УДК 519.83
ББК 22.18

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИНСАЙДЕРСКИХ ТОРГОВ С НЕНУЛЕВЫМ СПРЭДОМ[1]

Сандомирская М. С.[2]
(*Санкт-Петербургский экономико-математический институт РАН, Санкт-Петербург,
НИУ Высшая школа экономики, Санкт-Петербург*)

Исследована модель многошаговых инсайдерских торгов рисковыми активами одного типа между двумя маркет-мейкерами на фондовом рынке. Один из игроков (*инсайдер*) *обладает приватной информацией об ликвидной цене актива. На каждом шаге торгов игроки назначают цены покупки и продажи одной акции с фиксированным ненулевым спрэдом. На основе действий инсайдера неинформированный игрок пересчитывает условное математическое ожидание ликвидной цены. Для торгов бесконечной продолжительности построены верхняя и нижняя границы гарантированного выигрыша инсайдера и стратегии обоих игроков, обеспечивающие эти границы. Вычислены потери инсайдера при раскрытии его приватной информации.*

Ключевые слова: биржевые торги, бид-аск спрэд, инсайдер, повторяющиеся игры с неполной информацией, простое случайное блуждание.

---

[1] *Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты № 10-06-00368-а и 13-01-00462-а, и премии им. Б.Л. Овсиевича* (*2012 г.*) *Автор признателен В.К. Доманскому и В.Л. Крепс за ценное обсуждение содержания статьи.*

[2] *Марина Сергеевна Сандомирская, кандидат физико-математических наук* (*sandomirskaya_ms@mail.ru, msandomirskaya@hse.ru*).

Введение. Гипотеза об эндогенном происхождении колебаний цен на фондовых рынках

Анализ процесса ценообразования и определение цены приватной информации на финансовых рынках являются важными задачами современной финансовой теории. В качестве модели для описания эволюции цен, начиная с работы Башелье [7], используется модель случайных блужданий и ее непрерывный аналог – броуновское движение. Возникновение случайных колебаний цен традиционно принято объяснять экзогенными воздействиями независимых внешних факторов, случайно изменяющихся с течением времени. Однако такое объяснение не учитывает возможного стратегического влияния маркет-мейкеров на флуктуации цен. Так, в ряде теоретико-игровых работ (см. [1, 9, 10, 11]) выдвигается и подтверждается результатами исследований гипотеза о возможном эндогенном происхождении колебаний цен на финансовых рынках.

Эта гипотеза состоит в следующем. Институциональные инвесторы по ряду причин могут иметь доступ к конфиденциальной информации о состоянии финансового рынка. Например, эти инвесторы могут обладать передовыми инструментами анализа поступающего потока информации. Биржевые агенты, имеющие дополнительную инсайдерскую информацию, при длительном взаимодействии неизбежно выдают эту информацию другим участникам рынка через свои действия. Однако инсайдер не заинтересован в немедленном раскрытии своей приватной информации, влекущем утрату стратегического преимущества. Это стремление инсайдера скрывать свою информацию вынуждает его к стратегическому маневрированию, выражающемуся в рандомизации своих действий. Идея состоит в том, что именно эта рандомизация приводит к сглаживанию резких скачков рыночных цен (обуславливаемых внешними шоковыми факторами) и влечет появление в эволюции цен броуновской компоненты.

Впервые эндогенная гипотеза в таком виде была высказана в работе Де Мейера и Салей [9], хотя модели торгов с крупным игроком рассматривались и в более ранних работах, например, в работе Кайла [14]. Принципиальное отличие модели Кайла от модели Де Мейера и Салей состоит в наличии на финансовом рынке фоновых игроков (noise traders), которые добавляют определенный шум сигналу, получаемому неинформированным игроком, и таким образом «обеспечивают маскировку» действиям инсайдера. Фактически в этом случае наблюдаемые флуктуации носят экзогенный, а не стратегический характер.

Используя теорию повторяющихся игр с неполной информацией, которая дает возможность исследования стратегических и информационных аспектов формирования цен на фондовых рынках, Де Мейер и Салей демонстрируют эту идею на примере сильно упрощенной, как пишут сами авторы, модели биржевых торгов. Авторы показывают, что при бесконечном увеличении числа шагов n значение игры неограниченно растет как $\sqrt{n}$, и в асимптотике цен сделок появляется броуновская составляющая.

В модели [9] допускались произвольные цены. Однако более естественно рассматривать дискретные модели, где в качестве единицы выбирается цена пункта (минимального изменения котировки акции).

Такие модели рассматривались в работах Доманского и Крепс [1, 11], и результаты также говорят в пользу эндогенной гипотезы. Более подробно остановимся на этих моделях в разделе 1.

Работа [9] завершается перечислением возможных усложнений модели, которые могли бы сделать ее более реалистичной. В списке усложнений значится более общий торговый механизм, о котором также идет речь в работе [10], где, в частности, предлагается рассматривать модель, в которой игроки назначают различные цены покупки (бид) и продажи акции (аск). Во всех рассматриваемых ранее моделях игроки назначали на каждом шаге только одну цену, т.е. цены покупки и продажи совпадали.

В настоящей работе исследуется упрощенная теоретико-игровая модель биржевых торгов между двумя агентами, которые на каждом этапе торгов назначают несовпадающие целочисленные цены покупки и продажи актива. Максимальная разница между ценой предложения на покупку и ценой предложения на продажу (спрэд двусторонней котировки), устанавливаемыми маркет-мейкером, определяются его соглашением с биржей (например, при торговле на Фондовой бирже ММВБ). Рассмотрена модель с фиксированным спрэдом, который не меняется при колебании котировки. Фиксированный спрэд возникает на рынках с высокой ликвидностью активов, например, на международном валютном (фиксированная разница между ценой покупки и продажи валюты). На фондовом рынке фиксированный спрэд встречается при торговле некоторыми производными финансовыми инструментами (так называемыми контрактами CFD – Contract For Difference).

Целью работы является дальнейшее исследование эндогенной гипотезы для этого варианта модели: опираясь на предположение о разумном поведении инсайдера, мы показываем, каким образом стратегия инсайдера может порождать случайные флуктуации цен на финансовых рынках. Одновременно исследуется вопрос о влиянии величины спрэда на информационную ренту инсайдера.

Модель анализируется при помощи повторяющейся игры с асимметричной информацией. Показано, что при неограниченной продолжительности торгового периода инсайдер может гарантировать лишь конечный выигрыш, величина которого обратно пропорциональна величине спрэда. Получены функции, дающие верхнюю и нижнюю оценки значения бесконечношаговой игры. Построены разумные стратегии игроков, гарантирующие значения этих функций. Показано, что в случае минимального (тривиального) спрэда верхняя и нижняя границы совпадают и дают значение игры. Вычислены средние потери инсайдера относительно ожидаемого уровня прибыли в случае непредвиденного раскрытия инсайдерской информации.

1. Обзор теоретико-игровых результатов и моделей инсайдерских торгов

Упрощенная дискретная модель инсайдерских биржевых торгов с нулевым бид-аск спрэдом была введена в работе Доманского [11]. Эта модель является дискретным аналогом непрерывной модели Де Мейера и Салей [9].

В этой модели имеются два риск-нейтральных агента с противоположными интересами, вступающих в n-шаговые торги за рисковый актив (акции одного типа). Ликвидная цена акции определяется случайным ходом (шоковым внешним воздействием, например, политическим событием, переходом к новой технологии производства и т.п.) перед началом торгов и может принимать два различных целочисленных значения. Не умаляя общности, полагается, что низкое значение цены равно 0 с вероятностью $1 - p$ (состояние L) и высокое равно $m \in \mathbb{N}$ с вероятностью p (состояние H). Игрок 1 информирован о результате случайного хода (это и составляет его инсайдерскую информацию), Игрок 2 не информирован. Оба игрока знают вероятность p. То, что Игрок 1 – инсайдер, является общим знанием. Риск-нейтральность игроков заключается в том, что полезность случайного выигрыша для них равна его математическому ожиданию.

На каждом шаге торгов игроки одновременно предлагают свою целочисленную цену за одну акцию, т.е. цена покупки и цена продажи совпадают. Назвавший более высокую цену покупает по этой цене одну акцию у оппонента. Если игроки назвали одинаковые цены, то трансакции не происходит. Предполагается, что трансакционные издержки равны нулю. Каждый игрок стремится увеличить свой итоговый капитал (деньги плюс акции по ликвидной цене).

Модель формализуется при помощи антагонистической повторяющейся n-шаговой игры с неполной информацией у второго игрока. Такие игры впервые были введены Ауманом и Машлером в 1966 г. [6]. Они задаются конечным множеством состояний (в данной модели это L и H) и матрицей одношаговой антагонистической игры для каждого состояния. Информационная структура соответствует описанной выше. Для данной модели из общей теории, разработанной Ауманом и Машлером, следует существование значения n-шаговой игры и оптимальных радомизированных стратегий обоих игроков, обеспечивающих это значение.

Информационное преимущество инсайдера обеспечивает ему ожидаемый положительный выигрыш в многошаговой игре. Возникает естественный вопрос о том, почему неинформированный игрок принимает участие в заведомо невыгодной игре. В работах [1, 10] обсуждается мотивация рассмотрения таких моделей торгов. Не повторяя аргументацию этих авторов, отметим лишь, что маркет-мейкеры (в том числе неинформированные), заключая договор с биржей, принимают на себя обязательства постоянно (за исключением времени котировального перерыва) подавать заявки и обеспечивать ликвидность рынка. Очевидно, что в данной постановке рынок не является строго эффективным в течении всего торгового периода до момента полного раскрытия инсайдерской информации.

Для модели [11] доказана ограниченность значений повторяющихся игр при числе шагов, стремящемся к бесконечности. Такой эффект является следствием дискретности цен и не наблюдался в модели [9] с произвольными ставками и ценами. В [16] описано свойство, ответственное за ограниченность значения бесконечношаговой игры в более широком классе повторяющихся игр с неполной информацией.

В [11] для любых параметров m и p найдено значение бесконечношаговой игры и построены оптимальные стратегии обоих игроков. Инсайдер своими действиями управляет последовательностью апостериорных вероятностей высокой цены, которые после каждого шага торгов обновляются Игроком 2 по байесовскому правилу на основе ставок текущего хода. Доказано, что оптимальная стратегия инсайдера порождает простое случайное блуждание (симметричное случайное блуждание, где из данной точки за шаг можно попасть только в ближайшую соседнюю точку решетки) по решетке апостериорных вероятностей k/m, $k = 0, \ldots, m$, с поглощением в 0 и 1. Другими словами, инсайдер на каждом шаге устанавливает такие цены сделки, что последовательность условных математических ожиданий ликвидной цены акции представляет собой простое случайное блуждание по множеству разумных ставок $\{0, 1, \ldots, m\}$ с поглощением в крайних точках 0 и m.

В дальнейших исследованиях модель была усложнена. Торги со счетным множеством возможных ликвидных цен акции рассматривались в [1]. Также были разработаны модели с двумя различными рисковыми активами [13]. В этих работах получены решения бесконечно повторяющихся игр с неполной информацией, соответствующих торгам неограниченной продолжительности.

Если число шагов конечно, то анализ игр становится гораздо более сложным, что вызвано комбинаторными и иными математическими трудностями. Аналитическое решение получено лишь для двух простейших случаев: для одношаговых игр с нулевым спрэдом [3] и игр с минимальным нетривиальным числом ставок, равным трем [2].

В общем случае (произвольное m и большое конечное число шагов n) в [5] получены оценки ожидаемого выигрыша инсайдера в конечношаговой игре. Найден гарантированный выигрыш инсайдера при использовании им стратегии, оптимальной при бесконечношаговом взаимодействии. Показано, что при бесконечном увеличении числа повторений значение конечной игры стремится к значению бесконечношаговой игры как минимум с экспоненциальной скоростью.

Все указанные выше работы посвящены исследованию моделей с нулевым спрэдом. Одношаговая модель с ненулевым фиксированным спрэдом была исследована в [4].

Теоретико-игровая динамическая модель взаимодействия маркет-мейкеров в условиях асимметричной информации с ненулевым спрэдом рассматривалась в [8]. Авторы характеризуют репутационное равновесие в многошаговой игре с ненулевой суммой и возникающий эффект ценового лидерства инсайдера. В рамках модели [8] величина спрэда не ограничена, что является серьезным модельным предположением, не соответствующим правилам ведения торгов на ряде фондовых бирж. Поэтому рассмотренная в данной работе постановка с ограниченным фиксированным спрэдом в этом отношении представляется более реалистичной.

Настоящая работа посвящена исследованию динамической модели с ненулевым спрэдом с неограниченным и конечным числом повторений.

2. Модель торгов с ненулевым спрэдом

2.1. МЕХАНИЗМ ТОРГОВ

Рассмотрим упрощенную модель биржевых торгов однотипными рисковыми активами (акциями) между двумя игроками, которые на каждом шаге торгов делают две ставки – назначают цену продажи и цену покупки одной акции. Все ставки и цены целочислены. Случайная цена акции, определяемая случайным ходом перед началом торгов на весь период, может принимать два значения: высокое значение, равное $m \in \mathbb{Z}_+$, с вероятностью p (состояние $\theta = H$) и низкое, равное нулю, с вероятностью $1-p$ (состояние $\theta = L$). Вероятность p известна обоим игрокам. Игрок 1 (инсайдер) знает исход случайного хода, Игрок 2 не имеет этой информации. То, что Игрок 1 – инсайдер, является общим знанием.

На каждом шаге торгов $t = 1, \ldots, n$ каждый игрок предлагает свою цену покупки и цену продажи одной акции. Разница s между ценами покупки и продажи (бид-аск спрэд) фиксирована правилами торгов (одинакова для обоих игроков). Обозначим i_t цену покупки одной акции Игроком 1 и j_t цену покупки одной акции Игроком 2 на шаге t. Ввиду фиксированности спрэда s, цены продажи на шаге t будут $i_t + s$ и $j_t + s$ для Игроков 1 и 2 соответственно. Множества разумных цен покупки Игроков 1 и 2 обозначим, соответственно, через I и J, причем $I = J = \{-s, -s+1, \ldots, m-1, m\}$.

Трансакция происходит, если цена покупки акции, названная одним из игроков, превосходит или равна цене продажи, названной его оппонентом на данном шаге, т.е. либо $i_t + s \leqslant j_t$, либо $j_t + s \leqslant i_t$. Если соотношение предложенных цен позволяет провести сделку, то игрок, предложивший максимальную цену покупки, покупает по этой цене одну акцию у другого игрока.

После каждого шага торгов оглашаются ставки этого шага, но ликвидная цена по прежнему является приватным знанием инсайдера. Игрок 2 узнает ликвидную цену только после окончания торгов и, следовательно, лишь тогда может посчитать свою прибыль или убытки в денежном эквиваленте. Задачей обоих игроков является максимизация цены итогового портфеля. Перед началом торгов оба игрока имеют достаточное количество денег и акций.

Отметим, что модели без введения спрэда, исследованные в [11], являются частным случаем описанной выше модели и соответствуют единичному спрэду.

Возникает вопрос, какие из результатов, полученных в [11], переносятся на случай модели с произвольным ненулевым спрэдом, а именно:

1) насколько корректно рассмотрение модели торгов неограниченной продолжительности, т.е. вопрос об ограниченности сверху значения бесконечношаговой игры;

2) порождает ли оптимальная стратегия инсайдера в модели с ненулевым спрэдом простое случайное блуждание цен совершаемых сделок.

В статье мы даем ответ на эти вопросы.

2.2. ОПИСАНИЕ ИГРЫ

Стратегия Игрока 1 представляет собой последовательность $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_t, \ldots, \sigma_n)$, где σ_t – ход инсайдера на шаге t – задает вероятностное распределение $\Delta(I)$ на множестве допустимых цен, в соответствии с которым Игрок 1 рандомизирует свои ставки $i_t \in I$, т.е. σ_t отображает пару, состоящую из предыстории ставок $(i_r, j_r)_{r=1}^{t-1}$ и состояния $\theta \in \Theta = \{L, H\}$, в $\Delta(I)$. Аналогично определяется стратегия неинформированного игрока $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_t, \ldots, \tau_n)$, но ход τ_t зависит только от предыстории.

Одношаговые выигрыши $a^{\theta,m,s}(i_t, j_t)$ Игрока 1 в состояниях L и H определены матрицами

$$a^{L,m,s}(i,j) = \begin{cases} -i, & \text{если } i \geqslant j+s, \\ 0, & \text{если } |i-j| < s, \\ j, & \text{если } j \geqslant i+s, \end{cases}$$

$$a^{H,m,s}(i,j) = \begin{cases} m-i, & \text{если } i \geqslant j+s, \\ 0, & \text{если } |i-j| < s, \\ -m+j, & \text{если } j \geqslant i+s. \end{cases}$$

Функция выигрыша $K_n^{m,s}(p,\sigma,\tau)$ Игрока 1 в n-шаговой игре имеет вид

$$K_n^{m,s}(p,\sigma,\tau) = \mathbf{E}_{p,\sigma,\tau}\left[\sum_{t=1}^{n} a^{\theta,m,s}(i_t, j_t)\right],$$

где $\mathbf{E}_{p,\sigma,\tau}$ – математическое ожидание по распределению, которое порождает тройка (p,σ,τ) на $\Theta \times (I \times J)^n$.

Отметим, что приведенные матрицы одношаговых выигрышей инсайдера имеют более сложную структуру, чем матрицы одношаговых выигрышей для модели без спрэда. Наличие в матрицах полосы нулей шириной $2s-1$ вдоль главной диагонали значительно усложняет исследование игры $G_n^{m,s}(p)$.

Значение $V_n^{m,s}(p)$ игры (выделяем явно зависимость от параметра p), т.е. ожидаемый итоговый выигрыш инсайдера, дается формулой

$$V_n^{m,s}(p) = \inf_{\tau} K_n^{m,s}(p,\sigma^*,\tau) = \sup_{\sigma} K_n^{m,s}(p,\sigma,\tau^*),$$

где (σ^*,τ^*) – пара оптимальных стратегий игроков.

Для упрощения расчетов далее везде полагаем, что m кратно s.

3. Верхняя оценка выигрыша инсайдера

Рассмотрим семейство стратегий неинформированного игрока, параметризованных первым ходом и являющихся естественным обобщением стратегии, оптимальной в модели без спрэда.

Определение 1. *Первый ход Игрока 2 в стратегии* $\tau_1^{w,m,s}$ – *ставка* w. *Последующие ходы Игрока 2 на каждом шаге* t *определяются действиями обоих игроков на* $(t-1)$*-м шаге:*

$$\tau_t^{w,m,s}(i_{t-1}, j_{t-1}) = \begin{cases} j_{t-1} - s, & \textit{при } i_{t-1} \leqslant j_{t-1} - s; \\ j_{t-1}, & \textit{при } |i_{t-1} - j_{t-1}| < s \\ j_{t-1} + s, & \textit{при } i_{t-1} \geqslant j_{t-1} + s. \end{cases}$$

Стратегия $\tau^{w,m,s}$ определена для любого числа шагов n. Отметим, что действия Игрока 2 на каждом шаге детерминировано зависят от предыстории, которая может быть случайной, если Игрок 1 рандомизирует свои действия.

Утверждение 1. *Стратегия* $\tau^{w,m,s}$ *в* n*-шаговой игре гарантирует векторный выигрыш (выигрыш в обоих возможных состояниях)* $h_n(\tau^{w,m,s})$ *с компонентами*

$$h_n^L(\tau^{w,m,s}) = \sum_{l=0}^{n-1} (w - ls)^+,$$

$$h_n^H(\tau^{w,m,s}) = \sum_{l=0}^{n-1} (m - w - s - ls)^+,$$

где $(a)^+$ *означает* $\max\{0, a\}$.

Доказательство. Утверждение доказывается по индукции по числу шагов.

Пусть $n = 1$. Для $w = 0, 1, \ldots, m - s$

$$h_1^L(\tau^{w,m,s}) = \max_l a^{L,m,s}(l, w) = w,$$

$$h_1^H(\tau^{w,m,s}) = \max_l a^{H,m,s}(l, w) = m - w - s.$$

Предположим, что формулы верны для n-шаговой игры. Покажем, что они выполняются также и для числа шагов $n + 1$. Пусть векторный выигрыш $h_n(\tau^{w,m,s})$ на n-м шаге определен согласно формулам из утверждения. Докажем, что они справедливы и для $h_{n+1}(\tau^{w,m,s})$.

В состоянии L для стратегии $\tau^{0,m,s}$ наилучший ответ инсайдера – ставка $-s$, что дает $h_n^L(\tau^{w,m,s}) = 0$ для всех n.

Аналогично, в состоянии H для стратегий $\tau^{w,m,s}$ с $w > m-s$ наилучший ответ инсайдела – ставка $m-s$, и $h_n^H(\tau^{w,m,s}) = 0$ для всех n.

Рассмотрим стратегию $\tau^{w,m,s}$, $w = 1, \ldots, m-s$. Первый ход в наилучшем ответе инсайдера на эту стратегию в состоянии L – это ставка $l \leqslant w - s$. Согласно рекурсивному представлению функции платежей (см. [6]) получаем

$$h_{n+1}^L(\tau^{w,m,s}) = \max_l (a^{L,m,s}(l,w) + h_n^L(\tau^{l,m,s})) =$$
$$= w + \sum_{l=0}^{n-1}(w - s - ls)^+ = \sum_{l=0}^{n}(w - ls)^+.$$

Первый ход в наилучшем ответе инсайдера на эту стратегию в состоянии H – это ставка $l = w + s$.

$$h_{n+1}^H(\tau^{w,m,s}) = \max_l (a^{H,m,s}(l,w) + h_n^H(\tau^{l,m,s})) = m - (w+s) +$$
$$+ \sum_{l=0}^{n-1}(m - (w+s) - s - ls)^+ = \sum_{l=0}^{n}(m - w - s - ls)^+.$$

Это доказывает предположение индукции.

При больших n векторные выигрыши стабилизируются

$$h_n(\tau^{w,m,s}) = h_{n+1}(\tau^{w,m,s}) = h(\tau^{w,m,s}), \text{ при } n \geqslant m - s.$$

Из определения значения игры следует, что выполняется неравенство

$$V_n^{m,s}(p) \leqslant \min_w \left\{ h^L(\tau^{w,m,s})(1-p) + h^H(\tau^{w,m,s})p) \right\}.$$

При $p \in \left(\frac{sk}{m}, \frac{s(k+1)}{m}\right)$, $k = 0, 1, \ldots, \frac{m}{s} - 1$, минимум в правой части неравенства достигается на стратегии с $w = sk$.

При $p_k = sk/m$, $k = 1, \ldots, m/s - 1$, минимум достигается одновременно на s стратегиях с $w = sk-s+1, sk-s+2, \ldots, sk$.

Вычисляя этот минимум, получаем верхнюю оценку для значения игры $G_n^{m,s}(p)$.

Теорема 1. *Функции $V_n^{m,s}(p)$ для любого n ограничены сверху функцией $H^{m,s}(p)$ – непрерывной, выпуклой вверх, кусочно-линейной функцией с m/s областями линейности $[sk/m, s(k+1)/m]$, $k = 0, 1, \ldots, m/s-1$. Эта функция однозначно определена своими значениями в точках излома $p_k = sk/m$, $k = 0, 1, \ldots, m/s$:*

$$H^{m,s}(p_k) = \frac{m^2}{2s} p_k(1-p_k). \tag{1}$$

Таким образом, у Игрока 2 есть стратегия $\tau^{w,m,s}$, не зависящая от числа шагов n, которая в n-шаговой игре гарантирует ему проигрыш не больше величины $H^{m,s}$, тоже не зависящей от n. Это позволяет говорить, что Игрок 2 гарантирует $H^{m,s}$ в игре $G_\infty^{m,s}(p)$ заранее не ограниченной (бесконечной) продолжительности.

Напомним определения основных понятий бесконечношаговых игр (см., например, [15]).

Стратегиями в бесконечношаговой игре называются бесконечные последовательности ходов $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_t, \ldots)$ для Игрока 1 и $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_t, \ldots)$ для Игрока 2.

Будем говорить, что стратегия σ в игре $G_\infty^{m,s}(p)$ гарантирует Игроку 1 выигрыш $\underline{v}$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$, такое что $\forall n > N$ выполнено $\inf_\tau K_n^{m,s}(p, \sigma, \tau) > \underline{v} - \varepsilon$.

Аналогично дается определение того, что стратегия τ Игрока 2 гарантирует проигрыш $\overline{v}$.

Говорят, что игра $G_\infty^{m,s}(p)$ имеет равномерное значение $V_\infty^{m,s}(p)$, если $\sup_\sigma \underline{v} = \inf_\tau \overline{v} = V_\infty^{m,s}$.

Если значение $V_\infty^{m,s}$ не существует, то $\sup_\sigma \underline{v}$ и $\inf_\tau \overline{v}$ называются нижним $\underline{V}_\infty^{m,s}$ и верхним $\overline{V}_\infty^{m,s}$ равномерными значениями, соответственно.

Из Теоремы 1 следует оценка сверху на $\overline{V}_\infty^{m,s}$.

Замечание 1. Если нормировать игру так, чтобы высокая цена акции равнялась 1, а ставки были кратны $1/m$, и устремить s и m к ∞ при $s/m = \alpha < 1$, то текущая модель превращается в непрерывную с ненулевым спрэдом α и «произвольными» ставками. При этом имеет место верхняя оценка значения игры кусочно-линейной функцией $H^\alpha(p)$ с точками излома $p_k = \alpha k$, $k = 0, 1, \ldots, 1/\alpha$:

$$H^\alpha(p_k) = \frac{1}{2\alpha} p_k (1 - p_k).$$

Отсюда делаем вывод, что наличие ненулевого спрэда принципиально влияет на результат модели Де Мейера и Салей [9], в которой в случае нулевого спрэда наблюдался неограниченный рост значения игры при бесконечном увеличении числа шагов. Неинформированный игрок изменяет свои ставки с шагом α, поэтому данную модель можно асимптотически рассматривать как дискретную с шагом дискретизации α.

Из формулы (1) следует, что максимальный выигрыш инсайдера уменьшается по крайней мере в s раз по сравнению с моделью без спрэда.

4. О стратегии инсайдера и случайных колебаниях

Предположим, что информированный игрок использует стратегию σ. Рассмотрим вопрос о том, какой выигрыш гарантирует ему эта стратегия. При этом можно считать, что для Игрока 1 реализуется наихудшая ситуация: Игрок 2 использует свой наилучший ответ на σ, или другими словами, Игрок 2 знает σ. Тогда, наблюдая за действиями Игрока 1 на шагах $1, \ldots, t-1$, Игрок 2 на шаге t может вычислить апостериорную (условную) вероятность события $\{\theta = H\}$, т.е. высокой цены акции, при условии реализовавшейся предыстории $(i_r, j_r)_{r=1}^{t-1}$. Обозначим апостериорную вероятность высокой цены на шаге t через $p(t)$. Заметим, что $p(t)$ зависит от σ и является в общем случае случайным процессом, поскольку зависит от предыстории, которая в свою очередь тоже является случайной.

По аналогии с моделью без спрэда [11], естественной может представляться гипотеза о том, что оптимальная стратегия инсайдера в модели с ненулевым спрэдом порождает простое случайное блуждание апостериорных вероятностей (см. Введение). Ниже мы покажем, что это не так.

Рассмотрим такие стратегии инсайдера, для которых $p(t)$, $t = 1, \ldots$, является простым случайным блужданием по решетке $\left\{\frac{sk}{m} \mid k = 0, \ldots, m/s\right\}$, обозначим множество таких стратегий Σ^{SRW}. Отметим, что эта решетка является непосредственным аналогом решетки $\{\frac{k}{m}\}$ для модели без спрэда, поскольку прыжку ставок на s в модели с ненулевым спрэдом соответствует прыжок на 1 в модели без спрэда.

Мы ставим задачу найти наилучшую стратегию инсайдера $\sigma^{k,m,s}$ в этом классе, то есть такую, что $\forall \sigma \in \Sigma^{SRW}$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \inf_{\tau} K_n^{m,s}(p, \sigma^{k,m,s}, \tau) \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \inf_{\tau} K_n^{m,s}(p, \sigma, \tau).$$

Определим стратегию инсайдера $\sigma^{m,s}$, порождающую простое случайное блуждание апостериорных вероятностей по решетке $p_k = sk/m$, $k = 0, 1, \ldots, m/s$, и гарантирующую инсайдеру положительный выигрыш на каждом шаге блуждания до поглощения в 0 и 1.

Рассмотрим сумму

$$g(d) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \ldots + \frac{1}{s-d}.$$

Введем обозначения:

$$d^* = \max\{d \mid g(d) \leqslant 1\}, \quad \varepsilon^* = 1 - g(d^*).$$

Определение 2. *Если на шаге t, $t = 1, 2, \ldots$, апостериорная вероятность состояния H равна $p_k = sk/m$, $k = 1, \ldots, m/s - 1$, то ход инсайдера $\sigma_t^{m,s}$ равен $\mu^{k,m,s}$, где $\mu^{k,m,s}$ – это ход инсайдера в одношаговой игре с априорной вероятностью высокой цены p_k, состоящий в смешивании ставок $sk - 2s, sk, sk + 1, \ldots, sk + d^*, sk + d^* + 1$ в соответствии с условными вероятностями*

$$\mu^{k,m,s}(sk - 2s|H) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{k}\right),$$

$$\mu^{k,m,s}(sk - 2s|L) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{s}{m - sk}\right),$$

$$\mu^{k,m,s}(sk+d|H) = \frac{1}{2(s-d)}\left(1+\frac{1}{k}\right),$$
$$\mu^{k,m,s}(sk+d|L) = \frac{1}{2(s-d)}\left(1-\frac{s}{m-sk}\right), \quad d=0,1,\ldots,d^*,$$
$$\mu^{k,m,s}(sk+d^*+1|H) = \frac{1}{2}\varepsilon^*\left(1+\frac{1}{k}\right),$$
$$\mu^{k,m,s}(sk+d^*+1|L) = \frac{1}{2}\varepsilon^*\left(1-\frac{s}{m-sk}\right),$$

где $\mu^{k,m,s}(i|\theta)$ обозначает вероятность использовать ставку i в состоянии θ.

Если на шаге t апостериорная вероятность состояния H равна $p=0$ (при $k=0$), то ход инсайдера – ставить 0, а если $p=1$ ($k=m/s$), то ставить любую из ставок $m-s+1,\ldots,m$.

Ход инсайдера в каждом из состояний рандомизирует одно и то же множество ставок, но с различными весами, зависящими от состояния (ликвидной цены акции) и текущей апостериорной вероятности.

Обозначим через $\mu^{k,m,s}(i)$ полную (безусловную) вероятность выбора инсайдером действия i при использовании хода $\mu^{k,m,s}$, т.е.

$$\mu^{k,m,s}(i) = \sum_{\theta}\mu^{k,m,s}(i|\theta)P(\theta).$$

С учетом Определения 2 получаем

$$\mu^{k,m,s}(sk-2s) = \frac{1}{2},$$
$$\mu^{k,m,s}(sk+d) = \frac{1}{2(s-d)}, \quad d=0,1,\ldots,d^*,$$
$$\mu^{k,m,s}(sk+d^*+1) = \frac{1}{2}\varepsilon^*.$$

Если на шаге t апостериорная вероятность $p(t)=p_k$, то при использовании инсайдером ставки $i_t=i$ для апостериорной вероятности на шаге $t+1$ по формуле Байеса получаем

$$p\left(t+1|i_t=i\right) = p_k\frac{\mu^{k,m,s}(i|H)}{\mu^{k,m,s}(i)}.$$

Таким образом,

$$p\,(t+1|i_t = sk-2s) = p_k - s/m = s(k-1)/m = p_{k-1},$$

$$p\,(t+1|i_t \neq sk-2s) = p_k + s/m = s(k+1)/m = p_{k+1}.$$

Отсюда непосредственно следует, что построенная стратегия инсайдера $\sigma^{m,s}$ входит в класс стратегий Σ^{SRW}.

Теорема 2. *Стратегия $\sigma^{m,s}$ порождает простое случайное блуждание апостериорных вероятностей по решетке $\left\{\frac{sk}{m} \mid k = 0,\ldots,m/s\right\}$ с поглощением в крайних точках 0 и 1 и на каждом шаге до поглощения гарантирует инсайдеру выигрыш*

$$V_1(s) = \frac{1}{2}\left(d^* + 1 + \varepsilon^*(s - d^* - 1)\right). \tag{2}$$

Доказательство. Пусть апостериорная вероятность состояния H на шаге t равна $p_k = sk/m$. Стратегия $\sigma^{m,s}$ на данном шаге гарантирует инсайдеру одношаговый выигрыш, равный

$$\min_j K_1^{m,s}(p_k, \mu^{k,m,s}, j) = \min_j \left(p_k \sum_i \mu^{k,m,s}(i|H)a^{H,m,s}(i,j) + \right.$$
$$\left. + \,(1-p_k)\sum_i \mu^{k,m,s}(i|L)a^{L,m,s}(i,j)\right).$$

Достаточно для всех ставок j неинформированного игрока проверить, что $K_1^{m,s}(p_k, \mu^{k,m,s}, j) \geqslant V_1(s)$.

Если неинформированный игрок назначает цены покупки $j \leqslant sk - 3s$, то ставка инсайдера $sk - 2s$ привносит в его одношаговый выигрыш величину $s/2$, каждая из ставок $sk, sk+1, \ldots, sk+d^*$ дает по 1/2, и ставка $sk + d^* + 1$ дает $(s - d^* - 1)\varepsilon^*/2$. В этом случае инсайдер получит

$$K_1^{m,s}(p_k, \mu^{k,m,s}, j) = s/2 + \frac{1}{2}(d^*+1) + (s - d^* - 1)\varepsilon^*/2.$$

Если неинформированный игрок ставит $j = sk - 3s + 1, \ldots, sk - s$, то ставка $sk - 2s$ дает нулевой вклад в выигрыш инсайдера, а все остальные ставки дают такой же вклад, что и ранее. Тогда

$$K_1^{m,s}(p_k, \mu^{k,m,s}, j) = \frac{1}{2}(d^*+1) + (s - d^* - 1)\varepsilon^*/2 = V_1(s).$$

Если неинформированный игрок ставит $j = sk - s + h$, где $h = 1, 2, \dots, d^* + 1$, то ставка инсайдера $sk - 2s$ привносит в его одношаговый выигрыш величину $h/2$, ставки $sk, sk + 1, \dots, sk + h - 1$ дают нулевой вклад, каждая из ставок $sk + h, \dots, sk + d^*$ дает по 1/2, и ставка $sk + d^* + 1$ дает $(s - d^* - 1)\varepsilon^*/2$. Тогда

$$K_1^{m,s}(p_k, \mu^{k,m,s}, j) = h/2 + \frac{1}{2}(d^* + 1 - h) + (s - d^* - 1)\varepsilon^*/2 = V_1(s).$$

Если неинформированный игрок ставит $j = sk - s + d^* + 2$, то ставка $sk - 2s$ привносит в одношаговый выигрыш инсайдера величину $(d^* + 2)/2$, остальные ставки дают нулевой вклад.

$$K_1^{m,s}(p_k, \mu^{k,m,s}, j) = (d^* + 2)/2 > V_1(s).$$

Легко показать, что бóльшие ставки также дадут инсайдеру выигрыш бóльший, чем $V_1(s)$.

Значит, гарантированный одношаговый выигрыш инсайдера составляет $V_1(s)$.

В случае если априорная вероятность не лежит на данной решетке, $p \in (sk/m, s(k+1)/m)$, то первый ход инсайдера состоит в использовании выпуклой линейной комбинации ходов, описанных для крайних точек интервала, причем ход $\mu^{k,m,s}$ входит в эту комбинацию с коэффициентом $k + 1 - p\frac{m}{s}$, а ход $\mu^{k+1,m,s}$ с коэффициентом $p\frac{m}{s} - k$.

Так как продолжительность случайного блуждания по решетке sk/m до поглощения в 0 и 1 из точки p_k равна $\frac{m^2}{s^2}p_k(1 - p_k)$, то справедлива теорема, дающая нижнюю оценку значения игры.

Теорема 3. *Функции $V_n^{m,s}$ при $n \to \infty$ ограничены снизу функцией $L^{m,s}$ – непрерывной, выпуклой вверх, кусочно-линейной функцией со значениями в точках излома $p_k = sk/m$, $k = 0, 1, \dots, m/s$:*

$$L^{m,s}(p_k) = V_1(s)\frac{m^2}{s^2}p_k(1 - p_k). \tag{3}$$

Утверждение 2. *Описанная стратегия $\sigma^{m,s}$ является лучшей в классе Σ^{SRW}.*

Доказательство. Доказательство проводится в два этапа. На первом этапе строится ход ν неинформированного игрока, представляющий собой одношаговый наилучший ответ Игрока 2 на ход $\mu^{k,m,s}$, заданный в Определении 2 и используемый инсайдером при апостериорной вероятности $p_k = sk/m$. На втором этапе строится наилучший одношаговый ответ инсайдера на ход ν Игрока 2 и демонстрируется, что он дает тот же выигрыш за шаг, что и исходный ход $\mu^{k,m,s}$.

Шаг 1. Пусть инсайдер использует стратегию $\sigma^{m,s}$ (см. Определение 2) из Σ^{SRW}, такую что если инсайдер делает ставку $x_\downarrow = sk - 2s$, то апостериорная вероятность p сдвигается по решетке влево ($p_k - s/m$), а если инсайдер делает любую из ставок $x_\uparrow = sk, sk+1, \ldots, sk + d^* + 1$, то апостериорная вероятность p сдвигается вправо ($p_k + s/m$). Пусть Игрок 2 использует ход $\nu \in \Delta(J)$ в ответ на ход $\mu^{k,m,s}$.

Это гарантирует неинформированному игроку одношаговый проигрыш не больше, чем

$$K_1^{m,s}(p_k, \mu^{k,m,s}, \nu) = \max_{x_\downarrow, x_\uparrow} \left(\frac{1}{2} \left[\sum_{y=0}^{x_\downarrow - s} \nu(y)(sk - s - x_\downarrow) + \right.\right.$$

$$\left. + \sum_{y=x_\downarrow+s}^{\infty} \nu(y)(y - sk + s) \right] + \frac{1}{2} \left[\sum_{y=0}^{x_\uparrow - s} \nu(y)(sk + s - x_\uparrow) + \right.$$

$$\left.\left. + \sum_{y=x_\uparrow+s}^{\infty} \nu(y)(y - sk - s) \right] \right).$$

Предположим, что носитель хода ν представляет собой множество $\{sk - s, sk - s + 1, \ldots, sk - s + d^* + 1\}$.

Поскольку ход ν строится как наилучший одношаговый ответ на ход $\mu^{k,m,s}$, то сумма $\sum_{y=sk-s}^{x_\uparrow - s} \nu(y)(sk + s - x_\uparrow)$ не зависит от $x_\uparrow$, выбираемого из множества $\{sk, sk+1, \ldots, sk + d^* + 1\}$.

Пусть $x_\uparrow = sk + d,\ d = 0, 1, \ldots, d^* + 1$. Тогда

$$\sum_{y=sk-s}^{sk-s+d} \nu(y) = \frac{c}{s-d}, \quad \text{для некоторого } c > 0.$$

Учитывая, что $\sum_{y=sk-s}^{sk-s+d^*+1} \nu(y) = 1$, получим $c = s - d^* - 1$. Следовательно, мы полностью определили ход ν:

$$\nu(sk-s) = (s-d^*-1)/s,$$
$$\nu(sk-s+d) = \frac{s-d^*-1}{(s-d)(s-d+1)}, \text{ для } d = 1, \ldots, d^*+1.$$

Шаг 2. Вычислим, что гарантирует построенный ход ν Игроку 2 при наилучшем поведении инсайдера из класса стратегий Σ^{SRW}.

$$K(\nu) = \max_{x_\downarrow, x_\uparrow} \left(\frac{1}{2} \left[\sum_{y=sk-s}^{x_\downarrow - s} \nu(y)(sk - s - x_\downarrow) + \right.\right.$$
$$\left. + \sum_{y=x_\downarrow+s}^{sk-s+d^*+1} \nu(y)(y - sk + s) \right] + \frac{1}{2} \left[\sum_{y=sk-s}^{x_\uparrow - s} \nu(y)(sk + \right.$$
$$\left.\left. + s - x_\uparrow) + \sum_{y=x_\uparrow+s}^{sk-s+d^*+1} \nu(y)(y - sk - s) \right] \right).$$

Выражение в первых квадратных скобках максимизируется при $x_\downarrow \leqslant sk - 2s$, при этом значение выражения равно $\varepsilon^*(s - d^* - 1) + d^* + 1 - (s - d^* - 1)$.

Выражение во вторых квадратных скобках максимизируется при любом $x_\uparrow$ из множества $\{sk, sk+1, \ldots, sk + d^* + 1\}$, этот максимум равен $s - d^* - 1$.

Тогда $K(\nu) = \frac{1}{2}(\varepsilon^*(s - d^* - 1) + d^* + 1) = V_1(s)$.

Отметим, что описанная в разделе 3 стратегия неинформированного игрока является естественным ответом на стратегию $\sigma^{m,s}$ инсайдера (и в случае $s = 1$ они составляют пару оптимальных стратегий), порождающую простое случайное блуждание апостериорных вероятностей.

Однако, несмотря на то что построенная стратегия, согласно утверждению 2, является лучшей из порождающих простое случайное блуждание, ответ на вопрос об оптимальности этой стратегии при произвольном s отрицательный.

Утверждение 3. *Стратегию $\sigma^{m,s}$ в случае минимального нетривиального спрэда $s = 2$ можно улучшить, что обеспечит инсайдеру больший выигрыш.*

Доказательство. При $s = 2$ и $m = 2m'$ строится стратегия инсайдера, которая обеспечит ему нижнюю границу выигрыша $\bar{L}^{m,2}$, превосходящую $L^{m,2}$.

Для точек $p_k = 2k/m$ эта стратегия совпадает с описанной в Определении 2.

Для точек $q_k = (2k-1)/m$, если $q_k \neq 1/m$ и $q_k \neq 1 - 1/m$, Игрок 1 так же, как и в ходе μ из Определения 2, генерирует скачок апостериорных вероятностей на $2/m$ влево и вправо с равными вероятностями.

Если $q_k = 1/m$, то Игрок 1 генерирует скачок апостериорных вероятностей в точку 0 с вероятностью $2/3$ с помощью ставки -1, и скачок в точку $3/m$ с вероятностью $1/3$ с помощью ставки 2.

Если $q_k = 1 - 1/m$, то Игрок 1 генерирует скачок апостериорных вероятностей в точку 1 с вероятностью $2/3$ с помощью ставки $m-1$, и скачок в точку $1 - 3/m$ с вероятностью $1/3$ с помощью ставки $m - 4$.

Таким образом, при начальной вероятности q_k на последнем шаге симметрия блуждания нарушается. Такая стратегия обеспечивает одношаговый выигрыш инсайдеру, равный $3/4$ во всех точках, кроме точек q_1 и $q_{m'}$. В этих последних точках одношаговый выигрыш равен $1/3$.

Эта стратегия в точках p_k гарантирует инсайдеру ожидаемый выигрыш в n-шаговой игре равный $L^{m,2}(p_k)$, а в точках q_k выигрыш $\bar{L}^{m,2}(q_k)$, где

$$\bar{L}^{m,2}(q_k) = 3/4k(m' - k + 1) - (3m' + 2)/8 > L^{m,2}(q_k).$$

Положив для наглядности $m = 6$, имеем $q_1 = 1/6$, $q_2 = 1/2$,

$q_3 = 5/6$ и

$$\bar{L}^{6,2}(q_1) = \bar{L}^{6,2}(q_3) = 7/8 > L^{m,2}(q_k) = 3/4,$$

$$\bar{L}^{6,2}(q_2) = 13/8 > L^{m,2}(q_2) = 3/2.$$

Из того факта, что наилучшая стратегия инсайдера, генерирующая простое случайное блуждание апостериорных вероятностей, не является оптимальной в игре $G_n^{m,2}(p)$ для всех $p \in [0,1]$, $n \to \infty$, следует, что гипотеза о том, что оптимальная стратегия инсайдера порождает простое случайное блуждание, неверна.

Нельзя расценивать это утверждение как опровержение более общей эндогенной гипотезы, поскольку блуждание, соответствующее оптимальному поведению инсайдера, может иметь более сложную структуру. Однако так как во всех упрощенных моделях наблюдалось именно простое случайное блуждание апостериорных вероятностей высокой ликвидной цены акции, данный результат имеет большое значение для понимания того факта, что механизм ценообразования на реальных финансовых рынках может носить гораздо более сложный характер и иметь особенности, которые нельзя обнаружить при исследовании упрощенных моделей.

Поэтому мы выдвигаем гипотезу о том, что блуждание цен сделок имеет более сложную структуру: на каждом этапе стратегия инсайдера порождает больше двух апостериорных вероятностей. Подробная характеристика этой структуры представляет открытую задачу для будущих исследований.

5. Соотношение верхней и нижней границ

Из формул (1) и (3) следует, что верхняя и нижняя оценки имеют одинаковую форму, в частности, они имеют одни и те же точки излома. Естественно определить, каково соотношение полученных границ или, другими словами, в каком коридоре лежит значение игры $G_\infty^{m,s}(p)$, если оно существует.

I. Случай $s = 1$ эквивалентен модели без спрэда, решенной в [11]. Согласно формулам (1), (2), (3), вычисляем:

$$V_1(1) = 1/2, \quad H^{m,1} = L^{m,1} = \frac{m^2}{2} p_k(1 - p_k) = V_\infty^{m,1}$$

в точках $p_k = k/m$.

Эти формулы совпадают с результатами, полученными в работе [11]. Таким образом, результаты модели без введения спрэда являются частным случаем результатов, полученных в данной работе.

II. В случае минимального нетривиального спрэда $s = 2$ гарантированный выигрыш инсайдера на каждом шаге торгов до поглощения составляет $V_1(2) = 3/4$. Верхняя и нижняя оценки представляют собой кусочно-линейные функции со значениями в точках излома $p_k = 2k/m$

$$H^{m,2}(p_k) = \frac{m^2}{4} p_k(1 - p_k),$$

$$L^{m,2}(p_k) = \frac{3m^2}{16} p_k(1 - p_k) = \frac{3}{4} H^{m,2}(p_k).$$

III. При $s \to \infty$ (автоматически $m \to \infty$) нижняя оценка из формулы (3) принимает вид

$$L^{m,s}(p_k) = \left(1 - \frac{1}{e}\right)(1 + o(1)) \frac{m^2}{2s} p_k(1 - p_k).$$

Можно записать приближенное соотношение границ в виде:

$$L^{m,s}(p_k) \approx 0,63 \cdot H^{m,s}(p_k).$$

6. Раскрытие информации на шаге n

Для модели без спрэда ситуация внезапного раскрытия инсайдерской информации была исследована в [5]. В [5] найден выигрыш инсайдера в игре с конечным числом повторений при использовании стратегии, оптимальной в бесконечношаговой игре. Разница $\varepsilon_n^m(k)$ между значением $V_\infty^m(k/m)$ игры $G_\infty^m(k/m)$ и выигрышем инсайдера за конечное число шагов n, гарантированным бесконечношаговой оптимальной стратегией, интерпретируется как цена внезапного раскрытия инсайдерской информации в бесконечношаговой игре.

Теорема 4 (см. Теорему 1 в [5]). *Цена внезапного раскрытия инсайдерской информации экспоненциально убывает с ростом n и вычисляется по формуле*

$$\varepsilon_n^m(k) = \sum_{l=1}^{[m/2]} \left(\cos \frac{\pi(2l-1)}{m} \right)^n A_l^m(k), \tag{4}$$

где $[\alpha]$ – целая часть числа α, и коэффициенты $A_l^m(k)$ равны

$$A_l^m(k) = \frac{1}{2m} \sin \frac{\pi k(2l-1)}{m} \mathrm{ctg} \frac{\pi(2l-1)}{2m} \left(1 + \mathrm{ctg}^2 \frac{\pi(2l-1)}{2m} \right).$$

Результаты работы [5] обусловлены тем, что оптимальная стратегия инсайдера в модели без спрэда порождает простое случайное блуждание апостериорных вероятностей. Поэтому их оказывается нетрудно перенести и на модель с произвольным спрэдом.

Для модели биржевых торгов неограниченной продолжительности с ненулевым спрэдом в разделе 4 найдена нижняя граница $L^{m,s}$, которую инсайдер гарантирует при использовании стратегии $\sigma^{m,s}$. Эта стратегия, согласно Теореме 2, порождает простое случайное блуждание по решетке $\left\{ \frac{sk}{m} | \, k = 0, \ldots, m/s \right\}$, которая содержит в s раз меньше точек, чем решетка $\left\{ \frac{k}{m} | \, k = 0, \ldots, m \right\}$.

Ценой внезапного раскрытия инсайдерской информации в этом случае называем величину

$$\varepsilon_n^{m,s}(k) = L^{m,s}(sk/m) - \inf_\tau K_n^{m,s}(sk/m, \sigma^{m,s}, \tau).$$

Другими словами, эта та сумма, которую инсайдер не успевает получить относительно своих гарантированных ожиданий $L^{m,s}$ вследствие того, что его приватная информация раскрылась раньше, чем он ожидал.

Теорема 5. *Цена внезапного раскрытия инсайдерской информации в бесконечношаговой игре* $G_{\infty}^{m,s}(sk/m)$ *после шага* n *вычисляется по формуле*

$$\varepsilon_n^{m,s}(k) = 2V_1(s)\varepsilon_n^{m/s}(k), \tag{5}$$

где функция $\varepsilon_n^{(\cdot)}(k)$ *определена формулой (4).*

Отсюда непосредственно следует, что значение $V_n^{m,s}(sk/m)$ конечношаговой игры $G_n^{m,s}(sk/m)$ ограничено снизу функцией $L_n^{m,s}(sk/m)$ – выигрышем, гарантированным стратегией $\sigma^{m,s}$ Игрока 1:

$$L_n^{m,s}(sk/m) = L^{m,s}(sk/m) - \varepsilon_n^{m,s}(k), \quad k = 1, \ldots, \frac{m}{s} - 1.$$

7. Выводы и перспективы

Для упрощенной модели биржевых торгов с фиксированным ненулевым спрэдом описано разумное поведение игроков. Несмотря на то, что это поведение не является оптимальным, на основе результатов исследования можно сделать ряд выводов.

Наличие ненулевого бид-аск спрэда естественным образом ограничивает способность инсайдера получать выгоду из своей приватной информации, так как максимальный ожидаемый выигрыш инсайдера уменьшается по сравнению с выигрышем, получаемым в модели без спрэда.

Выдвигается гипотеза о том, что оптимальная стратегия инсайдера порождает более сложный механизм ценообразования, чем простое случайное блуждание цен сделок, характерное для моделей без спрэда.

Разработанный в [5] подход к анализу конечношаговых игр, соответствующих упрощенным моделям без спрэда, эффективно применен к модели с произвольным спрэдом, что позволило получить нижнюю оценку ожидаемого выигрыша инсайдера.

Результаты, полученные для модели с двумя возможными значениями ликвидной цены акции, легко обобщаются на случай счетного множества возможных ликвидных цен, по аналогии с тем, как это сделано в работе [1] для модели без спрэда. Не повторяя технических выкладок, отметим, что центральной идеей является каноническое симметричное представление вероятностного распределения на целочисленной решетке как выпуклой комбинации распределений с двухточечными носителями. Детально структура этого представления описана в статье [12].

В качестве открытого вопроса отметим следующий: сохраняется ли при оптимальном поведении маркет-мейкеров эффект полного раскрытия инсайдерской информации в среднем за конечное время для модели с произвольным спрэдом.

Литература

1. ДОМАНСКИЙ В.К., КРЕПС В.Л. *Теоретико-игровая модель биржевых торгов: стратегические аспекты формирования цен на фондовых рынках* // Журнал Новой экономической ассоциации. – 2011. – Вып. 11. – С. 39–62.
2. КРЕПС В.Л. *Повторяющиеся игры, моделирующие биржевые торги, и возвратные последовательности* // Изв. РАН, Теория и системы управления. – 2009. – Вып. 4. – С. 109–120.
3. САНДОМИРСКАЯ М.С., ДОМАНСКИЙ В.К. *Решение одношаговой игры биржевых торгов с неполной информацией* // Математическая теория игр и ее приложения. – 2012. – Т. 4, Вып. 1. – С. 32–54.
4. САНДОМИРСКАЯ М.С. *Теоретико-игровая модель одношаговых инсайдерских торгов с ненулевой маржой* // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2012. – Т. 19, Вып. 2. – С. 219–220.
5. САНДОМИРСКАЯ М.С. *Цена внезапного раскрытия инсайдерской информации на фондовом рынке* // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2014. – Вып. 1. – С. 120–127.

6. AUMANN R.J., MASCHLER M. *Repeated Games with Incomplete Information.* – Cambridge, Massachusetts – London, England: The MIT Press. – 1995. – 360 p.
7. BACHELIER L. *Theorie de speculation* // Ann. Ecole Norm. Sup. – 1900 – Vol. 17. – P. 21–86.
8. CALCAGNO R., LOVO S. *Bid-Ask price competition with asymmetric information between market-makers* // The Review of Economic Studies. – 2006. – Vol. 73(2). – P. 329–355.
9. DE MEYER B., MOUSSA SALEY H. *On the Strategic Origin of Brownian Motion in Finance* // Int. Journal of Game Theory. – 2002. – Vol. 31. – P. 285–319.
10. DE MEYER B. *Price dynamics on a stock market with asymmetric information* // Games and economic behavior. – 2010. – Vol. 69. – P. 42–71.
11. DOMANSKY V. *Repeated games with asymmetric information and random price fluctuations at finance markets* // Int. Journal of Game Theory. – 2007. – Vol. 36(2). – P. 241–257.
12. DOMANSKY V. *Symmetric representations of bivariate distributions* // Statistics and Probability Letters. – 2013. – Vol. 83. – P. 1054–1061.
13. DOMANSKY V., KREPS V. *Repeated games with asymmetric information modeling financial markets with two risky assets* // RAIRO Operations Research. – 2013. – Vol. 47. – P. 251–272.
14. KYLE A.S. *Continuous Auctions and Insider Trading* // Econometrica. – 1985. – Vol. 53. – P. 1315—1335.
15. MERTENS J.F., SORIN S., ZAMIR S. *Repeated games* // CORE Discussion Paper №№9420, 9421, 9422. – Univ. Catholique de Louvain, Center for Operations Research & Econometrics. – 1994. – 544 p.
16. SANDOMIRSKII F. *Repeated games with incomplete information and slowly growing value* // The 7th Int. Conf. Game Theory and Management GTM2013. Abstracts / Eds. L. Petrosjan and N. Zenkevich. – 2013. – P. 207–209.

GAME-THEORETICAL DYNAMIC INSIDER TRADING MODEL WITH NON-ZERO BID-ASK SPREAD

Marina Sandomirskaia, St.Petersburg Institute for Economics and Mathematics of RAS, St.Petersburg; NRU Higher School of Economics, St.Petersburg, Cand.Sc. (sandomirskaya_ms@mail.ru, msandomirskaya@hse.ru).

Abstract: We consider the model of multistage insider trading between two market agents for one-type risky assets. One of the players (the insider) has private information about the liquidation value of the asset. At each step of the bidding each player simultaneously proposes bid and ask prices for one share with fixed non-zero spread. The uninformed player uses history of insider's moves to update his beliefs. For the unlimited duration bidding we construct upper and lower bounds of the guaranteed insider's gain and the strategies of both players insuring these bounds. We also calculate insider's loses in the case of disclosure of his private information.

Keywords: multistage bidding, bid-ask spread, insider, repeated games with incomplete information, the simple random walk.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В. В. Мазаловым

.

Поступила в редакцию 16.03.2014.
Опубликована 31.05.2014.