_I = \|g_{I\ell}\|$ – матрица-строка искоемых коэффициентов оптимального управления u_I^* ; \bar{y}_I^* – вектор, составленный из измеренных значений $y_i^* = x_i^* + h_i$ величин x_i^* , $i = 1, 2, \dots, I$.

С учетом (7) исходный критерий (6) запишем следующим образом:

$$(8) \quad \inf_{G_I} \sup_{\mathbf{v}, \bar{h}_I \in \omega_n} \left| A_I \mathbf{v} - G_I \bar{y}_I^* \right|.$$

Любые сочетания по N уравнений из числа $I + 1$ уравнений (5) составляют равносильные системы линейных уравнений, т.е. они имеют одно и то же решение относительно вектора \mathbf{v} . Поэтому можно составить линейные комбинации из этих уравнений:

$$(9) \quad \boldsymbol{\theta}^{(I)} \mathbf{A}_{I-1} \mathbf{v} = \boldsymbol{\theta}^{(I)} \bar{x}_I^*,$$

где $\boldsymbol{\theta}^{(I)} = \|\mathcal{G}_{n\ell}^{(I)}\|$ – матрица произвольных коэффициентов $\mathcal{G}_{n\ell}^{(I)}$, $n = 1, 2, \dots, N$; $\ell = 1, 2, \dots, I$.

Решение системы уравнений (9), записанное в предположении существования матрицы, обратной $\boldsymbol{\theta}^{(I)} \mathbf{A}_{I-1}$,

$$\mathbf{v} = \left(\boldsymbol{\theta}^{(I)} \mathbf{A}_{I-1} \right)^{-1} \boldsymbol{\theta}^{(I)} \bar{x}_i^*,$$

не зависит от выбора коэффициентов $\mathcal{G}_{nI}^{(I)}$.

Будем искать строку G_i коэффициентов управления (7) в виде

$$(10) \quad G_i = A_i \Delta^{(I)} \left(\boldsymbol{\theta}^{(I)} \mathbf{A}_{I-1} \right)^{-1} \boldsymbol{\theta}^{(I)},$$

где $\boldsymbol{\theta}^{(I)} \mathbf{A}_{I-1}$ – неособенная матрица (см. (9)); $\Delta^{(I)}$ – диагональная матрица коэффициентов $\delta_n^{(I)}$ порядка N .

Тогда с учетом соотношения $\bar{y}_i^* = \bar{x}_i^* + \bar{h}_i$ критерий (8) может быть представлен в виде

$$(11) \quad \inf_{\Lambda^{(I)}, \boldsymbol{\theta}^{(I)}} \sup_{\mathbf{v}, \bar{h}_i \in \omega_n} \left| A_i \left[\tilde{\Delta}^{(I)} \mathbf{v} - \Delta^{(I)} \left(\boldsymbol{\theta}^{(I)} \mathbf{A}_{I-1} \right)^{-1} \boldsymbol{\theta}^{(I)} \bar{h}_i \right] \right|.$$

Здесь $\tilde{\Delta}^{(I)}$ – диагональная матрица, ненулевые элементы которой равны $1 - \delta_n^{(I)}$.

Наибольшее значение критерия $|x_{I+1}|$ по всем возможным величинам возмущений и помех достигается, если величины v_n , $n = 1, 2, \dots, N$, и h_i , $i = 1, 2, \dots, I$, равны по абсолютной величине их предельно допустимым значениям V_n и H_i соответственно, а знак совпадает со знаком коэффициентов, с которыми эти величины входят в (11). Поэтому для определения управления u_i^* следует использовать критерий

$$(12) \quad \inf_{\Lambda^{(I)}, \boldsymbol{\theta}^{(I)}} \left(|\Xi_I| \mathbf{V} + |G_I| \bar{H}_I \right),$$

где $\Xi_I = \|\xi_{in}\| = A_i \tilde{\Delta}^{(I)}$ – матрица-строка коэффициентов $\xi_{in} = a_{in} (1 - \delta_n^{(I)})$, $n = 1, 2, \dots, N$; G_I определяется соотношением (10), а вертикальные черточки, в которые заключаются матрицы, означают, что все элементы матриц берутся по абсолютной величине; \mathbf{V} – вектор, составленный из предельных значений возмущений.

В рассматриваемом случае, когда отсутствуют ограничения на управление, значение (12) не зависит от управлений, предше-

ствующих последнему, и поэтому определение u_i^* , $i = 1, 2, \dots, I-1$, может быть проведено исходя из других условий, формулируемых, например, в виде дополнительного игрового критерия.

В случае же, когда на управление наложено ограничение (2), оптимальное управление в момент I принимает вид

$$u_I^* = \begin{cases} u_I, & \text{если } |u_I| \leq U_{\text{доп}I}, \\ U_{\text{доп}I} \text{ sign } u_I, & \text{если } |u_I| > U_{\text{доп}I}, \end{cases}$$

где u_I – линейная функция измеренных в предшествующие моменты времени координат и предшествующих управлений, коэффициенты которой определяются при помощи матриц $\Delta^{(1)}$, $\theta^{(1)}$, полученных из условия (12).

Определение предшествующих управлений u_i^* , $i = 1, 2, \dots, I-1$, может проводиться в нескольких вариантах. Ограничимся представлением одного из них.

Полагается, что величина $U_{\text{доп}i}$ является неизвестной в моменты времени $j = 1, 2, \dots, i-1$ и принимающей любое значение в диапазоне $(0, U)$. Такой вариант имеет место, например, при оптимизации одной из взаимосвязанных систем с общими управляющими органами. В этом же варианте целесообразно определять управление и в том случае, когда значение $U_{\text{доп}i}$ априори известно, но к качеству управления не предъявляется никаких дополнительных требований, помимо оговариваемых критерием $R(u)$.

При выборе управления u_i^* , $i = 1, 2, \dots, I-1$, наиболее тяжелые для «конструктора» условия будущих управлений складываются при $U_{\text{доп}s} = 0$, $s = i+1, i+2, \dots, I$. С учетом ранее приведенных соотношений оптимальное управление определяется следующим образом:

$$(13) \quad u_i^* = \begin{cases} u_i, & \text{если } |u_i| \leq U_{\text{доп}i}, \\ U_{\text{доп}i} \text{ sign } u_i, & \text{если } |u_i| > U_{\text{доп}i}. \end{cases}$$

Здесь

$$u_i = \frac{1}{b_{ii}} \left(G_i \bar{y}_i^* + \sum_{r=1}^{i-1} b_{ir} u_r \right),$$

а коэффициенты G_i определяются из условий

$$(14) \quad \begin{aligned} G_i &= A_i \Delta^{(i)} (\theta^{(i)} A_{i-1})^{-1} \theta^{(i)}; \\ R(u_i^*) &= \min_{\Delta^{(i)}, \theta^{(i)}} (|\Xi_i| V + |G_i| \bar{H}_i); \quad \Xi_i = A_i \tilde{\Delta}^{(i)}. \end{aligned}$$

4. Демонстрационный пример

Для иллюстрации изложенного метода рассмотрим простейший пример: на объект управления, представляющий собой интегрирующее звено, действует одно возмущение V , а выходная координата измеряется через равные промежутки времени ΔT . Уравнение (1) в этом примере имеет вид

$$(15) \quad x_{i+1} = (i+1)\Delta T v + \Delta T \sum_{r=1}^i u_r, \quad i = 0, 1, \dots, I.$$

Измеренное в моменты времени $i\Delta T$ с аддитивной ошибкой h_i значение выходной координаты y_i поступает на вход управляющего устройства, формирующего управление u_i , ограниченное по модулю величиной $U_{\text{доп.}i}$. Ограничиваются также и абсолютные величины ошибок измерения – величиной $H_i = H$, $i = 1, 2, \dots, I$. Требуется определить алгоритм управления, обеспечивающий выполнение условия (4).

Поскольку возмущение V является скаляром, то матрица коэффициентов θ содержит только одну строку, а матрицы A_i и $\Delta^{(i)}$ состоят из одного элемента, причем, как следует из (15), $a_i = (i+1)\Delta T$. Ограничения на величину v не наложено; следовательно, в соответствии с изложенным $\Delta^{(i)} = 1$, $i = 1, 2, \dots, I$. Как следует из (14), коэффициенты функции управления в момент времени i определяются из условий

$$(16) \quad g_{i\ell} = (I+1)g_{i\ell}^{(i)} / \sum_{j=1}^i j g_{1j}^{(i)}, \quad \ell = 1, 2, \dots, i;$$

$$(17) \quad R(u_i^*) = \min_{g_{i\ell}^{(i)}} \left[(I+1)H \sum_{\ell=1}^i |g_{1\ell}^{(i)}| / \left| \sum_{\ell=1}^i \ell g_{1\ell}^{(i)} \right| \right]; \quad i = 1, 2, \dots, I.$$

Условие (17) достигается при $g_{1\ell}^{(i)} = 0$, $\ell = 1, 2, \dots, i-1$, и $g_{1i} \neq 0$. Это означает, что в (16) $g_{i\ell} = 0$, $\ell = 1, 2, \dots, i-1$, и $g_{ii} = (I+1)/i$, а искомая оптимальная функция управления имеет вид (13), где

$$u_i = -\frac{1}{i\Delta T} \left[(I+1)y_i - (I+1-i)\Delta T \sum_{r=1}^{i-1} u_r \right], \quad i = 1, 2, \dots, I.$$

В рассмотренном примере проявляется довольно типичная для игровых задач управления особенность: несмотря на то, что при синтезе системы не накладывалось ограничений на структуру алгоритма управления, оптимальное в игре управление формируется с учетом только части располагаемой информации о предыстории процесса управления.

Литература

1. ГАДЖИЕВ М.Ю. *Применение теории игр к некоторым задачам автоматического управления* // Автоматика и телемеханика. – 1962. – Т. 23, №8. – С. 1023–1036.
2. КРАСОВСКИЙ Н.Н. *Об одной задаче преследования* // Прикладная математика и механика. – 1963. – Вып. 2. – С. 27–32.
3. ФЕЛЬДБАУМ А.А. *Основы теории оптимальных автоматических систем*. – М.: Физматгиз, 1963.
4. ЦЫПКИН Я.З. *Адаптация и обучение в автоматических системах*. – М.: Наука, 1960.
5. ЧЕРНОУСЬКО Ф.Л., МЕЛИКЯН А.А. *Игровые задачи управления и поиска*. – М.: Наука, 1978.

GAME-THEORETIC PRINCIPLES OF TERMINAL CONTROL FOR NON-STATIONARY OBJECT

Anatolii Andrienko, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Laboratory Head, Doctor of Science, professor (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, (495) 334-88-71, vladguc@ipu.rssi.ru).

Elena Tropova, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, researcher, (495) 334-88-71, vladguc@ipu.rssi.ru

Alexander Chadaev, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, cand. Sc., senior scientific worker, (495) 334-88-71, vladguc@ipu.rssi.ru

Abstract: A game-theoretic setting of a problem of pulsed terminal control for a linear non-stationary object is considered under control action constraints. The solution principles are introduced, which take into account a priori limited noise in the feedback channel of the system. The example is given.

Keywords: game statement of a problem control, non-stationary object, the limited noise and control.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В.В. Мазаловым