УДК 519.177+519.217.2+517.977.1
ББК 22.18

ОБ ОБЛАСТИ СХОДИМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ДОСТИЖЕНИЯ КОНСЕНСУСА[1]

Агаев Р. П.[2]
(*Учреждение Российской академии наук Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва*)

В статье рассмотрена непрерывная модель согласования характеристик в многоагентных системах, в которых соответствующая лапласовская матрица диагонализуема и нуль является ее простым собственным значением. Доказано, что матрица, через которую выражается предел решения системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющего начальным условиям, как и в случае дискретной модели согласования мнений является собственным проектором лапласовской матрицы.

Ключевые слова: многоагентные системы, децентрализованное управление, консенсус, лапласовская матрица, матрица Кирхгофа, модель Де Гроота, управление.

1. Введение

Стохастические матрицы и матрицы, связанные с ними, играют ключевую роль при моделировании и изучении социальных сетей. В [4, 6] в русле классических работ (таких, как [3]) раз-

---

[1] *Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №09-07-00371a и Программы Президиума РАН «Математическая теория управления».*

[2] *Рафиг Пашаевич Агаев, к.т.н., с.н.с. (agaraf@rambler.ru, Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, тел. (495) 334-88-69).*

работаны оптимизационные модели и методы информационного влияния и управления в социальных сетях. Согласно одной из таких моделей, модели Де Гроота [8], если $s(0)=(s_1^0,\ldots,s_n^0)^{\mathrm{T}}$ – вектор начальных мнений членов группы, а $s(k) = (s_1^k,\ldots,s_n^k)^{\mathrm{T}}$ – вектор мнений после k-го шага согласования, то $s(k) = Ps(k-1)$, $k = 1, 2, \ldots$, где P – стохастическая матрица влияний, элемент p_{ij} которой задает степень влияния мнения j-го агента на мнение i-го. Необходимым и достаточным условием сходимости мнений агентов при любом векторе исходных мнений является регулярность матрицы P.

Отметим, что регулярность матрицы P тесно связана с наличием остовного исходящего дерева в орграфе влияний. Это условие в свою очередь гарантирует сходимость процедур согласования характеристик в более общих моделях управления многоагентными системами. В работе [2] предложено одно решение задачи дискретного согласования характеристик в случае, когда это условие нарушается, и описано подпространство T_P начальных мнений (где P – матрица влияний), обеспечивающих сходимость процедуры согласования в модели Де Гроота.

Для дифференциальной модели в [9] (теорема 3) доказано, что если орграф коммуникаций является сильно связным, то для любого вектора начальных мнений $s(0)$ консенсус определяется произведением $w_r w_l^{\mathrm{T}} s(0)$, где w_r и w_l – правый и левый собственные вектора единственного нулевого собственного значения матрицы L соответственно. В недавно опубликованной работе [3] (лемма 3) этот результат был доказан для орграфа коммуникаций, содержащего исходящее дерево (не обязательно сильно связного).

Автор данной статьи не встречал работ, касающихся дифференциальной модели согласования характеристик в многоагентной системе, орграф коммуникаций которой не содержит исходящего дерева.

В настоящей работе рассматривается непрерывная модель согласования характеристик в многоагентных системах, в которых соответствующая лапласовская матрица диагонализуема и нуль является ее простым собственным значением. Конструктивные доказательства предложений могут быть использованы для более общего случая, когда лапласовская матрица орграфа коммуникаций не обязательно диагонализуема и нуль не является простым собственным значением.

Статья имеет следующую структуру. После введения приведены некоторые определения и обозначения. В разделе 3 доказано, что если матрица L диагонализуема и нуль является ее простым собственным числом, то одна из строк трансформирующей матрицы пропорциональна строкам нормированной матрицы максимальных исходящих лесов, которая является собственным проектором для лапласовской матрицы. Этот результат в разделе 4 применен для анализа асимптотического поведения многоагентной системы, и установлено, что если орграф коммуникаций системы состоит из не связанных базовых компонент, то области сходимости как для дискретных моделей, так и для непрерывных моделей определяются соответствующим собственным проектором.

2. Основные термины, обозначения и предварительные результаты

Орграф коммуникаций Γ определим множествами вершин $\{1, \ldots, n\}$ и дуг с неотрицательными весами.

Лапласовская матрица[3] $L = L(\Gamma) = (\ell_{ij})$ орграфа Γ определяется следующим образом: при $j \neq i$ полагают $\ell_{ij} = -w_{ji}$, где w_{ji} – вес дуги (j, i), если в Γ имеется дуга (j, i), и $\ell_{ij} = 0$ в

[3] *В литературе ее также называют матрицей Кирхгофа.*

противном случае; $\ell_{ii} = \sum\limits_{k \neq i} w_{ki},\ i, j = 1, \ldots, n.$

Пусть n – число агентов многоагентной системы, $x_i(t)$ – характеристика i-го агента, $a_{ij}(t) \geqslant 0$ – вес, с которым i-й агент учитывает расхождение в значении характеристики с j-м агентом. Рассмотрим дифференциальную модель:

$$\dot{x}_i(t) = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) \left(x_i(t) - x_j(t)\right), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где $a_{ij} = w_{ji}$.

В матричной форме модель (1) можно представить как $\dot{x}(t) = -L(t)x(t)$.

Для любой лапласовской матрицы $L(\Gamma) = (\ell_{ij})$ взвешенного орграфа Γ (веса дуг – произвольные положительные числа) можно определить стохастическую матрицу влияний:

$$P = I - \varepsilon L, \tag{2}$$

где $\varepsilon < \left(\max \ell_{ii}\right)^{-1}$.

Любой максимальный по включению сильный подграф орграфа называют его *сильной компонентой* или *бикомпонентой*. *Базовая бикомпонента* – такая бикомпонента, в которую не входят дуги извне.

Будем говорить, что *матрица имеет предел*, если последовательность ее степеней стремится к некоторой матрице.

Если стохастическая матрица P орграфа влияний имеет предел P^{∞}, то

$$P^{\infty} = \bar{J}, \tag{3}$$

где $\bar{J} = (j_{kr})$ – нормированная матрица максимальных исходящих лесов соответствующего взвешенного орграфа Γ (следствие матричной теоремы о деревьях для цепей Маркова [5], см. также теорему 7 из [1]). Отметим, что $\bar{J}$ является собственным проектором для L. Элементы матрицы $\bar{J} = (j_{kr})$ определяются следующим образом:

$$j_{kr} = \frac{q_{kr}}{\sigma}, \tag{4}$$

где q_{kr} – вес множества максимальных исходящих из вершины r лесов, в которых вершина k достижима из r; σ – вес множества всех максимальных исходящих лесов в орграфе Γ.

В пространстве векторов $s(0)$ начальных мнений подпространство T_P назовем областью сходимости, если каждый вектор из T_P матрицей P^∞ преобразуется в вектор с одинаковыми компонентами.

В [2] следующая теорема доказана для дискретной модели.

Теорема 1. *Если степени стохастической матрицы* P *сходятся, то* $T_P = \mathcal{R}(L) \oplus T_1$, *где* $\mathcal{R}(L)$ *– образ матрицы* $L = I - P$, T_1 *– линейная оболочка вектора* $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$.

3. О свойствах трансформирующей матрицы для L

Предположим, что матрица L орграфа диагонализуема и нуль является ее простым собственным значением. Такой орграф всегда содержит исходящее дерево. Через W обозначим невырожденную матрицу, все столбцы которой являются линейно независимыми собственными векторами L. Предположим, что вершины орграфа пронумерованы таким образом, что первая вершина принадлежит базовой бикомпоненте. Пусть первый столбец матрицы W является собственным вектором, соответствующим нулевому собственному значению матрицы L:

$$W = \begin{pmatrix} t & w_{12} & \ldots & w_{1n} \\ t & w_{22} & \ldots & w_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t & w_{n2} & \ldots & w_{nn} \end{pmatrix}, \quad (t \neq 0).$$

Обозначим, через W_0 матрицу, полученную из W заменой всех столбцов кроме первого, соответствующего нулевому собственному значению, нулевым вектором. Столбец нулевого собственного значения не меняем.

W можно представить в виде

$$W = L_t K, \tag{5}$$

где

$$L_t = \begin{pmatrix} t & \ell_{12} & \dots & \ell_{1n} \\ t & \ell_{22} & \dots & \ell_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t & \ell_{n2} & \dots & \ell_{nn} \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix}.$$

Из невырожденности матрицы W следует, что K – невырожденная матрица.[4]

Предложение 1. *Если матрица L диагонализуема и нуль является ее простым собственным числом, то матрица W_0W^{-1} совпадает с нормированной матрицей максимальных исходящих лесов $\bar{J}$, т.е. с собственным проектором L и каждая строка $\bar{J}$ пропорциональна первой строке матрицы W^{-1}.*

Доказательство предложения 1. Согласно матричной теореме о деревьях (см., например, теорему 16.9′ в [7], где результат формулируется для матрицы L^{T} и невзвешенных орграфов) алгебраическое дополнение любого элемента k-й строки матрицы L равно весу множества всех деревьев, исходящих из вершины k. Поскольку в матрице L_t все элементы первого столбца равны t, k-й элемент первой строки матрицы L_t^{-1} определяет нормированный вес множества всех исходящих деревьев, в которых k является корнем. Под нормированным мы понимаем долю веса множества деревьев, исходящих из вершины k.

Поскольку $W_0K^{-1} = W_0$, а первая строка матрицы tL_t^{-1} совпадает со строками собственного проектора матрицы L, то получим:

$$W_0W^{-1} = W_0L_t^{-1} = \bar{J}\,.$$

□

[4] L_t – *невырожденная по построению.*

4. Согласование характеристик в дифференциальной модели с начальным вектором состояний

Рассмотрим матричную запись дифференциальной модели, заданной уравнением (1):

$$x'(t) = -Lx(t), \tag{6}$$

где $x(t)$ – вектор характеристик агентов; L – диагонализуемая лапласовская матрица орграфа коммуникаций с единственным нулевым собственным значением.

Предложение 2. *Если $x(t)$ – решение уравнения* (6)*, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x_0$, то*

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \bar{J}\,x_0, \tag{7}$$

где $\bar{J}$ – собственный проектор матрицы L.

Доказательство предложения 2. Общее решение (6) имеет вид

$$x(t) = X(t)C,$$

где $X(t)$ – фундаментальная матрица уравнения (6); C – произвольный постоянный вектор.

Находим решение (6), удовлетворяющее начальным условием $x(0) = x_0$:

$$x(t) = X(t)X^{-1}(0)x_0.$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = X_\infty X^{-1}(0)x_0.$$

Заметим, что $X_\infty = W_0$ и $X(0) = W$. В силу предложения 1

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \bar{J}\,x(0).$$

□

Если лапласовская матрица диагонализуема и соответствующий орграф состоит только из базовых бикомпонент, то ее собственный проектор имеет вид

$$\bar{J} = \begin{pmatrix} \bar{J}_{11} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{J}_{22} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \bar{J}_{ss} \end{pmatrix}.$$

В этом случае для согласования характеристик может быть применена процедура ортогональной проекции, предложенная в [2].

Пример. В качестве примера рассмотрим орграф коммуникаций, состоящий из бикомпоненты $\{5, 6\}$, доминируемой единственной базовой бикомпонентой на множестве вершин $\{1, 2, 3, 4\}$.

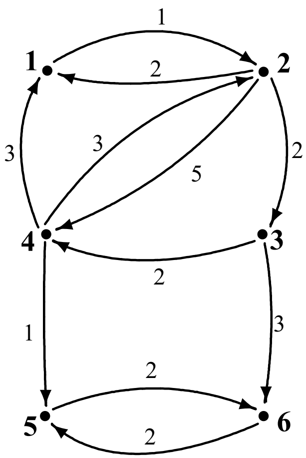

Рис. 1.

Рассмотрим лапласовскую матрицу этого орграфа:

$$L = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы L:
(0; 9,162; 1,764; 2,838; 6; 6,236).

Поскольку все они различны, матрица L диагонализуема. Построим трансформирующую матрицу W, столбцы которой – собственные векторы, соответствующие найденным выше собственным значениям L:

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}395 & 0 & -0{,}209 & 0{,}684 & 0 \\ 1 & 0{,}395 & 0 & -0{,}209 & -0{,}049 & 0 \\ 1 & -0{,}110 & 0 & 0{,}498 & 0{,}024 & 0 \\ 1 & -0{,}812 & 0 & -0{,}011 & -0{,}196 & 0 \\ 1 & 0{,}126 & 0{,}851 & -0{,}813 & -0{,}342 & -0{,}526 \\ 1 & 0{,}019 & 0{,}526 & -0{,}060 & 0{,}611 & 0{,}851 \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрица W – невырожденная, имеет место

$$X(t) =$$
$$= (w_1; w_2 e^{-9{,}162t};\ w_3 e^{-1{,}764t};\ w_4 e^{-2{,}838t};\ w_5 e^{-6t};\ w_5 e^{-6{,}236t}).$$

Тогда

$$X_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X^{-1}(0) = W^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}090 & 0{,}449 & 0{,}231 & 0{,}231 & 0 & 0 \\ -0{,}214 & 0{,}890 & 0{,}262 & -0{,}938 & 0 & 0 \\ -0{,}353 & -1{,}141 & 0{,}810 & -0{,}693 & 0{,}851 & 0{,}526 \\ -0{,}294 & -0{,}636 & 1{,}601 & -0{,}671 & 0 & 0 \\ 1{,}364 & -1{,}364 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}883 & 1{,}092 & -0{,}664 & 0{,}131 & -0{,}526 & 0{,}851 \end{pmatrix},$$

$$X_\infty W^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}090 & 0{,}449 & 0{,}231 & 0{,}231 & 0 & 0 \\ 0{,}090 & 0{,}449 & 0{,}231 & 0{,}231 & 0 & 0 \\ 0{,}090 & 0{,}449 & 0{,}231 & 0{,}231 & 0 & 0 \\ 0{,}090 & 0{,}449 & 0{,}231 & 0{,}231 & 0 & 0 \\ 0{,}090 & 0{,}449 & 0{,}231 & 0{,}231 & 0 & 0 \\ 0{,}090 & 0{,}449 & 0{,}231 & 0{,}231 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Заключение

В работе доказано предложение, согласно которому, если лапласовская матрица диагонализуема и нуль является ее единственным собственным значением, то одна из строк обратной трансформирующей матрицы пропорциональна строкам собственного проектора данной лапласовской матрицы. Это предложение применено для анализа дифференциальной модели согласования характеристик. Установлено, что величина, к которой сходятся характеристики агентов, равна скалярному произведению вектор-строки собственного проектора лапласовской матрицы и вектора начальных мнений агентов.

Более общий случай (когда лапласовская матрица орграфа коммуникаций не обязательно диагонализуема, за счет ненулевых собственных значений, и нуль не является простым собственным значением) в настоящей статье не рассматривается. Можно высказать предположение, что для общего случая в непрерывных моделях согласования характеристик предельная матрица, входящая в решение системы уравнений, также совпадает с собственным проектором лапласовской матрицы, предельный случай обеих – непрерывной и дискретной моделей описывается единым механизмом, и область сходимости дифференциальной модели совпадет с $\mathcal{R}(L) \oplus T_1$.

Литература

1. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Матрица максимальных исходящих лесов орграфа и ее применения* // Автоматика и телемеханика. – 2000. – №9. – С. 15–43.
2. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Метод проекции в задаче о консенсусе и регуляризованный предел степеней стохастической матрицы* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – №12. –С. 38–59.
3. АМЕЛИНА Н.А., ФРАДКОВ А.Л. *Метод усредненных моделей в задаче достижения консенсуса* // Стохастическая оптимизация в информатике. – 2012. –Вып. 8, №1. –С. 3–39.
4. БАРАБАНОВ И.Н., КОРГИН Н.А., НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Динамические модели информационного управления в социальных сетях* // Автоматика и телемеханика. – 2010. – №11. – С. 172–182.
5. ВЕНТЦЕЛЬ А.Д., ФРЕЙДЛИН М.И. *О малых случайных возмущениях динамических систем* // Успехи мат. наук. – 1970. – Т. 25. – С. 3–55.
6. ГУБАНОВ Д.А., НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Социальные сети: модели информационного влияния,*

управление и противоборства. – М.: Физматлит, 2010. – 228 с.
7. ХАРАРИ Ф. *Теория графов*. – М.: Мир, 1973. – 300 с.
8. DeGROOT M.H. *Reaching a consensus* // J. Amer. Statist. Assoc. – 1974. – Vol. 69, No. 345. – P. 118–121.
9. OLFATI-SABER R.M., MURRAY R.M. *Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays* // IEEE Transactions Automatic Control. – 2004. – Vol. 49, No. 9. – P. 1520–1533.

THE REGION OF CONVERGENCE OF THE DIFFERENTIAL MODEL OF CONSENSUS

Rafig Agaev, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Candidate of Science, senior researcher (agaraf@rambler.ru, Moscow, Profsoyuznaya str., 65, (495)334-88-69).

Abstract: This paper is devoted to consensus problems in continuous multi-agent systems whose corresponding Kirchhoff matrix is diagonalizable and 0 *is a simple eigenvalue of L. It is proved that the limiting matrix of the solution of the system of linear differential equations satisfying the initial condition is a eigenprojection of the Kirchhoff matrix L, which also determines and is defined the region of convergence to consensus of the DeGroot algorithm.*

Keywords: multi-agent systems, decentralized control, consensus, Laplacian matrix, Kirchhoff matrix, DeGroot model, control.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Б. Т. Поляком