

УДК 681.5.01  
ББК В.1.9.2.1.1

## **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРАВИЛЬНЫХ С-ДРОБЕЙ ДЛЯ АНАЛИЗА МНОГОЧАСТОТНЫХ СИГНАЛОВ, СОДЕРЖАЩИХ СКРЫТЫЕ ПЕРИОДИЧНОСТИ**

**Новосельцева М. А.<sup>1</sup>**

(ФГБОУ ВПО «Кемеровский государственный  
университет», Кемерово)

*В работе предлагается метод выявления скрытых периодичностей сигналов на основе правильных С-дробей и модифицированного алгоритма В. Висковатова. Метод реализуется по дискретным измерениям сигнала в равноотстоящие промежутки времени без наличия дополнительной априорной информации о сигнале.*

Ключевые слова: правильная С-дробь, гармоника, круговая частота, амплитуда.

### **1. Введение**

Для ряда областей науки и техники характерна задача анализа и обработки сигналов, обладающих определенной периодичностью. Выявление скрытых периодичностей, т.е. распознавание спектральной структуры реальных процессов по результатам их измерений, является важной проблемой теории математической обработки информации.

Например, одной из областей приложения методов выявления скрытых периодичностей является изучение вибрационных явлений в технике. Анализ виброграмм позволяет выявлять периодические компоненты и дает возможность обнаруживать

---

<sup>1</sup> Марина Александровна Новосельцева, кандидат технических наук, доцент (aapov@pochta.ru).

основные источники вибраций, что в свою очередь позволяет осуществить правильную методику виброиспытаний, без которых не обходится создание ни одного из изделий техники. Другой областью применения данных методов является контроль работоспособности систем с электротехническими и электромеханическими устройствами. Таким образом, возникнув ещё в конце XVIII века, проблема выявления скрытых периодичностей продолжает быть актуальной для различных наук и приложений: теории связи, биологии, астрофизики, энергетики, экологии, геофизики и др.

## 2. Постановка задачи

Задача о выявлении скрытой периодичности в сигнале может быть сформулирована следующим образом. Имеются измерения сигнала в равноотстоящие промежутки времени с шагом дискретизации  $\Delta t - x(k\Delta t)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , представляющие результат наблюдения некоторого физического процесса  $x(t)$ . На основании общих соображений о существовании изучаемого физического процесса может быть высказана гипотеза о том, что функция  $x(t)$  представляет собой периодическую функцию времени [14]:

$$(1) \quad x(k\Delta t) = \sum_{i=1}^n A_i \sin(\omega_i k\Delta t + \varphi_i),$$

где  $\omega_i$  – круговая частота  $i$ -й гармоники;  $A_i$  – амплитуда  $i$ -й гармоники;  $\varphi_i$  – начальная фаза  $i$ -й гармоники;  $n$  – число гармоник. При практическом анализе процессов фазовые углы  $\varphi_i$  часто игнорируются [3], тогда

$$(2) \quad x(k\Delta t) = \sum_{i=1}^n A_i \sin(\omega_i k\Delta t).$$

Задачей методов выявления скрытых периодичностей является определение числа гармоник и их параметров (круговая частота, амплитуда).

Необходимо отметить, что задача выявления скрытых периодичностей принципиально отлична от задачи разложения в ряд Фурье функции, заданной на интервале  $[0, L]$  [14]. Хорошо

известно, что практически любую функцию можно представить на интервале  $[0, L]$  рядом Фурье, считая её периодической с периодом, равным длине интервала  $L$ . Для этого требуется лишь выполнение условий Дирихле, всегда справедливых для функций, являющихся записью реального физического процесса. Так как величина  $L$ , представляющая собой продолжительность обрабатываемой записи процесса, обычно ни в коей мере не связана с существом самого процесса, то такая обработка записи не позволяет, вообще говоря, полностью выявить характерные черты исследуемого явления. В методах выявления скрытых периодичностей период искомой компоненты не навязывается заранее, а определяется в процессе самого исследования.

### **3. Обзор существующих методов выявления скрытых периодичностей**

Обзор основных разработок по данной проблеме был сделан Серебренниковым М.Г. и Первозванским А.А. [14] ещё в 1965 г. Позднее ряд авторов в своих трудах [3–6] использовали приводимые ими методы, не внося особых изменений и модификаций. Вот некоторые из методов:

- селективные преобразования – линейные и нелинейные;
- метод наименьших квадратов (МНК) и метод максимального правдоподобия (ММП) для оценки частот;
- применение конечных разностей и сумм;
- дифференциальные методы;
- применение преобразования Лапласа;
- применение цепных дробей.

Основная идея *селективных преобразований* состоит в использовании различного вида преобразований над исходным сигналом (2), позволяющих усилить в преобразованном процессе роль определённой периодической компоненты, или, как говорят, осуществить селекцию периодической компоненты. Было предложено достаточное число таких преобразований. Все они могут быть разделены на два класса – линейные и нелинейные.

Линейные селективные преобразования имеют вид

$$(3) \quad x^{(1)}(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau,$$

где  $h(\tau)$  – весовая функция;  $x(t)$  – исходный процесс;  $\tau$  – параметр сдвига. К ним относятся методы усреднения ординат через пробный период и усреднения процесса за пробный период, преобразования Брукса, схема Бью–Балло и методы, основанные на демодуляции.

Различные линейные преобразования отличаются лишь видом весовой функции  $h(\tau)$ , которая полностью определяет их свойства. Например, для метода усреднения ординат через пробный период

$$(4) \quad h(\tau) = \frac{1}{2} \left[ \delta\left(\tau - \frac{T}{2}\right) + \delta\left(\tau + \frac{T}{2}\right) \right],$$

где  $T$  – параметр (пробный период);  $\delta(\tau)$  – дельта-функция Дирака (единичная импульсная функция). Метод требует довольно большого количества проведений повторных преобразований. Недостатком линейного преобразования является то, что необходимо иметь семейство преобразований (семейство весовых функций  $h(\tau)$ ) такое, что выбор одного преобразования из этого семейства усиливает влияние гармоники одной из возможных частот, а последовательное применение всех преобразований позволяет выделить гармонику любой частоты из заданного диапазона.

Нелинейные селективные преобразования позволяют осуществлять селекцию не только по различию в частотах, но и по различию в амплитудах. Эта особенность проявляется при исследовании так называемых корреляционных преобразований:

$$(5) \quad x^{(1)}(t) = \frac{1}{a} \int_0^a x(\tau)x(t+\tau)d\tau,$$

где процесс  $x(t)$  задан на интервале  $[0, L]$ , а  $a < L$ . Из сравнения (5) с общей формулой линейного преобразования ясно, что эти преобразования сходны по структуре, но в качестве весовой функции в (5) используется сама анализируемая функция, что

делает преобразование существенно нелинейным и определяет его особые свойства.

После того как проведена селекция гармоник и определены круговые частоты (или периоды) гармоник, авторы предлагают перейти к оценке амплитуд  $A_i$ . Для этого используют классические методы – МНК и МНП. Эти методы могут также использоваться и для нахождения частот сигнала при знании числа гармоник в нем. Первый метод даёт приближённую формулу для вычисления частот, а второй – доверительные интервалы для частот и является статистическим методом.

Кроме селективных преобразований при решении вышеуказанной задачи авторы [14] предлагают использовать методы, базирующиеся на нахождении конечных разностей и сумм. Одним из таких методов является *метод Брунса*. Но этот метод применим лишь в том случае, когда заранее известно число содержащихся периодичностей. Если же это неизвестно, то следует предварительно установить возможное число содержащихся периодичностей при помощи особого критерия, который был выведен Кюененом.

Другой метод, базирующийся на применении разностей и сумм разностей ординат, был предложен Лагранжем и впоследствии переработан Дейлем, поэтому получил название *метода Лагранжа–Дейля*. Данный метод включает как определение числа периодических компонент, так и определение параметров этих компонент. Стоит отметить, что данный метод является весьма громоздким.

К дифференциальным методам, основанным на решении линейных дифференциальных уравнений, относят *метод Оппенгейма*. Он позволяет найти параметры периодических компонент, а их число можно найти, используя критерий Гопфнера, разработанный на основе метода Оппенгейма. Данный критерий основан на процедуре перебора определителей и последовательном увеличении их порядка. Если при некотором порядке  $(n + 1)$  определитель окажется равным нулю, то  $n$  есть число содержащихся периодических компонент. Помимо затруднений в определении числа периодических компонент при использовании

этого метода встречаются с еще одной проблемой, а именно, выбор интервала между отсчетами значений исследуемой функции. Нужно весьма осторожно выбирать значение этого интервала, опираясь на то, что верхний предел для него не превосходит  $1/2T_{min}$  ( $T_{min}$  – это наименьший из всех периодов исследуемой функции).

С преобразованием Лапласа связаны *методы Глоговского и Ф. Бернштейна*. Отличаются они видом используемого преобразования. Здесь недостатком является то, что требуется решать системы линейных алгебраических уравнений и, как отмечают сами авторы [14], при решении может возникнуть ситуация многозначности определения круговых частот.

Перечисленные методы выявления скрытых периодичностей обладают рядом недостатков. Одним из них является необходимость иметь априорную информацию о сигнале  $x(t)$ . Для большинства методов также необходимо знать число периодических компонент. Сами алгоритмы являются достаточно сложными и громоздкими. Стоит отметить, что при изучении всех методов авторы уделяют внимание вопросам точности и достоверности проводимых теоретических исследований. Однако практическому применению отводится меньшая роль. Также возникают сложности с определением параметров почти периодических сигналов [3, 14, 15]. На практике почти периодические процессы встречаются достаточно часто и порождаются физическими явлениями, в которых одновременно действуют гармонические процессы, не связанные между собой. Примером такого процесса является вибрация многомоторного винтового самолета, в котором двигатели не синхронизированы [3].

Часто для выявления скрытых периодичностей используют различные методики на основе спектральных плотностей сигнала [3, 4]. Однако по спектральным плотностям затруднительно определить количество гармоник и параметры почти периодических сигналов, поскольку фундаментальный период у них бесконечно велик [5, 7, 12]. Кроме того, не все периоды, которые удастся выделить с помощью спектральной плотности, являются реально существующими. Часть из них своим существованием

обязана случайным колебаниям и погрешностям при вычислениях оценок. Более того, некоторые дополнительные периоды могут появиться и в результате сглаживания временного ряда, так как у сглаженного ряда корреляция близких сечений больше, чем у исходного.

Существующие модификации методов спектрального анализа периодических многочастотных сигналов [1, 2] основаны на определении мгновенной спектральной плотности. Однако основными недостатками, снижающими быстродействие и точность методов [1, 2], являются: необходимость процедуры перебора частот при оценке параметров сигнала; для реализации метода необходимы большое количество измерений сигнала (порядка 10000) и малый шаг дискретизации (порядка  $10^{-4}$ ).

Использование цепных дробей для вскрытия периодичностей впервые предложил Лагранж в 1772 году. Предложенный им метод решает эту задачу несколько окольным путём, при помощи цепных дробей и рядов специальных типов. Этот довольно громоздкий метод был практически не известен и считался малопригодным на практике. Но впоследствии оказалось, что он вполне пригоден для вскрытия синусоидальных периодичностей. Позднее метод был модифицирован [14].

Сущность метода состоит в следующем. Последовательность результатов измерений сигнала в равноотстоящие промежутки времени делят пополам

$$(6) \quad x_{-\lambda}, x_{-\lambda+1}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_{\lambda+1}, x_{\lambda}.$$

Далее записывают эту последовательность в обратном порядке, причем числа, стоящие в первых  $\lambda$  столбцах, складывают, а стоящие в следующих  $\lambda$  столбцах – вычитают. В результате получают коэффициенты цепных дробей, используемые для построения рекуррентных рядов  $S_1$  и  $S_2$ , причем коэффициенты первой серии должны быть взяты справа налево, а второй серии – слева направо. Ряд  $S_1$

$$(7) \quad S_1 = p + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \dots$$

делят на  $p$ , в результате имеют ряд  $S$ . После этого делят  $1 - y$  на ряд  $S$ , чтобы образовалось частное вида  $1 + y^2 + qy$  и остаток вида

$$(8) \quad p'y^2 + b_3y^3 + b_4y^4 \dots$$

Если коэффициенты первого остатка не малы, то его необходимо разделить на  $p'^2$ . Полученный ряд обозначают  $S'$ . Далее, деля  $S$  на  $S'$  так, чтобы частное имело вид  $1 + y^2 + q'y$ , получают второй остаток. Если остаток равен нулю, то действия считаются законченными, в противном случае – процесс деления продолжается (число гармоник процесса  $n$  равно числу делений). В результате получают последовательности величин  $p, p', p'', \dots$  и  $q, q', q'', \dots$ .

Поступая с рядом  $S_2$  так же, как указано для  $S_1$ , следует в качестве первого делимого взять  $1 + y$ . В результате получают последовательности величин  $(p), (p'), (p''), \dots$  и  $(q), (q'), (q''), \dots$ .

Преобразуя  $p, p', p'', \dots, q, q', q'', \dots$  и  $(p), (p'), (p''), \dots, (q), (q'), (q''), \dots$  в зависимости от числа выявленных гармоник, находят модель сигнала в виде скрытых периодичностей:

$$(9) \quad x_\lambda = \sum_{i=1}^n A_i \sin(w_i \lambda),$$

где  $A_i$  – амплитуда  $i$ -й гармоники;  $w_i$  – круговая частота  $i$ -й гармоники. Причем для нахождения круговых частот достаточно воспользоваться только рядом  $S_1$  или  $S_2$ , а для получения амплитуд необходимо пользоваться двумя рядами.

Этот метод имеет следующие недостатки: итерационная процедура определения числа содержащихся периодических компонент на основе перебора цепных дробей требует выполнения значительного числа операций; наличие областей неопределенности при нахождении параметров гармоник [14] приводит к невозможности получения модели сигнала.



#### 4. Выявление скрытых периодичностей на основе правильных С-дроби

Используем правильные С-дроби [8-10] для выявления скрытых периодичностей сигнала. Правильная С-дробь имеет вид

$$(10) \left[ b_0 ; \frac{a_n x}{1} \right]_1^\infty = b_0 + \frac{a_1 x}{1 + \frac{a_2 x}{1 + \frac{a_3 x}{1 + \dots}}}$$

где  $b_0, a_0, a_1, \dots$  – некоторые числа. Наиболее приемлемым и простым способом перехода к правильной С-дроби является модифицированный алгоритм В. Висковатова [5, 6]. Этот аппарат позволит автоматически определить количество гармоник и их параметры без наличия априорной информации. Данный метод может использоваться для широкого класса сигналов  $x(t)$ : гармонических, полигармонических, почти периодических. Кроме того, существует возможность определить, относится ли сигнал к какому-либо из перечисленных классов, и вообще, обладает ли он свойством периодичности как таковой.

В дальнейшем при получении модели сигнала, т.е. при выявлении его скрытых периодичностей, будем использовать подход, заключающийся в том, что процесс формирования сигнала (2) будем представлять как реакцию некоторого виртуального динамического объекта на импульсное входное воздействие. С учетом того, что  $L(\delta(t)) = 1$ , где  $L$  – оператор преобразования Лапласа, получим непрерывную передаточную функцию (НПФ) виртуального объекта

$$(11) G(s) = X(s) = \sum_{i=1}^n A_i \frac{w_i}{s^2 + w_i^2}.$$

Поскольку измерения сигнала  $x(k\Delta t)$  осуществляются в равноотстоящие дискретные моменты времени, для выявления скрытых периодичностей необходимо получить дискретную модель виртуального объекта на основе модифицированного алгоритма

В. Висковатова. Шаг дискретизации  $\Delta t$  выбирается исходя из условия структурно-параметрической идентифицируемости [10].

На основании измерений сигнала  $x(k\Delta t)$  рассчитывается идентифицирующая матрица

$$(12) \quad \begin{matrix} (-1) - \text{строка} \\ (0) - \text{строка} \\ 1 - \text{строка} \\ \dots \\ \dots \\ m - \text{строка} \\ \dots \end{matrix} \left( \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ x(0) & x(\Delta t) & x(2\Delta t) & \dots & x(n\Delta t) & \dots \\ \alpha_1(0) & \alpha_1(\Delta t) & \alpha_1(2\Delta t) & \dots & \alpha_1(n\Delta t) & \dots \\ \alpha_2(0) & \alpha_2(\Delta t) & \alpha_2(2\Delta t) & \dots & \alpha_2(n\Delta t) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_m(0) & \alpha_m(\Delta t) & \alpha_m(2\Delta t) & \dots & \alpha_m(n\Delta t) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right),$$

где элементы  $\alpha_m(n\Delta t)$  последовательно определяются с помощью формулы

$$(13) \quad \alpha_m(n\Delta t) = \frac{\alpha_{m-2}((n+1)\Delta t)}{\alpha_{m-2}(0)} - \frac{\alpha_{m-1}((n+1)\Delta t)}{\alpha_{m-1}(0)},$$

причем  $\alpha_{-1}(n\Delta t) = \delta(n\Delta t)$  и  $\alpha_0(n\Delta t) = x(n\Delta t)$  являются начальными условиями при построении матрицы, где  $\delta(n\Delta t) = 1$  при  $n = 1$ ,  $\delta(n\Delta t) = 0$  при  $n \neq 0$ ;  $m = 1, 2, 3, \dots$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Вычисление элементов  $\alpha_m(n\Delta t)$  продолжается до появления нулевой строки. Номер нулевой строки позволяет определить число гармоник. А именно, если в идентифицирующей матрице  $j$ -я строка является нулевой, то число гармоник в сигнале равно  $j/4$ .

Элементы первого столбца идентифицирующей матрицы (12) порождают частные числители правильной  $C$ -дроби [8]:

$$(14) \quad G(z) = \frac{\alpha_0(0)z^{-1}}{1 + \frac{\alpha_1(0)z^{-1}}{1 + \frac{\alpha_2(0)z^{-1}}{1 + \frac{\alpha_3(0)z^{-1}}{1 + \dots}}}}.$$

Сворачивая  $C$ -дробь (14), получаем модель дискретной передаточной функции (ДПФ) виртуального объекта [10, 11].

Если в некоторой  $i$ -й строке,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , матрицы (12) конечное число  $k_i$  первых элементов равно нулю, а последующие элементы отличны от нуля, то необходимо осуществить сдвиг

влево на  $k_i$  элементов до появления в нулевом столбце ненулевого элемента и далее продолжить определение других элементов матрицы (12) по формуле (13). Для  $i$ -й строки при восстановлении непрерывной  $C$ -дроби (14) элемент  $a_i(0)$  умножается на  $z^{-k_i}$ .

Далее определяются параметры гармоник – круговые частоты и амплитуды. Для этого определяются полюса ДПФ. Если ДПФ содержит только комплексные полюса, то сигнал является периодическим или почти периодическим. Если таких нет или присутствуют дополнительно действительные полюса, то сигнал не обладает свойством периодичности.

В случае наличия комплексных полюсов, исходя из соответствия  $z$ - и  $s$ -плоскостей [6, 7], приступают к нахождению круговых частот  $w_i$  из выражения

$$(15) \quad w_i = \frac{1}{\Delta t} \arg(z_i),$$

где  $z_i = u_i \pm iv_i$  – полюса ДПФ.

Амплитуды находятся как решение системы из  $n$  уравнений

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n A_i \sin(w_i \Delta t) = x(\Delta t), \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n A_i \sin(w_i n \Delta t) = x(n \Delta t). \end{array} \right.$$

Тогда выявленные гармоники имеют вид

$$(17) \quad s_i(t) = A_i \sin(w_i t).$$

В итоге получим модель исходного сигнала в виде

$$(18) \quad s^M(t) = \sum_{i=1}^n s_i(t).$$

## 5. Примеры использования метода выявления скрытых периодичностей сигналов на основе правильных $C$ -дроби

**Пример 1.** Вибрация многомоторного винтового самолета с несинхронизированными двигателями описывается с помощью модели почти периодического сигнала (рис. 1)

$$(19) \quad x(k\Delta t) = 2\sin(3\pi k\Delta t) + 1,5\sin(\sqrt{2}\pi k\Delta t).$$

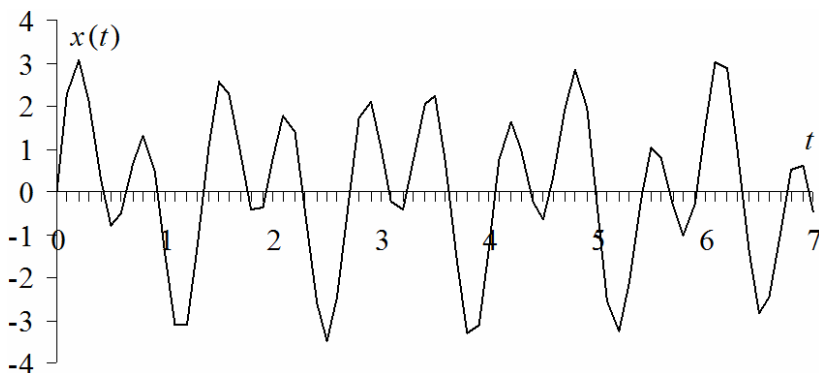


Рис. 1. График сигнала (19)

Шаг дискретизации  $\Delta t = 0,1$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Идентифицирующая матрица на основе значений сигнала принимает вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2,2628 & 3,0664 & 2,0758 & 0,2926 & -0,8065 & -0,4884 & 0,6654 \\ -1,3551 & -0,9174 & -0,1293 & 0,3564 & 0,2158 & -0,2941 & -0,5747 \\ 0,6782 & 0,8219 & 0,3923 & -0,1971 & -0,4328 & -0,1300 & 0,4168 \\ -0,5350 & -0,4830 & 0,0277 & 0,4789 & 0,4087 & -0,1905 & -0,8529 \\ 0,3090 & 0,6301 & 0,6046 & 0,1258 & -0,5478 & -0,9796 & \\ -1,1361 & -2,0079 & -1,3023 & 1,0085 & 3,5256 & & \\ 0,2717 & 0,8099 & 1,2947 & 1,3307 & & & \\ -1,2141 & -3,6196 & -5,7861 & & & & \\ \approx 0 & \approx 0 & & & & & \end{pmatrix}.$$

Восьмая строка нулевая. Число периодических компонент в сигнале равно  $8/4 = 2$ . ДПФ виртуального объекта на основе элементов первого столбца идентифицирующей матрицы принимает вид

$$(20) \quad G(z) = \frac{z^3 - 1,6262z^2 + z}{z^4 - 2,9814z^3 + 4,1229z^2 - 2,9814z + 1}.$$

Полюса ДПФ (20) равны:  $z_{1,2} = 0,5878 \pm i \cdot 0,8090$ ,  $z_{3,4} = 0,9029 \pm i \cdot 0,298$ . На основе (15) и (16) находим круговые частоты и амплитуды:  $w_1 = 9,4248$ ,  $w_2 = 4,4429$ ,  $A_1 = 2$ ,  $A_2 = 1,5$ . Тогда модель сигнала, содержащая две гармоники, принимает вид:

$$(21) \quad x^m(k\Delta t) = 2\sin(9,4348k\Delta t) + 1,5\sin(4,4429k\Delta t).$$

Структура сигнала определена верно, максимальная абсолютная погрешность оценки параметров составила  $10^{-2}$ .

**Пример 2.** Многочастотный сигнал напряжения на выходе электрического генератора имеет модель вида

$$(22) \quad x(k\Delta t) = 4\sin(300\pi k\Delta t) + 2\sin(200\pi k\Delta t) + \sin(380\pi k\Delta t).$$

График сигнала приведён на рис. 2, шаг дискретизации  $\Delta t = 0,001$ .

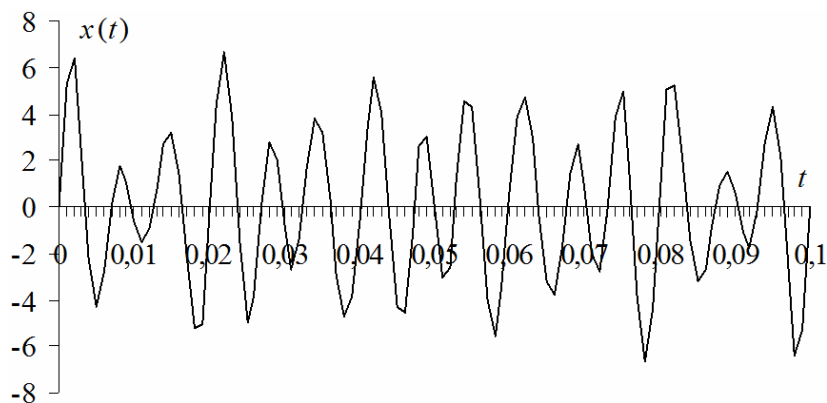


Рис. 2. График сигнала (22)

На основе измерений сигнала рассчитывается идентифицирующая матрица. Двенадцатая строка в матрице нулевая, число периодических компонент сигнала равно 3. ДПФ виртуального объекта имеет вид

$$(23) \quad G(z) = \frac{z^5 - 2,3334z^4 + 3,2433z^3 - 2,3334z^2 + z}{z^6 - 3,5299z^5 + 6,9589z^4 - 8,4601z^3 + 6,9589z^2 - 3,5299z + 1}.$$

Рассчитав полюса ДПФ, получим значения круговых частот  $w_1 = 1193,804$ ,  $w_2 = 942,477$ ,  $w_3 = 628,319$ .

Далее амплитуды найдем как решение системы уравнений

$$(24) \begin{cases} \sin(w_1 \Delta t) A_1 + \sin(w_2 \Delta t) A_2 + \sin(w_3 \Delta t) A_3 = x(\Delta t) = 5,3414, \\ \sin(w_1 2\Delta t) A_1 + \sin(w_2 2\Delta t) A_2 + \sin(w_3 2\Delta t) A_3 = x(2\Delta t) = 6,3909, \\ \sin(w_1 3\Delta t) A_1 + \sin(w_2 3\Delta t) A_2 + \sin(w_3 3\Delta t) A_3 = x(3\Delta t) = 2,7124. \end{cases}$$

Тогда модель сигнала с тремя скрытыми гармониками имеет вид:

$$(25) \quad x^m(k\Delta t) = \sin(1193,804k\Delta t) + 4\sin(942,477k\Delta t) + 1,999\sin(628,319k\Delta t).$$

Количество гармоник определено верно, максимальная абсолютная погрешность оценки параметров составила  $10^{-3}$ .

**Пример 3.** Сравним работоспособность предложенного в работе метода и метода выявления скрытых периодичностей на основе цепных дробей [14], описанного ранее.

Пусть анализируемый сигнал имеет вид

$$(26) \quad x(k\Delta t) = 462 \sin\left(\frac{7\pi}{18} k\Delta t\right) + 593 \sin\left(\frac{7\pi}{9} k\Delta t\right),$$

шаг дискретизации  $\Delta t = 1$ . График сигнала приведён на рис. 3. Были сняты десять измерений сигнала  $k = 0, 1, \dots, 9$  (таблица 1, первый столбец).

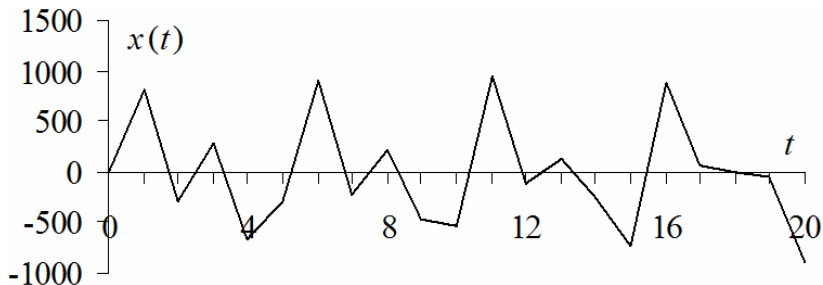


Рис. 3. График сигнала (26)

Таблица 1. Измерения сигнала и коэффициенты цепных дробей к примеру 3

$k$	$x(k\Delta t)$	коэффициенты цепных дробей	$x(k\Delta t)$	коэффициенты цепных дробей
0	0	-462	0	-52,9649
1	815,3110	-1038,4708	815,3110	815,3110
2	-287,0231	-517,1016	-287,0231	-234,0582
3	282,5531	1196,2099	282,5531	1163,5119
4	-657,7991	-940,8425	-657,7991	-1402.3522
5	-283,0434	374,7557	-283,0434	-535,2066
6	913,6568	631,1037	913,6568	1036,2493
7	-230,0785	56,9447	-230,0785	-343,5278
8	223,1597	-592,1513	223,1597	1161,0633
9	-462	-462	-462	-1001,1864
10			-539,1864	-77,1864
11			937,9035	714,7438
12			-113,4493	116,6291
13			122,5925	-791,0643
14			-252,1632	30,8802
15			-744,5531	-86.7539
16			880,9589	598,4058
17			52,9649	339.9881
18			0	-815.3110
19			-52,9649	-52,9649

В качестве  $x_0$  выбирается величина, равная  $x_4 = -657,79913$ . Далее записывается последовательность из тех же чисел, но в обратном порядке. Затем первые пять чисел складывались, а следующие пять – вычитались. В результате получились коэффициенты цепных дробей, значения которых приведены в втором столбце таблицы 1, причем коэффициенты первой серии должны быть взяты в обратном порядке, а второй серии – в порядке следования. Тогда ряд  $S_1$  имеет вид

$$(27) S_1 = -940,8425 + 1196,2099y - 517,1016y^2 + 1038,4708y^3 + \dots$$

В результате деления  $S_1$  на  $p = -940,8425$  получается ряд

$$(28) S = 1 - 1,2714y + 0,5496y^2 - 1,1038y^3 + \dots$$

Деля  $1 - y$  на ряд  $S$ , рассчитываем частное  $1 + y^2 + 0,2714y$ , так что  $q = 0,2714$ , а первый остаток от деления равен

$$(29) -1,2045y^2 + 2,2260y^3 - 0,7411y^4 + \dots,$$

откуда  $p' = -1,2045$ . Так как коэффициенты первого остатка не малы, то следует продолжать действие дальше.

Производится деление всех членов первого остатка на  $p'y^2$

$$(30) S' = 1 - 1,8480y + 0,6152y^2 - 0,8057y^3 + \dots$$

Деля  $S$  на  $S'$  так, чтобы частное имело вид  $1 + y^2 + q'y$ , рассчитываем второе частное  $1 + y^2 + 0,5766y$ , а второй остаток

$$(31) 1,1952y^3 - 0,0673y^4 + 0,5706y^5 + \dots$$

Коэффициенты остатка не равны нулю, процесс деления должен продолжаться. Однако, согласно алгоритму, число скрытых периодичностей сигнала  $n$  равно числу делений, следовательно, количество данных недостаточно для выявления скрытых периодичностей.

Были сняты двадцать наблюдений сигнала ( $k = 0, 1, \dots, 19$ ) (таблица 1, третий столбец). В качестве  $x_0$  выбирается величина, равная  $x_9 = -462$ . Рассчитываются коэффициенты цепных дробей первой и второй серии (четвертый столбец таблицы 1). Используя коэффициенты первой серии, составляем ряд  $S_1$ , который делится на  $p = -1001,1864$ , и получается ряд

$$(32) S = 1 - 1,1597y + 0,3431y^2 - 1,0350y^3 + \dots$$

Деля  $1 - y$  на ряд  $S$ , рассчитываем частное  $1 + y^2 + 0,1597y$ , так что  $q = 0,1597$ , а первый остаток от деления равен

$$(33) -1,1579y^2 + 2,1399y^3 - 0,7124y^4 + \dots,$$

откуда  $p' = -1,1579$ .

Так как коэффициенты первого остатка не малы, то следует продолжать действие дальше. Производится деление всех членов первого остатка на  $p'y^2$ :

$$(34) S' = 1 - 1,8480y + 0,6152y^2 + 0,3895y^3 + \dots$$



Деля  $S$  на  $S'$ , получаем второе частное  $1 + y^2 + 0,6884y$ , второй остаток равен нулю.

Для ряда  $S_2$  используются коэффициенты второй серии:

$$(35) S_2 = -77,1864 + 714,7438y + 116,6291y^2 - 791,0643y^3 + \dots$$

Так как  $p = -77,1864$ , то

$$(36) S = 1 - 9,2600y - 1,5110y^2 + 10,2488y^3 + \dots$$

Результатом деления  $1 + y$  на ряд  $S$  является частное  $1 + y^2 + 10,2600y$ , так что  $q = 10,2600$ , а первый остаток от деления равен

$$(37) 95,5181y^2 + 14,5141y^3 - 103,2409y^4 + \dots,$$

откуда  $p' = 95,5181$ . Так как коэффициенты первого остатка не малы, то следует продолжать действие дальше.

Производится деление всех членов первого остатка на  $p'y^2$ :

$$(38) S' = 1 + 0,1519y - 1,0808y^2 - 0,0761y^3 + \dots$$

Результатом деления  $S$  на  $S'$  является второе частное  $1 + y^2 + 9,4119y$ , второй остаток равен нулю.

На основе проведенных расчетов были получены значения величин  $p, q, p', q'$  (таблица 2).

Таблица 2. Параметры скрытых периодичностей, полученные на основе цепных дробей

Для ряда $S_1$		Для ряда $S_2$	
$p = -1001,1864$	$p' = -1,1579$	$p = -77,1864$	$p' = 95,5181$
$q = 0,1597$	$q' = 0,6884$	$q = 10,2600$	$q' = -9,4119$
$k_1 = 0,6840$	$k_2 = -1,5321$	$k_1 = 12,7643$	$k_2 = -13,6124$
$w_1 = 1,2217$	$w_2 = 2,4435$		

Так как сигнал содержит две гармоники, то круговые частоты находятся по формулам [14]

$$(39) w_1 = \arccos \frac{k_1}{2}, \quad w_2 = \arccos \frac{k_2}{2},$$

$$\text{где } k_{1,2} = -\frac{q+q'}{2} \pm \frac{\sqrt{(q-q')^2 - 4p'}}{2}.$$

Для ряда  $S_1$  рассчитанные круговые частоты совпадают с истинными значениями (таблица 2). Для ряда  $S_2$  найти круговые

частоты не представляется возможным, так как не выполняется условие  $-2 < k_{1,2} < 2$ . Полученные значения параметров попадают в область неопределенности, следовательно, найти значения амплитуд гармоник невозможно. Таким образом, цепные дроби не позволили окончательно получить модель сигнала.

Получим модель сигнала (26) с помощью правильных  $S$ -дробей. Для этого рассчитывается идентифицирующая матрица (12):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 815,3110 & -287,0231 & 282,5331 & -657,7991 & -283,0434 & 913,6568 & -230,0785 \\ 0,3520 & -0,3466 & 0,8068 & 0,3472 & -1,1206 & 0,2822 & -0,2737 \\ 0,6324 & -1,9452 & -1,7929 & 2,8361 & 0,3190 & 0,4953 & -1,3359 \\ 2,0916 & 5,1270 & -3,4986 & -3,6877 & 0,0184 & 1,3350 & \\ -5,5273 & -1,1625 & 6,2478 & 0,4957 & 0,1450 & & \\ 2,2409 & -0,5423 & -1,7634 & 0,0350 & & & \\ 0,4523 & -0,3836 & -0,1053 & & & & \\ 0,6060 & -0,5139 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & \end{pmatrix}.$$

Восьмая строка является нулевой, следовательно, сигнал содержит две гармоники.

ДПФ виртуального объекта принимает вид:

$$(40) \quad G(z) = \frac{z^3 + 0,4960z^2 + z}{z^4 + 0,8480z^3 + 0,9520z^2 + 0,8480z + 1}.$$

Определяем круговые частоты  $w_1 = 2,4435$ ,  $w_2 = 1,2217$  и амплитуды  $A_1 = 593$ ,  $A_2 = 462$ . Тогда модель сигнала имеет вид

$$(41) \quad x^m(k\Delta t) = 593\sin(2,4435k\Delta t) + 462\sin(1,2217k\Delta t).$$

Амплитуды оценены точно, а максимальная абсолютная погрешность оценки круговых частот составила  $10^{-5}$ .

## 6. Выводы

Выявление скрытых периодичностей сигнала на основе правильных  $S$ -дробей позволяет автоматически определить структуру и неизвестные параметры математической модели сигнала, исключая при этом итерационную процедуру коррек-

тировки модели сигнала на основе перебора цепных дробей, значительным образом упрощая и ускоряя процесс получения модели сигнала, что дает возможность использовать данный метод в реальном масштабе времени, контролировать изменения структуры и параметров модели и, тем самым повышать точность и достоверность результатов исследований.

### Литература

1. АВРАМЧУК В.С., ГОЛЬДШТЕЙН Е.И. *Способ спектрального анализа многочастотных периодических сигналов, представленных цифровыми отсчетами* // Патент РФ №2229140. – 2004. – Бюл. №14.
2. АВРАМЧУК В.С., ГОЛЬДШТЕЙН Е.И. *Способ спектрального анализа сложных несинусоидальных периодических сигналов, представленных цифровыми отсчетами* // Патент РФ №2229139. – 2004. – Бюл. №14.
3. БЕНДАТ ДЖ., ПИРСОЛ А. *Прикладной анализ случайных процессов*. – М.: Мир, 1989. – 464 с.
4. БОКС ДЖ., ДЖЕНКИНС Г. *Анализ временных рядов. Прогноз и управление*. – М.: Мир, 1974. – Вып. 1. – 406 с.; – Вып. 2. – 199 с.
5. БОНДАРЕВ В.Н., ТРЁСТЕР Г., ЧЕРНЕГА В.С. *Цифровая обработка сигналов: методы и средства*. – Севастополь: Изд-во СевГТУ, 1999. – 398 с.
6. ВОЛГИН В.В., Каримов Р.Н. *Оценка корреляционных функций в промышленных системах управления*. – М.: Энергия, 1979. – 80 с.
7. КАРМАЛИТА В.А. *Цифровая обработка случайных колебаний*. – М.: Машиностроение, 1986. – 80 с.
8. КАРТАШОВ В.Я. *Анализ и исследование аппроксимационных свойств непрерывных дробей при решении задачи структурно-параметрической идентификации динамических объектов* // Препринт №22. – Барнаул: Изд-во Алтайского госуниверситета, 1996. – 40 с.
9. КАРТАШОВ В.Я. *Непрерывные дроби (определения и свой-*

- ства). – Кемерово: Изд-во Кемеровского госуниверситета, 1999. – 88 с.
10. КАРТАШОВ В.Я., НОВОСЕЛЬЦЕВА М.А. *Идентификация стохастических объектов*: учебное пособие. – Томск: Изд-во Томского государственного педагогического университета, 2008. – 104 с.
  11. КАРТАШОВ В.Я., НОВОСЕЛЬЦЕВА М.А. *Способ анализа многочастотных сигналов, содержащих скрытые периодичности* // Патент РФ №2399060. – 2010. – Бюл. №25.
  12. МАРПЛ-МЛ. С.Л. *Цифровой спектральный анализ и его приложения*. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
  13. РОМАНЕНКО А.Ф., СЕРГЕЕВ Г.А. *Вопросы прикладного анализа случайных процессов*. – М.: Советское радио, 1968. – 247 с.
  14. СЕРЕБРЕННИКОВ М.Г. ПЕРВОЗВАНСКИЙ А.А. *Выявление скрытых периодичностей*. – М.: Наука, 1965. – 244 с.
  15. ЧИРКОВ А.Г. МАТИСОВ Б.Г. *Современная теория стабильности прецизионных генераторов*. – СПб.: Издательство Политехнического университета, 2005. – 355 с.

## USE OF PROPER C-FRACTIONS FOR ANALYSIS OF MULTI-FREQUENCY SIGNALS WITH HIDDEN PERIODICITIES

**Marina Novoseltseva**, associate professor of Department of Automation of Researches and Technical Cybernetics of the Kemerovo State University, Candidate of engineering sciences, (aanov@pochta.ru).

*Abstract: We suggest a new method to reveal hidden signal periodicities. The method is based on application of proper C-fractions and a modified algorithm of V. Viskovatov. It requires a discrete sequence of measurements, equally distributed in time, and no a-priori information about the signal.*

**Keywords:** proper C-fraction, harmonica, cyclic frequency, amplitude.

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А. А. Дорофеюком*