УДК 513.88:519.177:519.173:519.816
ББК 22.18

ПРОЕКЦИОННО-ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕДУРЫ ПРИБЛИЖЕННОГО ПОСТРОЕНИЯ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Исмаилов И. Г.[1]
(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

Приводятся результаты, относящиеся к проблемам приближенного построения режимов функционирования сложных нелинейных систем и специальным численным процедурам. Исследуются некоторые аспекты теории итерационных и проекционных процедур в задачах приближенного построения колебательных режимов в нелинейных системах, в частности в системах автоматического регулирования. Предлагается процедура выбора начального приближения итерационного метода, основанная на использовании априорной информации об отыскиваемом колебательном режиме.

Ключевые слова: оптимальное управление, автоматическое регулирование, вынужденные колебания, приближенные методы.

1. Введение

Итерационные и проекционные методы составляют два важнейших класса численных процедур, применяемых для построения решений различных задач, возникающих в теории управления и оптимизации. Построение общей теории таких методов базируется на идеях и методах современного функ-

[1] *Илхам Гусейнкулу оглы Исмаилов, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник* (*Москва, ул. Профсоюзная, д.65, тел.* (*495*) *334-79-00, iig07@mail.ru*).

ционального анализа, которые не только позволили существенно упростить взгляд на природу многих численных методов, но и привели к разработке принципиально новых вычислительных схем в проблемах современной теории управления. Одна из таких схем описана далее в задачах приближенного построения колебательных режимов в нелинейных системах.

Многочисленная литература посвящена приближенному построению колебательных режимов в нелинейных системах (см., например, работы [1–18]). Особое место в числе прочих занимает метод гармонического баланса; он сводит приближенное построение к решению конечной системы скалярных уравнений (в общем случае нелинейных). Решая эту систему, находят коэффициенты тригонометрических многочленов, являющихся приближениями к отыскиваемому колебательному режиму.

Для решения системы уравнений гармонического баланса часто применяют итерационные процедуры. Скорость сходимости таких процедур существенно зависит от выбора начального приближения. Мы показываем зависимость скорости сходимости проекционно-итерационной процедуры от выбора вспомогательного аппроксимирующего подпространства малой размерности. Если отыскиваемый колебательный режим достаточно хорошо аппроксимируется тригонометрическим многочленом низкого порядка, то в качестве начального приближения следует брать решение, найденное методом гармонического баланса этого порядка. Информация о структуре колебания используется и для оценки погрешности метода гармонического баланса с большим числом гармоник.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему

(1) $$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t,x).$$

Здесь $x = \{x_1, \ldots, x_N\}$ – вектор евклидова пространства $\mathbf{R}^N$, $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = 1, \ldots, N$, – постоянная матрица; $f\colon \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ –

непрерывная по совокупности переменных, T-периодическая по t: $f(t+T, x) = f(t, x)$ вектор-функция $f(t, x)$, удовлетворяющая условию Липшица

(2) $\quad |f(t,x_1) - f(t,x_2)| \le q|x_1 - x_2|$

(здесь и ниже через $|\cdot|$ обозначается евклидова норма в $\mathbf{R}^N$).

Предположим, что система (1) имеет T-периодический режим $x_*(t) = \{x_*^{(1)}(t), \ldots, x_*^{(N)}(t)\}$.

В методе гармонического баланса приближения $x_n(t) = \{x_{n,1}(t), \ldots, x_{n,N}(t)\}$ ищутся в виде тригонометрических полиномов

(3) $$x_{n,s}(t) = a_{0,s} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_{k,s}\cos\frac{2\pi kt}{T} + b_{k,s}\sin\frac{2\pi kt}{T}\right).$$

Для отыскания коэффициентов $a_{k,s}$, $b_{k,s}$ составляется равенство

(4) $$\frac{dx_n(t)}{dt} = Ax_n(t) + P_n f(t, x_n(t)),$$

где $P_n g(t)$ – отрезок ряда Фурье T-периодической функции $g(t)$, в котором удержаны гармоники до порядка n. Приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках в левой и правой частях равенства (4), получаем систему $(2n+1)N$ уравнений

(5) $$\mathbb{R}_k(a_{0,1}, \ldots, a_{n,1}, b_{1,1}, \ldots, b_{n,1}, \ldots, a_{0,N}, \ldots, a_{n,N}, b_{1,N}, \ldots, b_{n,N}) = 0$$

с $N(2n+1)$ неизвестными. Уравнения (5) образуют систему уравнений гармонического баланса. Находя решения этой системы и подставляя их в (3), получаем компоненты приближения $x_n(t)$ к отыскиваемому периодическому режиму $x_*(t)$. Системы (4) и (5) эквиваленты.

Систему (5) решают приближенно и в (3) подставляют найденные приближения.

Метод последовательных приближений применяют непосредственно к системе (4). Предположим, что линейное уравнение $dx/dt = Ax$ не имеет ненулевых T-периодических решений, а начальное приближение $x^0{}_n(t)$ – это тригонометрический полином с компонентами вида (3). Если приближение $x^k{}_n(t)$ уже построено, то приближение $x_n^{k+1}(t)$ определяется из уравнения

$$\frac{dx_n^{k+1}(t)}{dt} = A\,x_n^{k+1}(t) + P_n\,f(t, x_n^k(t)), \quad k = 0,1,\ldots$$

3. Теоремы сходимости

Задача отыскания T-периодических режимов системы (1) эквивалентна отысканию решений интегрального уравнения

(6) $$x(t) = \int_0^T H(t-s;T)\,f(s, x(s))\,ds.$$

Функция $H(t;\,T)$ определена на всей оси, T-периодична и $H(t;\,T) = (I - e^{TA})^{-1}e^{tA},\ 0 \le t < T.$

Уравнение (6) будем изучать в пространстве L_2 вектор-функций $x(t)$, определенных на $[0,\,T]$, измеримых и суммируемых с квадратом. Норма и скалярное произведение в L_2 определяются равенствами

$$\|x\| = \left(\int_0^T \|x(t)\|^2\,dt\right)^{1/2}; \quad (x, y) = \int_0^T (x(t)\,y(t))\,dt.$$

Положим

$$\mathcal{H}x = \int_0^T H(t-s;T)\,x(s)\,ds,$$

$$f(x) = f(t, x(t)).$$

Линейный оператор $\mathcal{H}$ действует в L_2 и ограничен, а оператор суперпозиции f действует в L_2 и удовлетворяет условию Липшица

(7) $$\|f(x_1) - f(x_2)\|_{L_2} \le q\,\|x_1 - x_2\|_{L_2},$$

где q – коэффициент из (2). Уравнение (6) можно записать в операторной форме:

(8) $$x = \mathcal{H}f(x), \quad x \in L_2.$$

В силу (7) оператор $\mathcal{H}f : L_2 \to L_2$ удовлетворяет условию Липшица с константой $q\,\|\mathcal{H}\|$, где $\|\mathcal{H}\|$ – норма оператора $\mathcal{H}$: $L_2 \to L_2$. Если выполнено неравенство

(9) $$q\,\|\mathcal{H}\| < 1,$$

то оператор $\mathcal{H}f : L_2 \to L_2$ удовлетворяет условиям принципа сжимающих отображений (см., например, работу [2]) и, следовательно, уравнение (8) (а значит, и уравнение (6)) имеет единственное решение $x_* = x_*(t)$, являющееся T-периодическим решением системы (1). При этом последовательные приближения

(10) $x_{k+1} = \mathcal{H}f(x_k), \quad k = 0,1,\ldots$

сходятся к x_* при любом начальном приближении x_0 и

$$\| x_* - x_k \|_{L_2} \le \frac{(q\|\mathcal{H}\|)^k}{1-q\|\mathcal{H}\|} \| x_0 - \mathcal{H}f(x_0) \|_{L_2}.$$

При реализации метода (10) предварительно переходят от уравнения (8) к какой-либо его конечномерной аппроксимации, для отыскания решений которой и применяют метод последовательных приближений. Построение конечномерного уравнения, аппроксимирующего уравнение (8), осуществляют либо при помощи метода конечных элементов, либо заменяют интеграл механическими квадратурами, используют метод коллокации и др. Ниже используется метод гармонического баланса.

Пусть H_n – это $(2n+1)N$-мерное подпространство пространства L_2, базис в котором образуют элементы

$$\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\cos\frac{2\pi t}{T}, \begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\sin\frac{2\pi t}{T}, \ldots, \begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\cos\frac{2\pi nt}{T}, \begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\sin\frac{2\pi nt}{T},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\N\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\N\end{bmatrix}\cos\frac{2\pi t}{T}, \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\N\end{bmatrix}\sin\frac{2\pi t}{T}, \ldots, \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\N\end{bmatrix}\cos\frac{2\pi nt}{T}, \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\N\end{bmatrix}\sin\frac{2\pi nt}{T}.$$

Пусть $P_n: L_2 \to H_n$ – ортопроектор пространства L_2 на H_n. Тогда приближения $X_n(t) = \{x_{n,1}(t), \ldots, x_{n,N}(t)\}$ к отыскиваемому периодическому режиму $x_*(t)$ системы (1), полученные методом гармонического баланса, совпадают с решениями рассматриваемого на H_n операторного уравнения

(11) $x_n = P_n \mathcal{H} f(x_n)$.

Поскольку $\|P_n\| = 1$, $n = 1, 2, \ldots$, то при выполнении условия (9) оператор $P_n \mathcal{H} f : H_n \to H_n$ является сжимающим. Таким образом, справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть выполнено неравенство* (9). *Тогда последовательные приближения*

(12) $x_n^{k+1} = P_n \mathcal{H} f(x_n^k), \quad k = 0,1,\ldots$

сходятся к единственному решению $x_n^* = x_n^*(t)$ *уравнения* (11) *и*

(13) $$\| x_n^* - x_n^k \|_{L_2} \le \frac{(q \| \mathcal{H} \|)^k}{1 - q \| \mathcal{H} \|} \| x_n^0 - P_n \mathcal{H} f(x_n^0) \|_{L_2} .$$

Аналоги теоремы 1 хорошо известны. Здесь она приведена для удобства читателя.

Оценка (13) существенно зависит от начального приближения x_n^0: если норма невязки $x_n^0 - P_n \mathcal{H} f(x_n^0)$ велика, а число $q \| \mathcal{H} \|$ близко к единице, то метод (12) может оказаться нереализуемым. Если имеется дополнительная информация о том, что отыскиваемый периодический режим достаточно хорошо аппроксимируется тригонометрическим многочленом малой степени m, то в качестве начального приближения целесообразно взять приближенное решение системы (1), построенное методом гармонического баланса с m гармониками.

Теорема 2. *Пусть* $m < n$, а $x^0 = x^0(t)$ – *решение рассматриваемой в* H_m *системы*

(14) $$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + P_m f(t, x(t)).$$

Пусть для некоторого $\varepsilon > 0$ *выполнена оценка*

(15) $\| x_* - P_m x_* \|_{L_2} \le \varepsilon$.

Тогда

(16) $$\| x_* - x^0 \|_{L_2} \le \frac{\varepsilon}{1 - q \| \mathcal{H} \|}$$

и

(17) $$\| P_n \mathcal{H} f(x^0) - x^0 \|_{L_2} \le \frac{1 + q \| \mathcal{H} \|}{1 - q \| \mathcal{H} \|} \varepsilon.$$

Доказательство. Установим вначале оценку (16). Поскольку $x^0 = x^0(t)$ – это решение системы (14), то $x^0 = P_m \mathcal{H} f(x^0)$.

Но тогда в силу неравенств (7) и (15)

$$\| x_* - x^0 \|_{L_2} = \| x_* - P_m \mathcal{H} f(x^0) \|_{L_2} \le$$

$$\le \| x_* - P_m x_* \|_{L_2} + \| P_m x_* - P_m \mathcal{H} f(x^0) \|_{L_2} \le$$

$$\le \varepsilon + \| P_m (\mathcal{H} f(x_*) - \mathcal{H} f(x^0)) \|_{L_2} \le \varepsilon + \| P_m \| \| \mathcal{H} \| q \| x_* - x^0 \|_{L_2} =$$

$$= \varepsilon + \| \mathcal{H} \| q \| x_* - x^0 \|_{L_2} .$$

Сравнивая начало и конец этой цепочки соотношений, приходим к оценке (16).

Перейдем к доказательству оценки (17). В силу (16)

$$\| x^0 - \mathcal{H} f(x^0) \|_{L_2} \le \| x^0 - x_* \|_{L_2} + \| \mathcal{H} f(x_*) - \mathcal{H} f(x^0) \|_{L_2} \le$$

$$\le \| x^0 - x_* \|_{L_2} + q \| \mathcal{H} \| \| x_* - x^0 \|_{L_2} = (1 + q \| \mathcal{H} \|) \| x_* - x^0 \|_{L_2} \le$$

$$\le \frac{1 + q \| \mathcal{H} \|}{1 - q \| \mathcal{H} \|} \varepsilon.$$

Поскольку $m < n$, а $x^0 \in H_m$ то $P_n x^0 = x^0$. Поэтому

$$\| P_n \mathcal{H} f(x^0) - x^0 \|_{L_2} = \| P_n \mathcal{H} f(x^0) - P_n x^0 \|_{L_2} \le$$

$$\le \| P_n \| \| \mathcal{H} f(x^0) - x^0 \|_{L_2} = \| \mathcal{H} f(x^0) - x^0 \|_{L_2} \le$$

$$\le \frac{1 + q \| \mathcal{H} \|}{1 - q \| \mathcal{H} \|} \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Из теорем 1 и 2 вытекает

Теорема 3. *Пусть выполнены неравенства* (9) *и* (15).

Пусть начальное приближение метода (12) *– это решение* $x^0 = x^0(t)$ *системы* (14). *Тогда*

$$\| x_n^* - x_n^k \|_{L_2} \le \frac{(q \| \mathcal{H} \|)^k (1 + q \| \mathcal{H} \|)}{(1 - q \| \mathcal{H} \|)^2} \varepsilon.$$

Теоремы 1 и 3, обосновывающие сходимость метода последовательных приближений построения решений уравнений гармонического баланса, не содержат оценок близости конструируемых приближений $x^k{}_n$ к отыскиваемому T-периодическому режиму $x_* = x_*(t)$. Однако, если известна какая-либо оценка нормы этого режима, то удается получить и оценки норм $\| x_* - x_n^k \|$.

Пусть W_2^1 – пространство определенных на $[0, T]$ абсолютно непрерывных функций $x(t)$ со значениями в $\mathbf{R}^N$, производные которых суммируемы с квадратом. Пространство W_2^1 гильбертово; скалярное произведение и норма в нем определяются равенствами:

$$(x, y)_{W_2^1} = \int_0^T (x(t), y(t))\, dt + \int_0^T (x'(t), y'(t))\, dt;$$

$$\| x \|_{W_2^1} = \left(\int_0^T \| x(t) \|^2 dt + \int_0^T \| x'(t) \|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Теорема 4. *Пусть верна оценка* (9) *и*

(18) $\| x_* \|_{W_2^1} \le \rho.$

Тогда

(19)
$$\| x_* - x_n^k \|_{L_2} \le \frac{T\rho}{2\pi(1 - q\|\mathcal{H}\|)(n+1)} + \frac{(q\|\mathcal{H}\|)^k}{1 - q\|\mathcal{H}\|} \| x_n^0 - P_n \mathcal{H} f(x_n^0) \|_{L_2}.$$

Доказательство. Докажем вначале два вспомогательных утверждения.

Обозначим через $\widetilde{W}_2^1$ пространство определенных на $[0, T]$ абсолютно непрерывных вектор-функций $x(t)$ со значениями в $\mathbf{R}^N$, имеющих нулевые средние и производные, суммируемые с квадратом. Это пространство гильбертово; скалярное произведение и норма в нем определяются равенствами:

$$(x, y)_{\widetilde{W}_2^1} = \int_0^T (x'(t), y'(t))\, dt, \quad \| x \|_{\widetilde{W}_2^1} = \left(\int_0^T \| x'(t) \|^2\, dt \right)^{1/2}.$$

Пусть P_n – ортопроектор L_2 на подпространство H_n. Поскольку пространство $\widetilde{W}_2^1$ вложено в L_2, то P_n можно рассматривать и как оператор, действующий из $\widetilde{W}_2^1$ в H_n. Непосредственная проверка показывает, что оператор P_n является ортопроектором и в $\widetilde{W}_2^1$.

Рассмотрим на шаре $\| x \|_{\widetilde{W}_2^1} \le \mathbb{R}$ функционал

$$F(x) = \frac{1}{2} \| x - P_n x \|_{L_2}^2 .$$

Лемма 1. *Пусть* $B(\rho) = \{x \in \widetilde{W}_2^1 : \| x \| \le \rho\}$.
Тогда справедливо равенство

$$(20) \quad \sup_{x \in B(\rho)} F(x) = \frac{1}{8} \left(\frac{T\rho}{\pi(n+1)} \right)^2 .$$

Доказательство. Естественное вложение пространства $\widetilde{W}_2^1$ в L_2 компактно, т.е. шар $B(\rho)$ компактен в L_2. Поэтому в силу теоремы Вейерштрасса функционал F достигает на шаре $B(\rho)$ своего максимума в некоторой точке x_*. Покажем, что $P_n x_n = 0$.

Действительно, если $P_n x_n \neq 0$, то

$$\| x_* \|_{\widetilde{W}_2^1}^2 = \| P_n x_* + (I - P_n) x_* \|_{\widetilde{W}_2^1}^2 =$$

$$= \| P_n x_* \|_{\widetilde{W}_2^1}^2 + \| (I - P_n) x_* \|_{\widetilde{W}_2^1}^2 > \| (I - P_n) x_* \|_{\widetilde{W}_2^1}^2 .$$

Поэтому при некотором $\lambda > 1$ точка $y_* = \lambda(I - P_n)x_*$ лежит в шаре $B(\rho)$ и, следовательно, $F(y_*) \le F(x_*)$; с другой стороны, $F(y_*) = \lambda^2 F((I - P)x_*) = \lambda^2 F(x_*) > F(x_*)$.
Полученное противоречие показывает, что
(21) $P_n x_* = 0$.
В силу теоремы Люстерника [1] в точке максимума x_* при некотором μ выполнено равенство

$$(22) \quad \nabla F(x_*) = \mu^2 x_*;$$

здесь через ∇F обозначен градиент функционала F на пространстве $\widetilde{W}_2^1$, причем

$$(23) \quad \begin{aligned} \nabla F(x) = \int_0^t (t-s)(P_n x(s) - x(s))\, ds - \\ - \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^t (t-s)(P_n x(s) - x(s))\, ds\, dt. \end{aligned}$$

Из (21), (22) и (23) вытекает равенство

$$\int_0^t (t-s)\,x_*(s)\,ds - \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^t (t-s)\,x_*\,ds\,dt = -\mu^2 x_*(t).$$

Следовательно, функция $x_*(s)$ является нетривиальным решением двухточечной краевой задачи $x'' = -1/\mu^2 x$, $\dot{x}(0) = \dot{x}(T) = 0$, удовлетворяющим условию (21). Такие решения имеют вид $x_k(t) = a\cos 2k\pi t/T$, где $a \in \mathbf{R}^N$, $a \neq 0$, $k \in N$, $k > n$. Непосредственный подсчет показывает, что максимум функционала F достигается при $k = n+1$, $|a| = \sqrt{T/2}\cdot\rho/\pi(n+1)$ и равен $1/8(T\rho/\pi(n+1))^2$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть выполнены неравенство* (9) *и оценка* (18). *Тогда*

$$(24)\quad \| x_* - x_n^* \|_{L_2} \le \frac{T\rho}{2\pi(1-q\,\|\mathcal{H}\|)(n+1)}.$$

Доказательство. Поскольку $x_* = \mathcal{H} f(x_*)$ и $x_n^* = P_n \mathcal{H} f(x_n^*)$, то

$$\| x_* - x_n^* \|_{L_2} \le \| x_* - P_n x_* \|_{L_2} + \| P_n x_* - x_n^* \|_{L_2} =$$
$$= \| x_* - P_n x_* \|_{L_2} + \| P_n \mathcal{H} f(x_*) - P_n \mathcal{H} f(x_n^*) \|_{L_2} \le$$
$$\le \| x_* - P_n x_* \|_{L_2} + q\,\|\mathcal{H}\|\,\| x_* - x_n^* \|_{L_2}.$$

Сравнивая начало и конец цепочки соотношений (24), получаем

$$(25)\quad \| x_* - x_n^* \|_{L_2} \le \frac{\| x_* - P_n x_* \|_{L_2}}{1-q\,\|\mathcal{H}\|}.$$

Но в силу оценки (18) и равенства (20)

$$(26)\quad \| x_* - P_n x_* \|_{L_2} \le \sup_{x\in B(\rho)} \| x - P_n x \|_{L_2} \le \frac{T\rho}{2\pi(n+1)}.$$

Из (25) и (26) вытекает неравенство (24). Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 4. В силу неравенства треугольника

$$\| x_* - x_n^k \|_{L_2} \le \| x_* - x_n^* \|_{L_2} + \| x_n^* - x_n^k \|_{L_2}.$$

Для первого слагаемого в правой части верна оценка (24), а для второго – оценка (13). Но тогда справедлива оценка (19). Теорема доказана.

Аналогично теореме 4 доказывается

Теорема 5. *Пусть выполнены неравенства* (9), (15) *и* (18). *Пусть начальное приближение метода* (12) *является решением системы* (14). *Тогда*

$$\| x_* - x_n^k \|_{L_2} \le \frac{T\rho}{2\pi(1 - q\|\mathcal{H}\|)(n+1)} + \frac{(q\|\mathcal{H}\|)^k (1 + q\|\mathcal{H}\|)}{(1 - q\|\mathcal{H}\|)^2}\varepsilon.$$

4. Колебания в системах автоматического регулирования

Пусть динамика системы W автоматического регулирования описывается дифференциальным уравнением $L(p)y = M(p)g(t, y)$.

Здесь, как обычно,

$$p = \frac{d}{dt},$$

$$L(p) = p^l + a_1 p^{l-1} + \ldots + a_1,$$

$$M(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m$$

и $l > m$. Предполагается, что нелинейность $g(t, y)$ непрерывна по совокупности переменных, T-периодична по t и удовлетворяет условию Липшица по y:

(27) $\| g(t, y_1) - g(t, y_2) \| \le q \| y_1 - y_2 \|$.

Предположим, что многочлен $L(p)$ не имеет корней вида

$$\frac{2k\pi i}{T}, \quad k = 0, \pm 1, \ldots$$

Тогда задача отыскания T-периодических режимов системы W эквивалентна отысканию решений интегрального уравнения

(28) $$y(t) = \int_0^T h(t - s; T)\, g(s, y(s))\, ds,$$

где $h(t; T)$ – импульсно-частотная характеристика линейного звена с передаточной функцией $W(p) = M(p)/L(p)$. Импульсно-частотная характеристика $h(t;T)$ определена на всей оси, T-периодична и $h(t, T) = ((I - e^{TA})^{-1} e^{tA}\gamma, c)$, $0 \le t < T$, где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_t \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_{l-1} \\ \gamma_l \end{bmatrix}$$

и

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_{l-m-1} = 0,$$
$$\gamma_{l-m} = b_0, \quad \gamma_{l-m+1} + \gamma_{l-m}\, a_l = b_1;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\gamma_l + \gamma_{l-1} a_1 + \ldots + \gamma_{l-m}\, a_m = b_m.$$

Уравнение (28) будем изучать в пространстве L_2.

Пусть H_n – подпространство пространства L_2, базис в котором образуют функции

$$1, \cos\frac{2\pi t}{T}, \sin\frac{2\pi t}{T}, \ldots, \cos\frac{2\pi nt}{T}, \sin\frac{2\pi nt}{T},$$

а P_n – ортопроектор из L_2 на H_n. Далее, пусть

$$\mathfrak{h}\, y = \int_0^T h(t-s;T)\, y(s)\, ds.$$

Линейный оператор $\mathfrak{h} : L_2 \to L_2$ вполне непрерывен, причем

$$\gamma = \| \mathfrak{h} \| = \max_{k=0,1,2,\ldots} \left| W\left(\frac{2k\pi i}{T}\right) \right|,$$

$$\gamma_n = \| P_n \mathfrak{h} \| = \max_{k=0,1,2,\ldots,n} \left| W\left(\frac{2n\pi i}{T}\right) \right|.$$

Предположим, что система W имеет T-периодический режим $y_* = y_*(t)$.

Построение приближений y_n^* к режиму y_* методом гармонического баланса эквивалентно отысканию решений операторного уравнения

(29) $y_n = P_n \mathfrak{h} \mathfrak{g}(y_n), \quad y_n \in H_n,$

где $\mathfrak{g}$ – оператор суперпозиции: $\mathfrak{g}(y) = p(t, y(t))$.

Аналогом теоремы 1 является

Теорема 6. *Пусть выполнено неравенство*

(30) $\gamma_n q < 1$,

где q *– коэффициент из* (27). *Тогда уравнение* (29) *имеет единственное решение*

$$y_n^* = y_n^*(t),$$

а последовательные приближения

(31) $$y_n^{k+1} = P_n \mathfrak{h}\mathfrak{g}(y_n^k), \quad k = 0,1,\ldots$$

сходятся к y_n^* *при любом начальном приближении* y_n^0, *причем*

$$\| y_n^* - y_n^k \|_{L_2} \le \frac{(\gamma_n q)^k}{1-\gamma_n q} \| P_n \mathfrak{h}\mathfrak{g}(y_n^0) - y_n^0 \|_{L_2} .$$

Если известна оценка нормы разности $y_* - P_m y_*$, то последнюю оценку можно уточнить.

Теорема 7. *Пусть* $m < n$ *и выполнено неравенство* (30). *Пусть начальное приближение* $y^0{}_n$ *в методе* (31) *является решением в* H_m *уравнения*

(32) $L(p)\, y(t) = M(p)\, P_m\, g(t, y(t))$.

Пусть

(33) $\| y_* - P_m\, y_* \|_{L_2} \le \varepsilon$.

Тогда

$$\| y_n^* - y_n^k \| \le \frac{(\gamma_n q)^k (1+\gamma_n q)}{(1-\gamma_n q)(1-\gamma_m q)}\, \varepsilon.$$

Следующие два утверждения – аналоги теорем 4 и 5 – дают оценки уклонения последовательных приближений (31) от колебания $y_* = y_*(t)$.

Теорема 8. *Пусть верны оценки* (30) *и*

(34) $\| y_* \|_{W_2^1} \le \rho$.

Тогда

$$\| y_* - y_n^k \| \le \frac{T\rho}{2\pi(1-\gamma_n q)(n+1)} + \frac{(\gamma_n q)^k}{1-\gamma_n q} \| P_n \mathfrak{h}\mathfrak{g}(y_n^0) - y_n^0 \|_{L_2} .$$

Теорема 9. *Пусть* $m < n$ *и выполнены неравенства* (30), (33), (34). *Пусть начальное приближение* $y^0{}_n$ *в методе* (31) *принадлежит* H_m *и является решением уравнения* (32). *Тогда*

$$\| y_* - y_n^k \| \leq \frac{T\rho}{2\pi(1-\gamma_n q)(n+1)} + \frac{(\gamma_n q)^k (1+\gamma_n q)}{(1-\gamma_n q)(1+\gamma_n q)} \varepsilon.$$

Смысл основных теорем 5, 9 состоит в том, что в качестве начального приближения итерационного метода (12), (31) берется решение, полученное методом гармонического баланса. Тогда скорость сходимости итерационного метода будет удовлетворять приведенным оценкам.

5. Заключение

Полученные результаты не только показывают качественную зависимость сходимости приближенного метода от выбора начального приближения, но и дают количественные оценки скорости этой сходимости. Кроме того, нами предложены направления исследования метода гармонического баланса, являющегося наиболее эффективным и практически применимым средством решения задач о вынужденных колебаниях.

Литература

1. БАБИЦКИЙ В.И., КРУПЕНИН В.Л. *Колебания в сильно нелинейных системах*. – М.: Наука, 1985. – 320 с.
2. БОБЫЛЕВ Н.А., КРАСНОСЕЛЬСКИЙ А.М. *О приближенном построении автоколебаний в системах автоматического регулирования* // Докл. АН СССР. – 1983. – Т. 272, №2.
3. БОБЫЛЕВ Н.А., КРАСНОСЕЛЬСКИЙ А.М. *О методе гармонического баланса в задаче об автоколебаниях* // Автоматика и телемеханика. – 1984. – №9.
4. БОБЫЛЕВ Н.А., КРАСНОСЕЛЬСКИЙ А.М., КРАСНОСЕЛЬСКИЙ М.А. *Устойчивость периодических колебаний и возможность их построения методом гармонического баланса* // Автоматика и телемеханика. – 1988. – №7.
5. БОБЫЛЕВ Н.А., БУРМАН Ю.М., КОРОВИН С.К. *Оценка погрешности метода гармонического баланса* // Автоматика и телемеханика. – 1992. – №5.

6. БОГОЛЮБОВ Н.Н., МИТРОПОЛЬСКИЙ Ю.А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. – М.: Физматгиз, 1958. – 407 с.
7. БРАВЕРМАН Э.М., МЕЕРКОВ С.М., ПЯТНИЦКИЙ Е.С. *Малый параметр в проблеме обоснования метода гармонического баланса* (*в случае гипотезы фильтра*) // Автоматика и телемеханика. –1975. – №1. – С. 5–12.
8. ВАЙНИККО Г.М. *Анализ дискретизационных методов*. – Тарту: Изд-во Тартуского ун-та, 1976. – 161 с.
9. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ М.А., ВАЙНИККО Г.М., ЗАБРЕЙКО П.П. и др. *Приближенное решение операторных уравнений*. – М.: Наука, 1969. – 457 с.
10. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ А.М. *Направленные поправки в методе гармонического баланса* // Докл. АН СССР. – 1987. – Т. 294, №6. – С. 1314–1318.
11. НАУМОВ Б.Н., ЦЫПКИН Я.З. *Частотные критерии абсолютной устойчивости процессов в нелинейных системах автоматического регулирования* // Автоматика и телемеханика. – 1964. –№6.
12. ПОПОВ Е.П., ПАЛЬТОВ И.П. *Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем*. – М.: Физматгиз, 1960. – 729 с.
13. РОЗЕНВАССЕР Е.Н. *Колебания нелинейных систем*. – М.: Наука, 1969. – 576 с.
14. РОЗЕНВАССЕР Е.Н. *Апостериорные оценки применимости метода гармонического баланса* // Автоматика и телемеханика. – 1986. – №3. – С. 44–52.
15. САМОЙЛЕНКО А.М., РОНТО Н.И. *Численно-аналити-ческие методы исследования периодических решений*. – Киев: Вища шк. 1976. – 180 с.
16. СТАРЖИНСКИЙ В.М. *Прикладные методы теории нелинейных колебаний*. – М.: Наука, 1977. – 260 с.
17. BABUSKA I., PRAGER M., VITASEK V. *Numerical processes in differential equations*. – New York: Interscience, 1966. – 351 p.

18. STOKER J.J. *Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems*. – New York: Interscience, 1950. – 273 p.

PROJECTION-ITERATIVE PROCEDURES FOR APPROXIMATION OF FORCED OSCILLATIONS IN NONLINEAR SYSTEMS.

Ilham Ismailov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., Senior Research Associate (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, (495) 334-79-00, iig07@mail.ru).

Abstracts: Results on problems of approximation of complicated nonlinear systems regimes and special numeric procedures are described. We study some applications of iteration and projective theory to the problems of approximate construction of oscillation regimes for nonlinear systems, particularly, automatic control systems. We introduce a routine for initial approximation selection in the iteration method. This routine uses a priori information about the oscillation regime we search for.

Keywords: optimal control, automatic control, forced oscillations, approximation methods.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Б. Т. Поляком