УДК 519.71
ББК 32.817

СВЯЗЬ АРИФМЕТИКИ НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ С АРИФМЕТИКОЙ КВАТЕРНИОНОВ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ АНАЛИЗЕ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Усков А. А.[1]**, Киселев И. А.**[2]
(*Российский университет кооперации, г. Мытищи, Московской области*)

Впервые сформулированы и доказаны утверждения, показывающие, что при выполнении определенных условий арифметические операции над нечеткими числами LR-типа и кватернионами эквивалентны. Приведенные в статье утверждения дают возможность использовать наглядное графическое представление арифметических операций над нечеткими числами в виде векторных диаграмм и годографов, кроме того, в ряде случаев позволяют упростить программную реализацию указанных арифметических операций. Рассмотрен пример анализа системы управления в условиях нечеткости с использованием предлагаемого подхода. Статья продолжает опубликованные ранее результаты, касающиеся связи между арифметическими операциями над нечеткими числами LR-типа и комплексными числами.

Ключевые слова: арифметические операции, кватернионы, матрицы, нечеткие числа.

1. Введение

Нечеткие числа LR-типа широко используются в практике нечеткого моделирования, позволяя уменьшить трудоемкость

---

[1] *Андрей Александрович Усков, доктор технических наук, профессор* (*andrey@uskov.net*, *www.uskov.net*).
[2] *Игорь Александрович Киселев, аспирант*.

выполнения арифметических и логических операций [1, 5, 10–12].

В работе авторов [6] показана связь между арифметическими операциями над симметричными нечеткими числами LR-типа и комплексными числами. В ней же приведен краткий обзор и проведена систематизация научных работ, относящихся к области применения нечетких чисел.

В настоящей статье результаты работы [6] распространены на случай несимметричных нечетких чисел, в частности показана связь между арифметическими операциями над нечеткими числами и кватернионами, которые являются обобщением комплексных чисел.

Нечеткие числа – нечеткие переменные, определенные на числовой оси. Нечеткое число определяется как нечеткое множество A на множестве действительных чисел R с функцией принадлежности $\mu_A(x) \in [0, 1]$, где x – действительное число, т.е. $x \in R$ [1, 5].

Нечеткие числа LR-типа – это разновидность нечетких чисел специального вида, задаваемых по определенным правилам [1, 5]. Нечеткие числа LR-типа были предложены в работах [8–11] с целью уменьшения трудоемкости выполнения арифметических и логических операций над нечеткими числами путем аппроксимации функций принадлежности типовыми нелинейными функциями, задаваемыми своими параметрами (LR-аппроксимация). В работах [8–11] приводятся классический вариант арифметических операций над нечеткими числами LR-типа, а также примеры решения уравнений и неравенств с данными нечеткими числами.

Функции принадлежности нечетких чисел LR-типа задаются с помощью невозрастающих на $[0, +\infty)$ четных неотрицательных действительных функций действительного аргумента $L(x)$ и $R(x)$, удовлетворяющих свойствам: а) $L(-x) = L(x)$, $R(-x) = R(x)$; б) $L(0) = R(0) = 1$.

Пусть $L(x)$ и $R(x)$ – функции LR-типа. Унимодальное нечеткое число A с модой a (т.е. $\mu_A(a) = 1$) с помощью $L(x)$ и $R(x)$ задается следующим образом:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{a-x}{\alpha}\right) & \text{при } \; x \le a, \\ R\left(\dfrac{x-a}{\beta}\right) & \text{при } x > a; \end{cases}$$

где a – мода; $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – левый и правый коэффициенты нечеткости.

Таким образом, при заданных $L(x)$ и $R(x)$ нечеткое число LR-типа определяется тройкой (a, α, β).

Нечеткое число LR-типа будем называть симметричным, если левый и правый коэффициенты нечеткости равны, т.е. $\alpha = \beta$.

Предположим, имеются нечеткие числа LR-типа:

$\tilde{a} = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ и $\tilde{b} = (n, \gamma, \delta)_{LR}$

Арифметические операции над нечеткими LR-числами определяются следующим образом [1, 6]:

сложение

$$(m, \alpha, \beta)_{LR} + (n, \gamma, \delta)_{LR} = (m+n, \alpha+\gamma, \beta+\delta)_{LR},$$

умножение

$$(m, \alpha, \beta)_{LR} \cdot (n, \gamma, \delta)_{LR} = (mn, \alpha n + \gamma m, \beta n + \delta m)_{LR},$$

$m > 0$, $n > 0$,

противоположный элемент

$$-(m, \alpha, \beta)_{LR} = (-m, \beta, \alpha)_{LR},$$

обратный элемент

$$(m, \alpha, \beta)_{LR}^{-1} = \left(\frac{1}{m}, \frac{\beta}{m^2}, \frac{\alpha}{m^2}\right)_{LR}, \; m > 0,$$

В статье впервые сформулированы и доказаны утверждения, показывающие эквивалентность при выполнении определенных условий арифметических операций над нечеткими числами LR-типа и кватернионами, а также соответствующими им матрицами.

2. *Арифметические операции над нечеткими числами и кватернионами*

Приведем утверждение, определяющее связь между арифметическими операциями над нечеткими числами LR-типа и кватернионами.

Утверждение 1. Введем в рассмотрение преобразование, ставящее в однозначное соответствие произвольное нечеткое число LR-типа $\tilde{\mathbf{x}} = (y, z_1, z_2)_{LR}$ и кватернион $\mathbf{x} = y + z_1 i + z_2 j + \xi k$, где ξ – произвольный параметр, удовлетворяющий условию $\xi > 0$, $\xi << z_1$, $\xi << z_2$. Таким образом, $\tilde{\mathbf{x}} \sim \mathbf{x}$.

Пусть далее имеются нечеткие числа LR-типа $\tilde{\mathbf{a}} = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ и $\tilde{\mathbf{b}} = (n, \gamma, \delta)_{LR}$. Сопоставим им кватернионы:

$\tilde{\mathbf{a}} \sim \mathbf{a} = m + \alpha i + \beta j + \xi k$ и $\tilde{\mathbf{b}} \sim \mathbf{b} = n + \gamma i + \delta j + \xi k$,

где ξ – произвольный параметр, удовлетворяющий условию $\xi > 0$, $\xi << \alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Тогда при выполнении условий $m >> \alpha, \beta, \gamma, \delta$ и $n >> \alpha, \beta, \gamma, \delta$ арифметические операции над нечеткими числами $\tilde{\boldsymbol{a}}$ и $\tilde{\boldsymbol{b}}$ соответствуют операциями над кватернионами:

(1) $\tilde{\mathbf{a}} + \tilde{\mathbf{b}} \sim \mathbf{a} + \mathbf{b}$,

(2) $\tilde{\mathbf{a}} \cdot \tilde{\mathbf{b}} \sim \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$,

(3) $-\tilde{\mathbf{a}} \sim -\bar{\mathbf{a}}^R$,

(4) $\tilde{\mathbf{a}}^{-1} \sim \left[\bar{\mathbf{a}}^{-1}\right]^R$,

где $\bar{\mathbf{a}} = m - \alpha i - \beta j - \xi k$ – сопряженный по отношению к кватерниону $\mathbf{a}$; значком R отмечена введенная операция *рокировки*, осуществимая следующим образом:

$\mathbf{x}^R = y + z_2 i + z_1 j + \xi k$, т.е. i-й и j-й компоненты кватерниона меняются местами.

Замечание 1. Выше была введена новая операция над кватернионами, состоящая в замене местами i-й и j-й компонент – рокировка. Если нечеткие числа симметричные, т.е. $z_1 = z_2$, $\alpha = \beta$, $\gamma = \delta$, то i-й и j-й компоненты соответствующих им кватернионов будут одинаковы и рокировка не будет изменять исходный кватернион, вследствие чего формулы (1)–(4) можно записать без значка рокировки, при этом они в точности будут совпадать с формулами, приведенными в работе [6] (разница лишь в том, что **a** и **b** в формулах (1)–(4) – кватернион, в статье [6] – комплексные числа).

Таким образом, приведенное утверждение включает результаты работы [6] как частный случай для симметричных нечетких чисел.

Замечание 2. На первый взгляд может показаться, что в данном случае достаточно использовать не кватернионы, а гиперкомплексные числа с двумя мнимыми компонентами – *триплеты* [2, 4]. Однако для таких гиперкомплексных чисел не всегда определена операция нахождения обратного элемента, в то время как на множестве кватернионов обратный элемент всегда существует [2, 4].

Доказательство.

Сравним результаты арифметических операций над нечеткими числами $\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}$ и их изображениями в виде кватернионов **a** и **b**.

Сложение:

$$\tilde{\mathbf{a}} + \tilde{\mathbf{b}} = (m+n, \alpha+\gamma, \beta+\delta)_{LR},$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (m+n) + (\alpha+\gamma)i + (\beta+\delta)j + 2\xi k.$$

С учетом произвольности выбора параметра при компоненте k получаем $\tilde{\mathbf{a}} + \tilde{\mathbf{b}} \sim \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

Умножение:

$$\tilde{\mathbf{a}} \cdot \tilde{\mathbf{b}} = (mn, \alpha n + \gamma m, \beta n + \delta m)_{LR},$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (mn - \alpha\gamma - \beta\delta - \xi^2) + (\alpha n + \gamma m + \beta\xi - \xi\delta)i + \\ + (\beta n + \delta m - \alpha\xi - \xi\gamma)j + (m\xi + \xi n + \alpha\delta - \xi\gamma)k.$$

С учетом того, что $m >> \alpha, \beta, \gamma, \delta,\ n >> \alpha, \beta, \gamma, \delta,\ \xi << \alpha, \beta, \gamma, \delta,$ следует

$$mn >> \alpha\gamma + \beta\delta,$$

$$mn >> \xi^2,$$

$$\alpha n + m\gamma >> \xi(\beta - \delta),$$

$$\beta n + m\delta >> \xi(\alpha + \gamma),$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \approx mn + (m\gamma + \alpha n)i + (m\delta + \beta n)j + (m\xi + \xi n + \alpha\delta - \xi\gamma)k.$$

С учетом произвольности выбора параметра при компоненте k получим $\tilde{\mathbf{a}} \cdot \tilde{\mathbf{b}} \sim \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

Противоположный элемент:

$$-\tilde{\mathbf{a}} = (-m, \beta, \alpha)_{LR},$$

$$-\bar{\mathbf{a}}^R = -m + \beta i + \alpha j + \xi k.$$

Таким образом

$$-\tilde{\mathbf{a}} \sim -\bar{\mathbf{a}}^R.$$

Обратный элемент:

$$\tilde{\mathbf{a}}^{-1} = \left(\frac{1}{m}, \frac{\beta}{m^2}, \frac{\alpha}{m^2}\right)_{LR}, \; m > 0,$$

$$\left[\bar{\mathbf{a}}^{-1}\right]^R = \frac{m + \beta i + \alpha j + \xi k}{m^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \xi^2}.$$

Используя условия $m >> \alpha, \beta$ и $\xi << \alpha, \beta$, получим

$$\left[\bar{\mathbf{a}}^{-1}\right]^R \approx \frac{1}{m} + \frac{\beta}{m^2} i + \frac{\alpha}{m^2} j + \frac{\xi}{m^2} k.$$

С учетом произвольности выбора параметра при компоненте k имеем: $\tilde{\mathbf{a}}^{-1} \sim \left[\bar{\mathbf{a}}^{-1}\right]^R$. *Утверждение доказано.* ■

Рассмотрим прямоугольную систему координат в трехмерном пространстве с координатными осями +1, i и j. Будем изображать кватернионы в виде векторов со следующими компонентами: действительная часть кватерниона – проекция на ось +1, параметр при i – проекция на ось i и параметр при j – проекция на ось j. В соответствии с утверждением 1, в данной системе координат в виде векторов можно изображать и нечеткие числа.

Замечание 3. Рассматриваемая система координат является естественным обобщением комплексной плоскости, получена путем добавления к последней оси j и отличается от традиционно используемой для изображения векторных кватернионов системы координат с осями i, j и k [4].

На рис. 1 представлена графическая иллюстрация выполнения арифметических операций сложения трех нечетких чисел:

$$\tilde{\mathbf{a}} = (30, 2, 3)_{LR} \sim \mathbf{a} = 30 + 2i + 3j + \xi,$$

$$\tilde{\mathbf{b}} = (25, 1, 2)_{LR} \sim \mathbf{b} = 25 + i + 2j + \xi,$$

$$\tilde{\mathbf{c}} = (20, 1, 1)_{LR} \sim \mathbf{c} = 20 + i + j + \xi,$$

$$\tilde{\mathbf{d}} = \tilde{\mathbf{a}} + \tilde{\mathbf{b}} + \tilde{\mathbf{c}} = (75, 4, 6)_{LR} \sim \mathbf{d} = 75 + 4i + 6j + 3\xi .$$

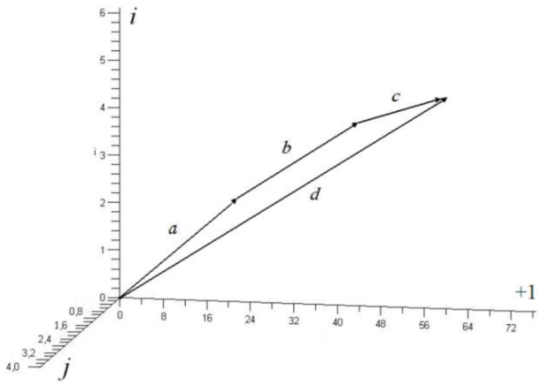

Рис. 1. Графическая иллюстрация операции сложения нечетких чисел

3. Матричный метод выполнения арифметических операций над нечеткими числами

Приведем утверждение, определяющую связь между арифметическими операциями над нечеткими числами LR-типа и матрицами.

<u>*Утверждение 2.*</u> Введем в рассмотрение преобразование, ставящее в однозначное соответствие произвольное нечеткое число LR-типа $\tilde{\mathbf{x}} = (y, z_1, z_2)_{LR}$ и матрицу

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} y & z_1 & z_2 & -\xi \\ -z_1 & y & -\xi & -z_2 \\ -z_2 & \xi & y & z_1 \\ \xi & z_2 & -z_1 & y \end{bmatrix},$$

где ξ – произвольный параметр, удовлетворяющий условию $\xi > 0$, $\xi << z_1$, $\xi << z_2$.

Таким образом, $\tilde{\mathbf{x}} \sim \mathbf{X}$.

Пусть далее имеются нечеткие числа LR-типа $\tilde{\mathbf{a}} = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ и $\tilde{\mathbf{b}} = (n, \gamma, \delta)_{LR}$. Сопоставим им матрицы:

$$\tilde{\mathbf{a}} \sim \mathbf{A} = \begin{bmatrix} m & \alpha & \beta & -\xi \\ -\alpha & m & -\xi & -\beta \\ -\beta & \xi & m & \alpha \\ \xi & \beta & -\alpha & m \end{bmatrix} \text{ и } \tilde{\mathbf{b}} \sim \mathbf{B} = \begin{bmatrix} n & \gamma & \delta & -\xi \\ -\gamma & n & -\xi & -\delta \\ -\delta & \xi & n & \gamma \\ \xi & \delta & -\gamma & n \end{bmatrix},$$

где ξ – произвольный параметр, удовлетворяющий условию $\xi > 0$, $\xi << \alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Тогда при выполнении условий $m >> \alpha, \beta, \gamma, \delta$, $n >> \alpha, \beta, \gamma, \delta$, арифметические операции «сложение» и «умножение» над нечеткими числами $\tilde{\mathbf{a}}$ и $\tilde{\mathbf{b}}$ соответствуют операциям над матрицами: $\tilde{\mathbf{a}} + \tilde{\mathbf{b}} \sim \mathbf{A} + \mathbf{B}$, $\tilde{\mathbf{a}} \cdot \tilde{\mathbf{b}} \sim \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

Доказательство утверждения 2 основано на изоморфизме кватернионов $\mathbf{x} = y + z_1 i + z_2 j + \xi k$ и матриц вида

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} y & z_1 & z_2 & -\xi \\ -z_1 & y & -\xi & -z_2 \\ -z_2 & \xi & y & z_1 \\ \xi & z_2 & -z_1 & y \end{bmatrix}$$

[2, 9], а также эквивалентности арифметических операций над нечеткими числами и кватернионами (см. утверждение 1).

Приведенные утверждения дают возможность использовать наглядное графическое представление арифметических операций над нечеткими числами в виде векторных диаграмм и годографов. Кроме того, в ряде случаев, позволяют упростить программную реализацию указанных арифметических операций. Такое упрощение связано с тем, что распространенные табличные процессоры и системы компьютерной математики (MS Excel, MATLAB, MathCAD, Maple и др.) имеют встроенные функции для реализации операций над матрицами и даже кватернионами (например, надстройка Quaternions for Maple), в то же время не имеют средств работы с нечеткими числами LR-типа.

4. Пример анализа системы управления

Рассмотрим разомкнутую систему автоматического управления со структурой, приведенной на рис. 2.

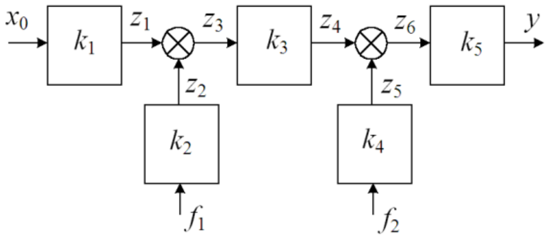

Рис. 2. Структурная схема разомкнутой системы управления

Предположим, что входной сигнал x_0, возмущающие воздействия f_1, f_2 и коэффициенты передачи $k_1 - k_5$ заданы нечеткими числами LR-типа: $\tilde{x} = (100, 0, 0)_{LR}$, $\tilde{f}_1 = (20; 0{,}3; 0{,}1)_{LR}$, $\tilde{f}_2 = (100, 1, 3)_{LR}$, $\tilde{k}_1 = (10; 0{,}1; 0{,}2)_{LR}$, $\tilde{k}_2 = (10, 0, 0)_{LR}$, $\tilde{k}_3 = (15, 0, 0)_{LR}$, $\tilde{k}_4 = (10; 1; 0{,}5)_{LR}$, $\tilde{k}_5 = (1; 0{,}1; 0{,}3)_{LR}$.

Требуется определить выходной сигнал системы y.

Согласно структурной схеме (см. рис. 2) выходной сигнал системы определяется формулой

(5) $\tilde{y} = \tilde{k}_5(\tilde{k}_4 \tilde{f}_2 + \tilde{k}_3(\tilde{k}_1 \tilde{x}_0 + \tilde{k}_2 \tilde{f}_1))$.

На основе утверждения 2 перепишем формулу (5) в следующем виде:

(6) $\mathbf{Y} = \mathbf{K}_5(\mathbf{K}_4\mathbf{F}_2 + \mathbf{K}_3(\mathbf{K}_1\mathbf{X}_0 + \mathbf{K}_2\mathbf{F}_1))$,

где $\tilde{y} \sim \mathbf{Y}$.

$$\tilde{x}_0 \sim \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & -\xi \\ 0 & 100 & -\xi & 0 \\ 0 & \xi & 100 & 0 \\ \xi & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}, \quad \tilde{k}_1 \sim \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 10 & 0{,}1 & 0{,}2 & -\xi \\ -0{,}1 & 10 & -\xi & -0{,}2 \\ -0{,}2 & \xi & 10 & 0{,}1 \\ \xi & 0{,}2 & -0{,}1 & 10 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{k}_2 \sim \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & -\xi \\ 0 & 10 & -\xi & 0 \\ 0 & \xi & 10 & 0 \\ \xi & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad \tilde{k}_3 \sim \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & -\xi \\ 0 & 15 & -\xi & 0 \\ 0 & \xi & 15 & 0 \\ \xi & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{k}_4 \sim \mathbf{K}_4 = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0{,}5 & -\xi \\ -1 & 10 & -\xi & -0{,}5 \\ -0{,}5 & \xi & 10 & 1 \\ \xi & 0{,}5 & -1 & 10 \end{pmatrix}, \quad \tilde{k}_5 \sim \mathbf{K}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}1 & 0{,}3 & -\xi \\ -0{,}1 & 1 & -\xi & -0{,}3 \\ -0{,}3 & \xi & 1 & 0{,}1 \\ \xi & 0{,}3 & -0{,}1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{f}_1 \sim \mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} 20 & 0{,}3 & 0{,}1 & -\xi \\ -0{,}3 & 20 & -\xi & -0{,}1 \\ -0{,}1 & \xi & 20 & 0{,}3 \\ \xi & 0{,}1 & -0{,}3 & 20 \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}_2 \sim \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} 100 & 1 & 3 & -\xi \\ -1 & 100 & -\xi & -3 \\ -3 & \xi & 100 & 1 \\ \xi & 3 & -1 & 100 \end{pmatrix}.$$

Выберем малый параметр $\xi = 0{,}0001$.

Вычисления с использованием формулы (6) дают

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1{,}885\cdot10^4 & 2{,}206\cdot10^3 & 6{,}094\cdot10^3 & 47{,}258 \\ -2{,}206\cdot10^3 & 1{,}885\cdot10^4 & 47{,}258 & -6{,}094\cdot10^3 \\ -6{,}094\cdot10^3 & -47{,}258 & 1{,}885\cdot10^4 & 2{,}206\cdot10^3 \\ -47{,}258 & 6{,}094\cdot10^3 & -2{,}206\cdot10^3 & 1{,}885\cdot10^4 \end{pmatrix}.$$

Перейдя от матрицы $\mathbf{Y}$ к нечеткому числу $\tilde{y}$, получим

$$\tilde{y} = (1{,}885\cdot10^4,\ 2{,}206\cdot10^3,\ 6{,}094\cdot10^3)_{LR}.$$

5. Выводы

В статье впервые предложены утверждения, позволяющие сводить арифметические операции над нечеткими числами LR-типа к арифметическим операциям над кватернионами или матрицами, что дает возможность:

1) использовать наглядное графическое представление арифметических операций над нечеткими числами LR-типа в виде векторных диаграмм и годографов;

2) в ряде случаев, упростить программную реализацию арифметических операций над нечеткими числами LR-типа;

3) переходить в формулах от матриц с элементами в виде нечетких чисел LR-типа к матрицам большей размерности с элементами в виде действительных чисел.

Литература

1. АЛТУНИН А.Е., СЕМУХИН М.В. *Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях.* – Тюмень: Издательство Тюменского государственного университета, 2000. – 352 с.
2. БАЛК М.Б., БАЛК Г.Д. *Реальные применения мнимых чисел.* – Киев: Радянська школа, 1988. – 255 с.

3. БРОНШТЕЙН И.Н., СЕМЕНДЯЕВ К.А. *Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов.* – М.: Наука, 1986. – 544 с.
4. КАНТОР И.Л., СОЛОДОВНИКОВ А.С. *Гиперкомплексные числа.* – М.: Наука, 1973. – 144 с.
5. *Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта* / Под ред. Д.А. Поспелова. – М.: Наука, 1986. – 312 с.
6. УСКОВ А.А., КИСЕЛЕВ И.А. *Комплексный и матричный методы выполнения арифметических операций над нечеткими числами* // Управление большими системами. Вып. 40. – М.: ИПУ РАН, 2012. – С. 96–107.
7. УСКОВ А.А., СУРГУЧЕВА И.В., ГОРБУНОВ А.М. *Анализ систем обработки информации и управления с помощью групповых нечетких чисел* // Программные продукты и системы. – 2009. – №3. – С. 19–21.
8. УСКОВ А.А., КИСЕЛЕВ И.А. *Комплексный метод выполнения арифметических операций над нечеткими числами и его применение при экономическом анализе в условиях неопределенности* // Программные продукты и системы. – 2013. – №2. – С. 175–178.
9. ЧЕЛНОКОВ Ю.Н. *Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения.* – М.: Физматлит, 2006. – 512 с.
10. DUBOIS D., PRADE H. *Fuzzy real algebra: some results* // Fuzzy Sets and Systems. – 1979. – Vol. 2, №4. – P. 327–348.
11. DUBOIS D., PRADE H. *Systems of linear fuzzy constraints* // Fuzzy Sets and Systems. – 1980. – Vol. 3, №1. – P. 37–48.
12. DUBOIS D., PRADE H. *Fuzzy sets and systems: Theory and Applications.* – New York: Acad. Press, 1980. – 394 p.

COMPARING FUZZY ARITHMETIC WITH QUATERNION ARITHMETIC AND APPLYING THE FORMER TO CONTROL SYSTEM ANALYSIS

Andrey Uskov, Russian University of Cooperation, Moscow, Doctor of Science, professor.
Igor Kiselev, Russian University of Cooperation, Moscow, Post-graduate student.

Abstract: *We prove equivalence conditions for arithmetical operations with LR-type fuzzy numbers and for those with quaternions. Our results justify using graphical tools like vector and hodograph diagrams to visualize arithmetical operations. In some cases this equivalence also simplifies algorithms which implement arithmetic operations. We illustrate our approach with the analysis of a control system under fuzzy uncertainty. This paper extends our recent results on comparing arithmetical operations with LR-type fuzzy numbers and those with complex numbers.*

Keywords: arithmetic operations, quaternions, matrices, fuzzy numbers.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии М.В. Губко

Поступила в редакцию 07.12.2012.
Опубликована 31.03.2014.