УДК 519.86
ББК 65с

СТАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УЧЕТА ФАКТОРА КОРРУПЦИИ ПРИ РАСПРЕДЕЛЕНИИ РЕСУРСОВ В ТРЕХУРОВНЕВЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

Горбанева О. И.[1], Угольницкий Г. А.[2]
(*Южный Федеральный университет, Ростов-на-Дону*)

В статье рассматривается статическая задача распределения ресурсов в трехуровневой системе управления. Исследуется влияние механизма коррупции на экономическую систему, на целевые функции ее участников и на их стратегии. Оцениваются возможность и способы борьбы с коррупцией в случае применения принуждения и побуждения. Доказано, что в случае «заинтересованного» верхнего уровня бороться с коррупцией можно. В случае принуждения всегда можно добиться того, чтобы выполнилось условие устойчивого развития, в случае побуждения этого можно добиться лишь при соответствующих условиях.

Ключевые слова: распределение ресурсов, игра Γ_2, теорема Гермейера, принуждение, побуждение.

1. Введение

Коррупция оказывает негативное влияние на развитие общества. Это одна из главных угроз успешным общественным преобразованиям. На протяжении нескольких десятилетий ученые пытались моделировать различных аспекты коррупции и борьбы с ней. Базовой схемой моделирования служит иерархи-

[1] *Ольга Ивановна Горбанева, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель (gorbaneva@mail.ru).*
[2] *Геннадий Анатольевич Угольницкий, доктор физико-математических наук, профессор (ougoln@mail.ru).*

ческая система «принципал–агент–клиент» [5] в различных модификациях и ее теоретико-игровое исследование.

В работе А. Шлейфера и Р.У. Вишни [12] исследуются возможность «воровства» у государства тех благ, которые распределяет государственный служащий, роль монополии и монопсонии в распространении коррупции, взаимосвязь структуры политических, экономических институтов и уровня коррупционной активности. Коррупция определяется как продажа государственными служащими государственной собственности в частных целях. В работе указываются две важные причины того, почему коррупция может дорого стоить для экономического развития. Первая причина – это слабость центрального правительства, которая позволяет различным государственным агентствам и аппарату чиновников независимо собирать взятки с частных агентов. Вторая причина – это искажения, вызванные необходимостью держать коррупцию в секрете. «Требование секретности может сместить инвестиции в стране от наиболее выгодных проектов (в здравоохранении, образовании) в сторону потенциально бесполезных проектов (оборона, инфраструктура), если последние обеспечивают лучшие условия для сокрытия коррупции».

Таким образом, экономическая и политическая конкуренция могут уменьшить уровень коррупции и ее неблагоприятные последствия.

В работе К. Блисса и Р.Ди Телла [8] изучается тот факт, что в странах, повысивших уровень конкуренции в экономике, иногда происходит подъем коррупции. Это говорит о том, что вслед за ростом конкуренции не обязательно следует сокращение коррупции.

В работе Ф. Луи [10] предлагается модель распределения ресурсов с механизмом «живой» очереди. Время, непродуктивно затрачиваемое на ожидание в очереди, можно сократить, купив за взятку право пройти вне очереди, причем чем больше взятка, тем меньше время ожидания. В работе показано, что такой механизм, идентичный во многом механизму «теневых цен», может приводить к повышению эффективности распределения.

Проблема распределения ресурсов рассматривается также в работе Д. Лаена [9], в модели которого изучаются возможные недостатки распределения ресурсов, связанные с коррупционной деятельностью. В работе было показано, что при допущении некоторых дополнительных предположений вероятность недостатков в распределении ресурсов повышается при повышении степени дискриминации бюрократом одного клиента в пользу другого.

Нами ранее была исследована статическая задача распределения ресурсов в двухуровневой экономической системе [1, 2, 3]. Коррупция рассматривалась в двух формах [4]: более мягкой – «попустительство», при котором при отсутствии взятки нижний получает какую-то долю ресурсов от Центра, увеличивающуюся с увеличением размера взятки, и более жесткой – «вымогательство», при котором какую-то ненулевую долю ресурсов элемент может получить от верхнего уровня, только предложив ему взятку. Также рассматривалась кооперативная постановка задачи. В построенных моделях искалось равновесие по Штакельбергу.

В данной статье рассматривается статическая задача распределения ресурсов в системе управления, состоящей из трех элементов. Исследуется влияние механизма коррупции при распределении ресурсов на поведение экономической системы и ее участников. Оцениваются возможность и способы борьбы с коррупцией в случае применения механизмов принуждения и побуждения [6, 7, 11], где под принуждением подразумевается возможность верхнего уровня влиять на множество стратегий более низкого уровня системы, а под побуждением – на значение целевой функции элемента нижнего уровня. В данных целях строится модель в виде игры Γ_2, которая исследуется при помощи теоремы Гермейера [3].

2. Объект исследования – экономическая система

Рассматривается трехуровневая система управления (рис. 1), примером которой могут служить система «государство – Государственная дума, распределяющая бюджет страны – бюджетные организации», или «собственник производственного предприятия – финансовый директор – подразделения предприятия». Нижний уровень (в данных примерах «бюджетные организации» или «подразделения предприятия») производит продукцию и в процессе производства воздействует на управляемую систему (объем произведенной продукции, прибыль предприятия). Средний уровень («Государственная дума» или «Финансовый директор») воздействует на нижний уровень путем побуждения (распределения ресурсов между элементами нижнего уровня) или принуждения (контролирует использование ресурсов). Состояние управляемой системы не является интересом среднего уровня. Верхний уровень («государство» или «собственник предприятия») следит за состоянием управляемой системы и, в целях сохранения ее состояния в заданных пределах (прибыль предприятия или объем выпущенной продукции были не ниже заданного порога), воздействует на средний уровень, используя механизмы принуждения (ограничения на стратегии) и побуждения (премии, стимулирующие надбавки).

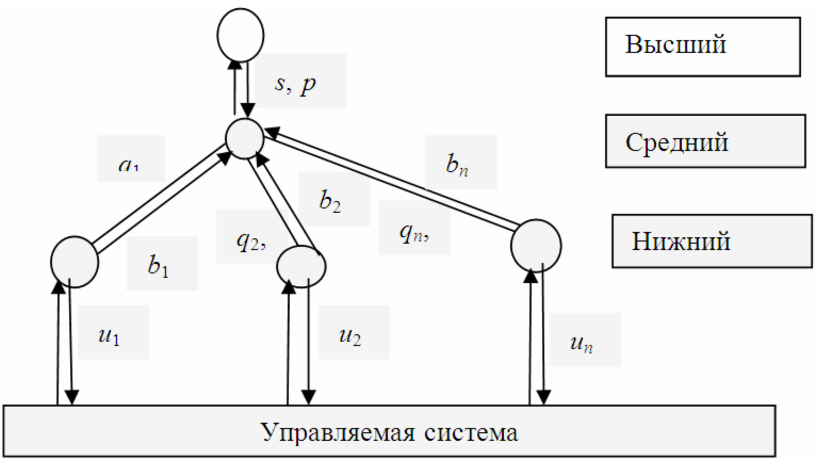

Рис. 1. Трехуровневая иерархическая система

3. Постановка задачи

Средний уровень располагает некоторым количеством невозобновляемых ресурсов (в общем случае финансовых) R, которое необходимо распределить между элементами нижнего уровня таким образом, чтобы выигрыш от использования ресурсов был максимальным. Элемент нижнего уровня использует ресурсы для производства в общих целях (общесистемная деятельность), а также для производства в частных целях (частная деятельность). Поэтому нижний уровень часть ресурсов u_i, доставшихся от среднего уровня (r_i), тратит на общие цели, а оставшуюся часть – на свои частные цели (допустим, развитие дополнительного частного вида деятельности).

Средний уровень, зная об этом, может установить нижний порог q_i, меньше которого нижний уровень не может тратить ресурсы на общие цели. Кроме того, средний уровень может часть ресурсов использовать на свои частные цели.

Нижний уровень может воздействовать на средний при помощи механизма коррупции b_i для увеличения количества ресурсов r_i, выделенных ему, или для уменьшения порогового значения q_i.

Верхний уровень осуществляет контроль состояния управляемой системы, воздействуя на средний уровень путем назначения величины s, меньше которой средний уровень не может назначать величины q_i, а также величины p – доли от суммарного выигрыша элементов нижнего уровня, возвращаемой среднему уровню в качестве премии за соблюдение требования устойчивого развития.

Требование устойчивого развития [6] выражается в том, что суммарный доход от системной деятельности элементов нижнего уровня должен быть не ниже порогового значения a.

Введем условные обозначения:

M, J_0, J_i, $i = 1, \ldots, n$, – целевые функции верхнего, среднего и нижнего уровней соответственно.

g_i – производственная функция общесистемной деятельности нижнего уровня с эластичностью производства β.

h_i – производственная функция частной деятельности нижнего уровня с эластичностью производства β.

r_i – доля ресурсов, выделенных средним уровнем нижнему уровню (управляющая величина среднего уровня).

u_i – доля ресурсов от r_i, направленная нижним уровнем на общесистемные цели (управляющая величина нижнего уровня).

b_i – доля ресурсов от r_i, возвращаемая нижним уровнем среднему в качестве взятки (управляющая величина нижнего уровня).

q_i – нижняя доля u_i, назначаемая средним уровнем нижнему, меньше которой нижний уровень не может направить ресурсы на общие цели (управляющая величина среднего уровня).

s – нижняя доля значений q_i, меньше которой средний уровень не может устанавливать порог доли ресурсов, направленной на общие цели (управляющая величина верхнего уровня).

p – доля суммарного дохода от общесистемной деятельности элементов нижнего уровня, достающаяся среднему уровню в качестве стимулирующей величины (премия, зарплата и т.д.) (управляющая величина верхнего уровня).

a – граница устойчивого состояния системы.

s_0 – минимальная величина s, при которой выполняется условие устойчивого развития ($\sum_{i=1}^{n} g_i(s_0 r_i) = a$ при $r_i - const$).

r_0 – минимальная величина r_i, при которой выполняется условие устойчивого развития ($\sum_{i=1}^{n} g_i(r_0) = a$ при $r_i - const$).

С учетом этих обозначений, построим математическую модель.

4. Математическая модель

Таким образом, значение целевой функции верхнего уровня зависит от того, выполняется условие устойчивого развития или нет, т.е.

(1) $M\left(\sum_{i=1}^{n} g_i(u_i r_i) - a\right) \to \max$,

где $M\left(\sum_{i=1}^{n} g_i(u_i r_i) - a\right)$ может иметь один из двух видов:

1. Функция вида

$$M\left(\sum_{i=1}^{n} g_i(u_i r_i) - a\right) = \begin{cases} const, & \sum_{i=1}^{n} g_i(u_i r_i) \ge a, \\ -\infty, & \sum_{i=1}^{n} g_i(u_i r_i) < a. \end{cases}$$

Такому субъекту верхнего уровня безразлично, каким образом выполняется условие (1) и насколько величина $\sum_{i=1}^{n} g_i(u_i r_i)$ отклоняется от a. В его цели не входит увеличение величины дохода от системной деятельности всех элементов нижнего уровня $\sum_{i=1}^{n} g_i(u_i r_i)$. Ему нужно, чтобы выполнилось условие устойчивого развития хотя бы в виде равенства. Такой верхний уровень назовем «незаинтересованным».

2. Линейная функция $M \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} g_i(u_i r_i) - a\right)$, где M – положительная константа, т.е. если условие выполняется, то в результате выигрыш верхнего уровня – положительная величина (премия, надбавка), в противном случае – отрицательная (штраф за невыполнение условия устойчивого развития). В этом случае, в отличие от предыдущего, верхний уровень интересуется тем, насколько величина $\sum_{i=1}^{n} g_i(u_i r_i)$ отклоняется от a, т.е. верхний уровень стремится максимизировать величину $\sum_{i=1}^{n} g_i(u_i r_i)$. Такой верхний уровень назовем «заинтересованным».

Верхний уровень управляет величинами s и p, на которые накладываются ограничения

(2) $0 \le s \le 1$,

(3) $0 \le p \le 1$.

Целевая функция среднего уровня состоит из дохода от суммарной системной деятельности элементов нижнего уровня, дохода от своей частной деятельности, дохода от взятки со стороны элементов нижнего уровня:

(4) $$J_0 = p\sum_{i=1}^{n} g_i(u_i r_i) + H\left(1 - \sum_{i=1}^{n} r_i\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i r_i \to \max$$

Средний уровень управляет величинами q_i и r_i, на которые накладываются ограничения

(5) $s \le q_i \le 1$,

(6) $0 \le r_i \le 1$,

(7) $0 \le \sum_{i=1}^{n} r_i \le 1$.

Целевая функция элемента нижнего уровня состоит из дохода от его системной деятельности за вычетом доли, уплачиваемой среднему уровню в качестве премии за выполнение условия устойчивого развития, и дохода от несистемной деятельности

(8) $$J_i = (1-p) g_i(u_i r_i) + h_i((1 - u_i - b_i) r_i) \to \max$$

Нижний уровень управляет величинами u_i и b_i, на которые накладываются ограничения

(9) $q_i \le u_i \le 1$,

(10) $0 \le u_i + b_i \le 1$.

Требование устойчивого развития выражается в том, что суммарный доход от системной деятельности элементов нижнего уровня должен быть не ниже порогового значения a, т.е.

(11) $\sum_{i=1}^{n} g_i(u_i r_i) \ge a$.

Обратим особое внимание на то, что элемент верхнего уровня в данной модели один, элемент среднего уровня также один, а элементов нижнего уровня здесь может быть сколь угодно много.

Элементов среднего уровня могло бы быть больше, чем один, но так как в некооперативной постановке ни целевые функции, ни стратегии элементов среднего уровня не зависят друг от друга, то модель распалась бы на n моделей с одним средним уровнем. Этого нельзя сказать об элементах нижнего уровня. Количество ресурсов, достающихся i-му элементу нижнего уровня, зависит от того, сколько ресурсов досталось другим, так как общее количество ресурсов ограничено (в силу условия $0 \le \sum_{i=1}^{n} r_i \le 1$). Поэтому относительно элементов нижнего уровня задача не является аддитивной, ее нельзя разбить на n задач с одним элементом нижнего уровня.

Задачи среднего и нижнего уровней составляют игру Γ_2 [4].

Задача исследовалась при помощи теоремы Гермейера [4] в случаях равновесия принуждения и побуждения [7, 11] на каждом уровне. Всего найдено четыре равновесия:

– когда верхний элемент использует «принуждение», средний элемент также использует «принуждение» (назовем эту модель «моделью принуждения–принуждения»);

– когда верхний элемент использует «принуждение», средний же элемент использует «побуждение» («модель принуждения–побуждения»);

– когда верхний элемент использует «побуждение», средний же элемент использует «принуждение» («модель побуждения–принуждения»);

– когда верхний элемент использует «побуждение», средний элемент также использует «побуждение» («модель побуждения–побуждения»).

Рассмотрим каждый из этих случаев.

5. «Принуждение–принуждение»

Модель в этом случае принимает следующий вид:

Задача верхнего уровня:

(12) $$M\left(\sum_{i=1}^{n} g_i(u_i r_i) - a\right) \to \max_{s}$$

(13) $$0 \le s \le 1,$$

(14) $p = const$.

Здесь верхний уровень управляет только величиной s, величина p фиксирована.

Задача среднего уровня:

(15) $$J_0 = p\sum_{i=1}^{n} g_i(u_i r_i) + H\left(1-\sum_{i=1}^{n} r_i\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i r_i \to \max_{q_i}$$

(16) $s \le q_i \le 1$,

(17) $r_i = const$.

Здесь, аналогично верхнему уровню, средний уровень воздействует на элемент нижнего уровня при помощи величины q_i, величина r_i фиксирована.

Задача элемента нижнего уровня не изменяется:

(18) $$J_i = (1-p)g_i(u_i r_i) + h_i((1-u_i-b_i)r_i) \to \max_{u_i, b_i}$$

(19) $q_i \le u_i \le 1$,

(20) $0 \le u_i + b_i \le 1$.

Требование устойчивого развития не изменяется:

(21) $$\sum_{i=1}^{n} g_i(u_i r_i) \ge a.$$

Итак, модель «принуждение–принуждение» описывается соотношениями (12)–(21).

При нахождении равновесия в данной игре было доказано, что для среднего уровня наиболее выгодна стратегия элемента нижнего уровня (другими словами, стратегия нижнего уровня, при которой достигается величина K_1 [4] теоремы Гермейера – максимальный выигрыш среднего уровня):

(22) $$b_i = 1 - u_i - \sqrt[\beta]{\frac{(1-u_i^{\beta})g_i(1)(1-p)}{h_i(1)}} - \varepsilon,$$

где u_i^* находится из уравнения

(23) $$pg_i(1)r_i^{\beta} - r_i u_i^{\beta} + \frac{\gamma_i}{u_i^{1-\beta}}\sqrt[\beta]{\frac{(1-u_i^{\beta})^{1-\beta} g_i(1)(1-p)}{h_i(1)}} = 0.$$

Уравнение (23) в общем случае аналитически не разрешимо, но доказано, что функция, составляющая левую часть уравнения, убывает на отрезке [0, 1], следовательно, если левая часть уравнения принимает разные знаки на этих концах, то применим метод дихотомии, если же левая часть принимает значения одного знака (положительного, так как при $u_i \to 0$ левая часть уравнения стремится к $+\infty$), то $u_i = q_i$, т.е. элемент нижнего уровня должен потратить на общие цели минимальную величину, которую возможно потратить, т.е. ровно ту величину, меньше которой потратить ресурсы на общие цели запрещено средним уровнем.

Оптимальная стратегия среднего уровня выглядит следующим образом:

$$(24)\quad q_i = \begin{cases} s, & b_i = 1 - u_i - \sqrt[\beta]{\dfrac{(1-u_i^{\beta})g_i(1)}{h_i(1)}}, \quad u_i \text{ находится из (23)}, \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Оптимальная стратегия верхнего уровня находится при помощи максимизации его целевой функции:

В случае «незаинтересованного» верхнего уровня $s = s_0$, что, в принципе, не сильно мешает коррупции, уменьшая, возможно, размеры взяток. Но в этом случае условие устойчивого развития выполняется (правда, в виде равенства).

В случае «заинтересованного» верхнего уровня $s = 1$, что влечет за собой в силу ограничений модели $q_i = 1$, $u_i = 1$, откуда видно, что коррупция в этом случае искореняется.

Чем больше величина s, тем больше выделенных ресурсов нижний уровень тратит на свои цели и тем меньше ресурсов он возвращает среднему уровню в качестве взятки. То есть чем больше величина s, тем борьба с коррупцией эффективнее.

6. «Принуждение–побуждение»

Модель в этом случае принимает следующий вид:

Задача верхнего уровня:

$$(25)\quad M\left(\sum_{i=1}^{n} g_i(u_i r_i) - a\right) \to \max_s$$

$$(26)\quad 0 \le s \le 1,$$

(27) $p = const$.

Здесь верхний уровень управляет только величиной s, величина p фиксирована.

Задача среднего уровня:

(28) $J_0 = p\sum_{i=1}^{n} g_i(u_i r_i) + H\left(1 - \sum_{i=1}^{n} r_i\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i r_i \to \max_{r_i}$

(29) $s_i \le r_i \le 1$,

(30) $\sum_{i=1}^{n} r_i \le 1$.

Здесь средний уровень воздействует на элемент нижнего уровня при помощи величины r_i, величина q_i отсутствует в модели.

В задаче элемента нижнего уровня изменяется только ограничение на u_i:

(31) $J_i = (1-p)g_i(u_i r_i) + h_i((1-u_i-b_i)r_i) \to \max_{u_i, b_i}$

(32) $0 \le u_i + b_i \le 1$.

Требование устойчивого развития не изменяется:

(33) $\sum_{i=1}^{n} g_i(u_i r_i) \ge a$.

То есть модель «принуждение–побуждение» описывается соотношениями (25)–(33).

При нахождении равновесия в данной игре было доказано, что для среднего уровня наиболее выгодна стратегия нижнего уровня ($Arg\, K_1$):

(34) $u_i = \frac{s}{r_i}\sqrt[\beta]{1 + \frac{h_i(1)}{g_i(1)(1-p)}} + \frac{\varepsilon}{r_i}$,

(35) $b_i = 1 - \frac{s}{r_i}\sqrt[\beta]{1 + \frac{h_i(1)}{g_i(1)(1-p)}} - \frac{\varepsilon}{r_i}$,

что равносильно тому, что на общие цели должно потратиться ровно $u_i r_i = s\sqrt[\beta]{1 + \frac{h_i(1)}{g_i(1)(1-p)}} + \varepsilon$ (независимо от того, сколько элемент получит ресурсов, величина, потраченная на общие цели, постоянная).

Кроме того, нетрудно заметить, что выполняется условие $u_i + b_i = 1$, которое означает, что все ресурсы нижний элемент тратит на общие цели и взятку, т.е. средний элемент лишает нижний элемент возможности тратить ресурсы на свои частные цели.

Вывод. Оптимальная для взяточника зависимость объема ресурсов от взятки:

$$r_i = \frac{s}{u_i}\sqrt[\beta]{1+\frac{h_i(1)}{g_i(1)(1-p)}} + \frac{\varepsilon}{u_i} = \frac{1}{u_i}\left(s\sqrt[\beta]{1+\frac{h_i(1)}{g_i(1)(1-p)}} + \varepsilon\right) =$$

$$= \frac{1}{1-b_i}\left(s\sqrt[\beta]{1+\frac{h_i(1)}{g_i(1)(1-p)}} + \varepsilon\right).$$

т.е. величина количества ресурсов обратно пропорциональна величине, противоположной взятке.

Оптимальная стратегия среднего уровня – любой набор значений r_i, при котором

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = 1 - \sqrt[\beta]{\beta H(1)},$$

что также является величиной постоянной. То есть средства произвольно распределяются между элементами нижнего уровня. Себе средний уровень оставляет ресурсы в количестве $\sqrt[\beta]{\beta H(1)}$.

Оптимальная стратегия верхнего уровня находится оптимизацией его целевой функции в случае «незаинтересованного» верхнего уровня:

$$s = \begin{cases} r_0, & u_i r_i > r_0, \\ \dfrac{\sqrt[1-\beta]{g_i(1)u_i^{\beta}}}{\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt[1-\beta]{g_i(1)u_i^{\beta}}}, & u_i r_i \le r_0. \end{cases}$$

Но в этом случае верхний уровень может повлиять на элемент среднего уровня, если

$$r_0 < \frac{1-\beta\sqrt{g_i(1)u_{i\beta}}}{\sum_{i=1}^{n} 1-\beta\sqrt{g_i(1)u_{i\beta}}}.$$

В этом случае борьба с коррупцией не происходит, но условие устойчивого развития выполняется.

В случае «заинтересованного» верхнего уровня

$$s = \frac{1-\beta\sqrt{g_i(1)u_{i\beta}}}{\sum_{i=1}^{n} 1-\beta\sqrt{g_i(1)u_{i\beta}}}.$$

Так как

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1-\beta\sqrt{g_i(1)u_{i\beta}}}{\sum_{i=1}^{n} 1-\beta\sqrt{g_i(1)u_{i\beta}}} = 1,$$

то верхний уровень принуждает средний уровень все ресурсы тратить на распределение между элементами среднего уровня, лишая возможности средний уровень часть ресурсов забирать себе и брать взятку.

Следовательно, принуждение эффективно при борьбе с коррупцией при «заинтересованном» высшем уровне.

7. «Побуждение–принуждение»

Модель в этом случае принимает следующий вид.

Задача верхнего уровня:

(36) $M\left(\sum_{i=1}^{n} g_i(u_i r_i) - a\right) \to \max_p$

(37) $0 \le p \le 1$.

Здесь верхний уровень управляет только величиной p, величина s отсутствует в модели, так как принуждение не применяется.

Задача среднего уровня:

(38) $J_0 = p\sum_{i=1}^{n} g_i(u_i r_i) + H\left(1-\sum_{i=1}^{n} r_i\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i r_i \to \max_{q_i}$

(39) $0 \le q_i \le 1$,

(40) $r_i = const$.

Здесь средний уровень воздействует на элемент нижнего уровня при помощи величины q_i, величины r_i фиксированы.

Задача элемента нижнего уровня:

(41) $J_i = (1-p)g_i(u_i r_i) + h_i((1-u_i-b_i)r_i) \to \max_{u_i, b_i}$

(42) $q_i \le u_i \le 1$,

(43) $0 \le u_i + b_i \le 1$.

Требование устойчивого развития не изменяется

(44) $\sum_{i=1}^{n} g_i(u_i r_i) \ge a$.

То есть модель «принуждение–побуждение» описывается соотношениями (36)–(44).

Как и в случае «принуждение–принуждение», для среднего уровня наиболее выгодна стратегия элемента нижнего уровня:

(22) $b_i = 1 - u_i - \sqrt[\beta]{\frac{(1-u_i^{\beta})g_i(1)(1-p)}{h_i(1)}} - \varepsilon,$

где u_i^* находится из уравнения

(23) $p g_i(1) r_i^{\beta} - r_i u_i^{\beta} + \frac{\gamma_i}{u_i^{1-\beta}} \sqrt[\beta]{\frac{(1-u_i^{\beta})^{1-\beta} g_i(1)(1-p)}{h_i(1)}} = 0$,

а оптимальная стратегия среднего уровня выглядит следующим образом:

$$q_i = \begin{cases} u_i^*, \quad b_i = 1 - u_i^* - \sqrt[\beta]{\frac{(1-u_i^{*\beta})g_i(1)}{h_i(1)}}, \quad u_i^* \text{ находится из (23)}, \\ 1, \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Что касается стратегии верхнего уровня, то в случае незаинтересованного верхнего уровня минимальное p^*, удовлетворяющее неравенство

(45) $$p > \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(s_0 - u_i^* - \sqrt[\beta]{\frac{g_i(1)}{h_i(1)}}\left(\sqrt[\beta]{(1-s_0{}^{\beta})(1-p)} - \sqrt[\beta]{(1-u_i^{*\beta})}\right)\right)}{\sum_{i=1}^{n} g_i(s_0 r_i)},$$

и будет стратегией поощрения, т.е.

$$p = \begin{cases} p^*, & q_i \geq s_0, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Но верхний уровень может влиять на средний, только если

(46) $p \leq 1$.

В случае заинтересованного верхнего уровня минимальное значение p^*, удовлетворяющее неравенство

(47) $$p > \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(1 - u_i^* + \sqrt[\beta]{\frac{g_i(1)}{h_i(1)}}\sqrt[\beta]{(1-u_i^{*\beta})}\right)}{\sum_{i=1}^{n} g_i(r_i)},$$

будет стратегией поощрения, т.е.

$$p = \begin{cases} p^*, & q_i = 1, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Но верхний уровень может влиять на средний, только если

(48) $$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(1 - u_i^* + \sqrt[\beta]{\frac{g_i(1)}{h_i(1)}}\sqrt[\beta]{(1-u_i^{*\beta})}\right)}{\sum_{i=1}^{n} g_i(r_i)} \leq 1.$$

Как можно видеть, в случае «заинтересованного» верхнего уровня бороться с коррупцией можно, в случае же «незаинтересованного» верхнего уровня коррупцию можно лишь ограничить, уменьшить.

Величина *p* – часть дохода всей системы, полученного при помощи нижнего уровня, которая отдается среднему уровню. Чем больше величина *p*, тем больше доход среднего уровня от системной деятельности, и тем меньше его доход от взятки. Среднему уровню становится выгодным позволять нижнему уровню тратить все средства на общесистемную деятельность, что исключает возможность получения взятки.

Правда, в этом случае p должно быть достаточно большим, чтобы доход от общесистемной деятельности для среднего уровня превышал бы его суммарный доход в случае наличия механизма коррупции.

8. «Побуждение–побуждение»

Модель в этом случае принимает следующий вид:

Задача верхнего уровня:

(49) $$M\left(\sum_{i=1}^{n} g_i(u_i r_i) - a\right) \to \max_p$$

(50) $$0 \le p \le 1.$$

Здесь верхний уровень управляет только величиной p, величина s отсутствует в модели, так как принуждение не применяется.

Задача среднего уровня:

(51) $$J_0 = p\sum_{i=1}^{n} g_i(u_i r_i) + H\left(1 - \sum_{i=1}^{n} r_i\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i r_i \to \max_{r_{i\,i}}$$

(52) $$0_i \le r_i \le 1,$$

(53) $$\sum_{i=1}^{n} r_i \le 1.$$

Здесь аналогично верхнему уровню, средний уровень воздействует на элемент нижнего уровня при помощи величины r_i, величина q_i отсутствует в модели.

Задача элемента нижнего уровня:

(54) $$J_i = (1-p)g_i(u_i r_i) + h_i((1-u_i-b_i)r_i) \to \max_{u_i, b_i}$$

(55) $$0 \le u_i \le 1,$$

(56) $$0 \le u_i + b_i \le 1.$$

Требование устойчивого развития не изменяется:

(57) $$\sum_{i=1}^{n} g_i(u_i r_i) \ge a.$$

То есть модель «побуждение–побуждение» описывается соотношениями (49)–(57).

При нахождении равновесия в данной игре было доказано, что для среднего уровня наиболее выгодна стратегия элемента нижнего уровня:

$$(58)\quad u_i = \frac{1-\sqrt[\beta]{g_i(1)(1-p)}}{r_i},$$

$$(59)\quad b_i = 1 - u_i = 1 - \frac{1-\sqrt[\beta]{g_i(1)(1-p)}}{r_i}.$$

Это равносильно тому, что на общие цели должно потратиться ровно $u_i r_i = 1-\sqrt[\beta]{g_i(1)(1-p)}$ (независимо от того, сколько элемент получит ресурсов, величина, потраченная на общие цели, постоянная).

Кроме того, нетрудно заметить, что выполняется условие $u_i + b_i = 1$, которое означает, что все ресурсы нижний элемент тратит на общие цели и взятку, т.е. средний элемент лишает нижний элемент возможности тратить ресурсы на свои частные цели.

Вывод. Оптимальная зависимость для взяточника объема ресурсов от взятки:

$$r_i = \frac{1-\sqrt[\beta]{g_i(1)(1-p)}}{u_i} = \frac{1-\sqrt[\beta]{g_i(1)(1-p)}}{1-b_i},$$

т.е. величина количества ресурсов обратно пропорциональна величине, противоположной взятке, что согласуется с результатами, полученными при исследовании модели «принуждение–побуждение».

Оптимальная стратегия среднего уровня – любой набор значений r_i, при котором $\sum_{i=1}^{n} r_i = 1-\sqrt[\beta]{\beta H(1)}$. То есть

$$r_i = \begin{cases} \forall r_i \mid \sum_{i=1}^{n} r_i = 1 - \sqrt[\beta]{\beta H(1)}, & \begin{array}{l} u_i = \dfrac{\sqrt[1-\beta]{g_i(1)(1-p)}}{r_i}, \\ b_i = 1 - \dfrac{\sqrt[1-\beta]{g_i(1)(1-p)}}{r_i}; \end{array} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Себе верхний уровень оставляет ресурсы в количестве $\sqrt[\beta]{\beta H(1)}$.

В случае «незаинтересованного» верхнего уровня его стратегия:

$$(60)\quad p = \begin{cases} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} b_i^* r_i + H\left(1 - \sum_{i=1}^{n} r_i\right) - H(1 - n r_0)}{\sum_{i=1}^{n} g_i(r_0)} - \varepsilon_1, & \forall i\ u_i r_i \ge r_0, \\ 0, & \exists i\ u_i r_i < r_0. \end{cases}$$

где b_i^* находится по формуле (59).

Но верхний уровень может влиять на средний, только если

$$(61)\quad \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i r_i + H\left(1 - \sum_{i=1}^{n} r_i\right) - H(1 - n r_0)}{\sum_{i=1}^{n} g_i(r_0)} - \varepsilon_1 \le 1.$$

А в случае «заинтересованного» верхнего уровня

$$(62)\quad p = \begin{cases} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} b_i^* r_i}{\sum_{i=1}^{n} g_i(r_i)} - \varepsilon_1, & \forall i\ u_i r_i \ge r_0, \sum_{i=1}^{n} r_i = 1, \\ 0, & \exists i\ u_i r_i < r_0 \text{ или } \sum_{i=1}^{n} r_i < 1, \end{cases}$$

где b_i^* находится по формуле (59). То есть в этом случае элементу верхнего уровня выгодно, чтобы все ресурсы были распределены между элементами нижнего уровня, что лишает возможности среднему уровню оставлять часть ресурсов себе.

Но верхний уровень может влиять на средний, только если

$$(63)\quad \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i r_i}{\sum_{i=1}^{n} g_i(r_i)} - \varepsilon_1 \le 1 .$$

Этот вид модели наименее эффективен при борьбе с коррупцией, но в этом случае удается добиться того, чтобы элементы среднего и нижнего уровня использовали ресурсы строго по назначению.

9. Заключение

В статье построена и исследована статическая трехуровневая модель распределения ресурсов с учетом механизма коррупции. Рассматривались равновесия принуждения и побуждения. Доказано, что в случае «заинтересованного» верхнего уровня бороться с коррупцией можно в трех из четырех рассмотренных случаев, а именно в моделях «принуждение–принуждение», «принуждение–побуждение» и «побуждение–принуждение». В остальных случаях, в том числе и во всех случаях при «незаинтересованном» верхнем уровне, возможно лишь ограничение механизма коррупции. В ряде случаев удается добиться того, чтобы элементы нижнего и среднего уровня (в случае «заинтересованного» верхнего уровня) не тратили ресурсы на частные цели: в моделях «принуждение–побуждение» и «побуждение–побуждение». В случае принуждения всегда можно добиться того, чтобы выполнилось условие устойчивого развития, в случае побуждения этого можно добиться лишь при соответствующих условиях (46), (48), (61) и (63).

Литература

1. ГОРБАНЕВА О.И. *Игровые модели распределения ресурсов в иерархических системах управления качеством речной во-*

ды // Математическая теория игр и ее приложения. – 2010. – Т. 2, вып. 1. – С. 27–46.
2. ГОРБАНЕВА О.И., УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Модели распределения ресурсов в иерархических системах управления качеством речной воды* // Управление большими системами. – 2009. – №26. – С. 64–80.
3. КОНОНЕНКО А.Ф. *Теория игр и иерархические системы* // Планирование и управление экономическими целенаправленными системами. – Новосибирск: Наука, 1974. – С. 63–72.
4. РЫБАСОВ Е.А., УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Математическое моделирование иерархического управления эколого-экономическими системами с учетом коррупции* // Компьютерное моделирование. Экология. Выпуск 2 / Под редакцией Угольницкого Г.А. – М.: Вузовская книга, 2004. – С. 45–65.
5. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., ГОРБАНЕВА О.И. *Задача распределения ресурсов в организационной системе с учетом коррупции и ее экологические приложения* // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Технические науки. – 2007. – №1. – С. 43–47.
6. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Математическое моделирование иерархического управления устойчивым развитием* // Компьютерное моделирование. Экология. Выпуск 2 / Под редакцией Угольницкого Г.А. – М.: Вузовская книга, 2004. – С. 101–125.
7. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Теоретико-математическое моделирование методов иерархического управления устойчивым развитием* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2002. – №1. – С. 34–50.
8. BLISS C., TELLA R.D. *Does Competition Kill Corruption?* // Journal of Political Economy. – 1997. – Vol. 105, №5. – P. 64–80.
9. LIEN D.D. *Corruption and Allocation Efficiency* // Journal of Development Economics. – 1990. – №33. – P. 35–43.

10. LUI F.T. *An Equilibrium Quening Model of Bribery* // Journal of Political Economy. – 1985 – Vol. 93, №4. – P. 32–39.
11. OUGOLNITSKY G.A. *Game Theoretic Modeling of the Hierarchical Control of Sustainable Development Game* // Theory and Applications – 2002. –Vol. 8. – P. 107–118.
12. SHLEIFER A., VISHNY R.W. *Corruption* // The Quarterly Journal of Economics. –1993. – Vol. 107, №33. – P. 43–53.

STATIC MODELS OF CORRUPTION IN RESOURCE ALLOCATION MECHANISMS FOR THREE-LEVEL CONTROL SYSTEMS

Gorbaneva Olga Ivanovna, South Federal University, Rostov-on-Don, Cand.Sc., assistant professor (gorbaneva@mail.ru).

Abstract: *In this article the static problem of resource allocation in a three-level control system is considered. The impact of corruption mechanism on the economic system, the objective function of participants and their strategies are investigated. The abilities and ways to fight corruption in the case of implying compulsion and impulsion mechanisms are estimated. Compulsion and impulsion equilibria are found. The ability of fight against corruption in the case of the «interested» principal is proved.*

Keywords: resource allocation, Γ_2 game, Germeier theorem, impulsion, compulsion.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Д. А. Новиковым