

УДК 519.6+004.94

ББК 22.193

НЕЯВНЫЕ СИЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РЕШЕНИЙ СДУ С МАРКОВСКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

Черных Н. В.¹

*(Арзамасский политехнический институт (филиал)
Нижегородского государственного технического
университета им Р.Е. Алексеева)*

Рассматриваются неявные сильные схемы численного решения стохастических дифференциальных уравнений с марковскими переключениями диффузионной составляющей. Теоретические исследования подтверждаются примерами численного моделирования в среде Scilab.

Ключевые слова: стохастические системы, марковские переключения, модель с переключениями, зависящими от фазового состояния, неявные сильные численные схемы, сходимость.

Введение

G. George Yin, Chao Zhu в своей книге «*Stochastic modeling and applied probability. Hybrid switching diffusions. Properties and applications*» [15] подробно рассматривают сложные переключаемые диффузионные процессы (hybrid switching diffusion processes) и их применения. Слово «hybrid» означает сосуществование непрерывной динамики и дискретных событий. Изучение таких процессов необходимо, так как они применяются в радиосвязи, при обработке сигнала, в организации сетей, процессах производственного планирования, моделировании био-

¹ Надежда Валентиновна Черных, аспирантка
(nadezdacher@mail.ru).

логических систем, экосистем, в финансовом проектировании, а также для моделирования, анализа, управления и оптимизации больших систем под воздействием влияний окружающей среды.

Один из важных классов гибридных систем – стохастические дифференциальные уравнения с марковскими переключениями (SDEwMSs). Методы численного решения стохастической дифференциальных уравнений с марковскими переключениями и пуассоновскими скачками интенсивно изучались в последние годы. Многие исследователи теоретически и экспериментально рассматривают метод Эйлера (Euler–Maruyama Method), в их числе [4, 6, 11, 13, 14–15]. В [3] для решения SDEwMSs применяются методы, основанные на стохастическом разложении Тейлора (Платена). Среди последних работ в этой сфере можно также отметить [7–10, 12].

В численном моделировании стремление конструировать большое количество методов, как явных, так и неявных, вызвано тем, что различные методы обладают разными возможностями в отношении точности, устойчивости, трудоемкости и т.д.

Неявные строгие схемы обычно имеют широкий диапазон размеров шага, подходящий для приближения стохастических динамических систем, в особенности тех, которые вовлекают весьма различные временные шкалы, без чрезмерного накопления неизбежных ошибок округления. Таким образом, неявные схемы хорошо подходят, чтобы моделировать решения жестких стохастических дифференциальных уравнений. [2]

Неявные схемы для решения SDEwMSs и SDE с пуассоновскими скачками рассматривались, например, в [4, 11, 13]. В [13] авторы изучают полунявные методы (Semi-Implicit Euler–Maruyama Methods) и отмечают, что явные численные схемы являются намного менее точными в приближении, чем их неявные или полунявные аналоги.

1. Предварительные сведения

Пусть (Ω, F, P) – вероятностное пространство; $F_t, t_0 \leq t \leq t_0 + T$ – неубывающее семейство σ -подалгебр F ;

$\omega_r(\cdot)$ – винеровский процесс. Пусть $M = \{1, \dots, m\}$ – конечное множество.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение с марковскими переключениями в форме

$$(1) \quad dX(t) = a(\beta(t), X(t))dt + \sigma(\beta(t), X(t))d\omega(t),$$

где $\beta(t)$ – однородный марковский процесс со счетным множеством состояний M , $\beta(0) = u_0$, $X(0) = x_0$.

$$(2) \quad P(\beta(t+h) = l \mid \beta(t) = u, x(s), \beta(s), s \leq t) = q_{ul}(x(t))h + o(h), \quad u \neq l,$$

где $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, $a(\cdot, \cdot): \mathfrak{R}^n \times M \mapsto \mathfrak{R}^n$ и $\sigma(\cdot, \cdot): \mathfrak{R}^n \times M \mapsto \mathfrak{R}^{n \times n}$.

$Q(x) = (q_{ul}(x(t))) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ – матрица интенсивности переходов, где для каждого t $q_{ul}(x) \geq 0$ при $u \neq l$, $q_{uu} = -q_u$, $\sum_{l=1}^m q_{ul}(x) = 0$

для каждого $u \in M$.

Предполагается, что функции $a(\beta(t), x(t))$ и $\sigma(\beta(t), x(t))$ определены при $t \in [t_0, t_0 + T]$, $x \in \mathfrak{R}^n$ и удовлетворяют следующим условиям:

– условию Липшица при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$, $x \in \mathfrak{R}^n$, $y \in \mathfrak{R}^n$, $u \in M$:

$$(3) \quad |a(u, x) - a(u, y)| + |\sigma(u, x) - \sigma(u, y)| \leq K|x - y|, \text{ а также}$$

$$(4) \quad |a(u, x)| + |\sigma(u, x)| \leq K(1 + |x|),$$

(5) функция $a(\beta(t), x(t))$ и все ее производные непрерывны;

– первые производные по x равномерно ограничены (чтобы выполнялось условие Липшица), $a(\beta(t), x(t))$ имеет ограниченные третьи производные по x (таким образом La удовлетворяет равномерному условию Липшица), а остальные производные растут по x при $|x| \rightarrow \infty$ не быстрее линейной функции от $|x|$;

– функция $\sigma(\beta(t), x(t))$ непрерывна и дважды непрерывно дифференцируема;

Здесь и далее используем следующие обозначения: $|x|$ означает евклидову норму вектора x , xu – скалярное произведение векторов x и y ; K – положительная константа.

$X_{u,x}(t)$ или просто $X(t)$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным данным $X_{u,x}(0) = x$. Разобьем промежутки $[t_0, t_0 + T]$ точками деления t_k на N равных частей, так что

$t_{k+1} - t_k = h, k = 0, 1, \dots, N - 1, t_0 + T = t_N, h = T/N$. Приближение к $X(t_k)$ будем обозначать $\bar{X}(t_k)$, где $\bar{X}_0 = X(t_0)$. Далее пусть $X - F_{t_k}$ - измеримая случайная величина и $E|X|^2 < \infty$; $X_{t_k, x}(t)$ означает решение уравнения (1) для $t_k \leq t \leq t_0 + T$, удовлетворяющее начальным данным при $t = t_k$.

Будем использовать разложение Платена, подробно рассмотренное в [2, 3], для конструирования неявных методов численного решения уравнения (1). При построении численной схемы будем использовать функцию $f(\beta(t), x(t))$ с переключаемой компонентой.

Пусть $X_{u, x}(s) = X(s)$ - решение уравнения (1); $f(\beta, x)$, где $\beta = \beta(t), X = X(t)$, - достаточно гладкая функция (скалярная или векторная). Согласно формуле Ито имеем для $t_0 \leq t \leq t_0 + T$

$$(6) \quad f(\beta(\mathcal{G}), X(\mathcal{G})) = f(\beta, x) + \int_t^{\mathcal{G}} \Lambda f(\beta(\mathcal{G}_1), X(\mathcal{G}_1)) d\omega(\mathcal{G}_1) + \int_t^{\mathcal{G}} Lf(\beta(\mathcal{G}_1), X(\mathcal{G}_1)) d\mathcal{G}_1,$$

где операторы Λ и L определены следующим образом:

$$(7) \quad \Lambda = \left(\sigma, \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

$$(8) \quad L = \left(a, \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma^i \sigma^j \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Применим формулу (6) к функциям Λf и Lf , а затем полученные выражения для $\Lambda f(\beta(\mathcal{G}), X(\mathcal{G}))$ и $Lf(\beta(\mathcal{G}), X(\mathcal{G}))$ подставим в (6). Поступая так дальше можно получить разложения для $f(\beta(t+h), X(t+h))$, где роль степеней выполняют повторные интегралы Ито (см. [3]). Путем ряда непосредственных подстановок далее получаем следующую формулу:

$$(9) \quad f(\beta(t+h), X(t+h)) = f + \Lambda f \int_t^{t+h} d\omega(\mathcal{G}) + Lf \int_t^{t+h} d\mathcal{G} + \Lambda^2 f \int_t^{t+h} d\omega(\mathcal{G}) \int_t^{\mathcal{G}} d\omega(\mathcal{G}_1) + \Lambda^3 f \int_t^{t+h} d\omega(\mathcal{G}) \int_t^{\mathcal{G}} d\omega(\mathcal{G}_1) \int_t^{\mathcal{G}_1} d\omega(\mathcal{G}_2) +$$

$$+ \Lambda Lf \int_t^{t+h} \int_t^{\mathcal{G}} d\mathcal{G} \int_t^{\mathcal{G}} d\omega(\mathcal{G}_1) + L\Lambda f \int_t^{t+h} d\omega(\mathcal{G}) \int_t^{\mathcal{G}} d\mathcal{G}_1 + L^2 f \int_t^{t+h} \int_t^{\mathcal{G}} d\mathcal{G}_1 + R_1,$$

где $f \equiv f(\beta(t), X(t))$.

$$(10) R_1 = \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \left(\int_t^{\mathcal{G}_2} \Lambda^4 f(\beta(\mathcal{G}_3), X(\mathcal{G}_3)) d\omega(\mathcal{G}_3) \right) d\omega(\mathcal{G}_2) \right) \times \right. \\ \times d\omega(\mathcal{G}_1) \Big) d\omega(\mathcal{G}) + \\ + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \left(\int_t^{\mathcal{G}_2} \Lambda^2 f(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\mathcal{G}_2 \right) d\omega(\mathcal{G}_1) \right) d\omega(\mathcal{G}) + \right. \\ + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \left(\int_t^{\mathcal{G}_2} \Lambda^2 Lf(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\omega(\mathcal{G}_2) \right) d\mathcal{G}_1 \right) d\omega(\mathcal{G}) + \right. \\ + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \left(\int_t^{\mathcal{G}_2} \Lambda^2 Lf(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\omega(\mathcal{G}_2) \right) d\omega(\mathcal{G}_1) \right) d\mathcal{G} + \right. \\ + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \left(\int_t^{\mathcal{G}_2} \Lambda^3 f(X(\mathcal{G}_3), X(\mathcal{G}_3)) d\mathcal{G}_3 \right) d\omega(\mathcal{G}_2) \right) d\omega(\mathcal{G}_1) \right) d\omega(\mathcal{G}) + \\ + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \left(\int_t^{\mathcal{G}_2} \Lambda^2 \Lambda f(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\mathcal{G}_2 \right) d\mathcal{G}_1 \right) d\omega(\mathcal{G}) + \right. \\ + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \left(\int_t^{\mathcal{G}_2} \Lambda^2 \Lambda f(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\mathcal{G}_2 \right) d\omega(\mathcal{G}_1) \right) d\mathcal{G} + \right. \\ + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \left(\int_t^{\mathcal{G}_2} \Lambda L^2 f(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\omega(\mathcal{G}_2) \right) d\mathcal{G}_1 \right) d\mathcal{G} + \right. \\ + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \left(\int_t^{\mathcal{G}_2} L^3 f(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\mathcal{G}_2 \right) d\mathcal{G}_1 \right) d\mathcal{G} \right.$$

В [2] рассмотрены общие принципы построения неявных методов решения стохастических дифференциальных уравнений. Г.Н. Мильштейном показано, что введение неявности за счет выражений, входящих в стохастические интегралы, может привести к заведомо неприемлемому методу. Напротив, путем введения неявности лишь за счет выражений, входящих в нестохастические интегралы, пытаются добиться

устойчивости методов, для чего, собственно, и конструируются неявные методы [2].

Далее построим конструктивный неявный метод, подходящий для практических моделирований решений уравнений вида (1). За основу берем неявную строгую схему порядка 1,5, используемую в [5, схема (3.9), стр. 162]. Для доказательства сходимости конструируемой численной схемы к решению уравнения (1) будем использовать метод Г.Н. Мильштейна, который автор применял для доказательства сходимости другой численной схемы к решению СДУ с аддитивными шумами ([2], стр. 59). Также будем опираться на теорему о порядке точности метода, основанного на одношаговой аппроксимации Г.Н. Мильштейна (см. [2], стр. 17 или [3], стр. 5). Приведем здесь теорему без пояснений для удобства ссылок.

Теорема 1. Пусть одношаговая аппроксимация $\bar{X}_{t,x}(t+h)$ имеет порядок точности η_1 для математического ожидания отклонения и порядок точности η_2 для среднеквадратичного отклонения, т.е., при любых $t_0 \leq t \leq t_0 + T - h$, $x \in \mathfrak{R}^n$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \left| E\left(X_{t,x}(t+h) - \bar{X}_{t,x}(t+h)\right) \right| &\leq K(1 + |x|^2)^{1/2} h^{\eta_1}, \\ \left[E\left|X_{t,x}(t+h) - \bar{X}_{t,x}(t+h)\right|^2 \right]^{1/2} &\leq K(1 + |x|^2)^{1/2} h^{\eta_2}, \end{aligned}$$

и пусть

$$\eta_2 \geq 1/2, \quad \eta_1 \geq \eta_2 + \frac{1}{2}.$$

Тогда при любых N и $k = 0, 1, \dots, N$ выполняется неравенство

$$\left[E\left|X_{t_0, X_0}(t_k) - \bar{X}_{t_0, X_0}(t_k)\right|^2 \right]^{1/2} \leq K\left(1 + E|X_0|^2\right)^{1/2} h^{\eta_2 - \frac{1}{2}},$$

т.е. порядок точности метода, построенного с использованием одношаговой аппроксимации $\bar{X}_{t,x}(t+h)$, равен $\eta = \eta_2 - 1/2$.

2. Постановка задачи

Рассмотрим следующую формулу, которая получается из (9) заменой $f(\beta, x)$ на вектор x . В этом случае $\Lambda f = \sigma$, $Lf = a$ (см. [3], стр. 12):

$$(11) \quad X_{u,x}(t+h) = x + \sigma \int_t^{t+h} d\omega(\mathcal{G}) + ah + \\ + \Lambda\sigma \int_t^{t+h} (\omega(\mathcal{G}) - \omega(t))d\omega(\mathcal{G}) + \\ + L\sigma \int_t^{t+h} (\mathcal{G} - t)d\omega(\mathcal{G}) + \Lambda a \int_t^{t+h} (\omega(\mathcal{G}) - \omega(t))d\mathcal{G} + \\ + \Lambda^2\sigma \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} (\omega(\mathcal{G}_1) - \omega(t))d\omega(\mathcal{G}_1) \right) d\omega(\mathcal{G}) + La \frac{h^2}{2} + R_3$$

В формуле (11) все коэффициенты σ , a , $\Lambda\sigma$, $L\sigma$, Λa , $\Lambda^2\sigma$, La вычисляются в точке (β, x) , а остаток R_2 равен

$$(12) \quad R_2 = \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \left(\int_t^{\mathcal{G}_2} \Lambda^3\sigma(\beta(\mathcal{G}_3), X(\mathcal{G}_3))d\omega(\mathcal{G}_3) \right) d\omega(\mathcal{G}_2) \right) \right) \times \\ \times d\omega(\mathcal{G}_1) \right) d\omega(\mathcal{G}) + \\ + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \Lambda\Lambda\sigma(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2))d\mathcal{G}_2 \right) d\omega(\mathcal{G}_1) \right) d\omega(\mathcal{G}) + \\ + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \Lambda L\sigma(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2))d\omega(\mathcal{G}_2) \right) d\mathcal{G}_1 \right) d\omega(\mathcal{G}) + \\ + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \Lambda^2 a(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2))d\omega(\mathcal{G}_2) \right) d\omega(\mathcal{G}_1) \right) d\mathcal{G} + \\ + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \left(\int_t^{\mathcal{G}_2} \Lambda^2\sigma(\beta(\mathcal{G}_3), X(\mathcal{G}_3))d\mathcal{G}_3 \right) d\omega(\mathcal{G}_2) \right) d\omega(\mathcal{G}_1) \right) d\omega(\mathcal{G}) + \\ + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} L^2\sigma(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2))d\mathcal{G}_2 \right) d\mathcal{G}_1 \right) d\omega(\mathcal{G}) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} L\Lambda a(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\mathcal{G}_2 \right) d\omega(\mathcal{G}_1) \right) + \\
 & + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \Lambda La(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\omega(\mathcal{G}_2) \right) d\mathcal{G}_1 \right) d\mathcal{G} + \\
 & + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} L^2 a(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\mathcal{G}_2 \right) d\mathcal{G}_1 \right) d\mathcal{G}.
 \end{aligned}$$

Слагаемое a представим в виде суммы $\mu a + (1 - \mu)a$. В первом слагаемом этой суммы функцию a заменим выражением

$$\begin{aligned}
 (13) \quad a(\beta, x) &= a(\beta(t+h), X(t+h)) - \int_t^{t+h} \Lambda a(\beta(\mathcal{G}), X(\mathcal{G})) d\omega(\mathcal{G}) - \\
 & - \int_t^{t+h} La(\beta(\mathcal{G}), X(\mathcal{G})) = \\
 & = a(\beta(t+h), X(t+h)) - \Lambda a \int_t^{t+h} d\omega(\mathcal{G}) - Lah + R_4,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 (14) \quad R_4 &= - \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \Lambda^2 a(\beta(\mathcal{G}_1), X(\mathcal{G}_1)) d\omega(\mathcal{G}_1) \right) d\omega(\mathcal{G}) - \\
 & - Lah - \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} L\Lambda a(\beta(\mathcal{G}_1), X(\mathcal{G}_1)) d\mathcal{G}_1 \right) d\omega(\mathcal{G}) - \\
 & - \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \Lambda La(\beta(\mathcal{G}_1), X(\mathcal{G}_1)) d\omega(\mathcal{G}_1) \right) d\mathcal{G} - \\
 & - \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} L^2 a(\beta(\mathcal{G}_1), X(\mathcal{G}_1)) d\mathcal{G}_1 \right) d\mathcal{G}.
 \end{aligned}$$

Подставим (13) в (11):

$$\begin{aligned}
 (15) \quad X_{u,x}(t+h) &= x + \sigma \int_t^{t+h} d\omega(\mathcal{G}) + \mu a(\beta(t+h), X(t+h))h - \\
 & - \mu h \Lambda a \int_t^{t+h} d\omega(\mathcal{G}) + (1 - 2\mu)La \frac{h^2}{2} + (1 - \mu)ah +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \Lambda \sigma \int_t^{t+h} (\omega(\vartheta) - \omega(t)) d\omega(\vartheta) + \\
 & + L \sigma \int_t^{t+h} (\vartheta - t) d\omega(\vartheta) + \Lambda a \int_t^{t+h} (\omega(\vartheta) - \omega(t)) d\vartheta + \\
 & + \Lambda^2 \sigma \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\vartheta} (\omega(\vartheta_1) - \omega(t)) d\omega(\vartheta_1) \right) d\omega(\vartheta) + \mu h R_4 + R_3 .
 \end{aligned}$$

В слагаемом $(1 - 2\mu)Lah^2/2$ снова представим La в виде суммы $\gamma La + (1 - \gamma)La$ и в первом слагаемом функцию La заменим выражением

$$(16) \quad La(\beta, x) = La(\beta(t+h), X(t+h)) + R_5,$$

где

$$(17) \quad R_5 = - \int_t^{t+h} L^2 a(\beta(\vartheta), X(\vartheta)) d\vartheta - \int_t^{t+h} \Lambda La(\beta(\vartheta), X(\vartheta)) d\omega(\vartheta).$$

Собирая все выкладки вместе, получим

$$\begin{aligned}
 (18) \quad X(t+h) & = x + \sigma \int_t^{t+h} d\omega(\vartheta) + \mu a(\beta(t+h), X(t+h))h + \\
 & + (1 - \mu)ah - \mu h \Lambda a \int_t^{t+h} d\omega(\vartheta) + \Lambda \sigma \int_t^{t+h} (\omega(\vartheta) - \omega(t)) d\omega(\vartheta) + \\
 & + L \sigma \int_t^{t+h} (\vartheta - t) d\omega(\vartheta) + \Lambda a \int_t^{t+h} (\omega(\vartheta) - \omega(t)) d\vartheta + \\
 & + \Lambda^2 \sigma \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\vartheta} (\omega(\vartheta_1) - \omega(t)) d\omega(\vartheta_1) \right) d\omega(\vartheta) + \\
 & + (1 - \gamma)(1 - 2\mu)La \frac{h^2}{2} + \gamma(1 - 2\mu)La(\beta(t+h), X(t+h)) \frac{h^2}{2} + R_3 + \\
 & + \mu R_4 h + \beta(1 - 2\mu)R_5 \frac{h^2}{2}.
 \end{aligned}$$

На основании лемм 1 и 2, доказанных Г.Н. Мильштейном (см. [2], стр. 37–40 или [3], стр. 11) и при соответствующих условиях (3), (4), (5), наложенных на функции $a(\beta(t), x(t))$ и $\sigma_r(\beta(t), x(t))$,

$$\Phi = R_3 + \mu R_4 h + \gamma(1 - 2\mu)R_5 \frac{h^2}{2}$$

удовлетворяет условиям

$$(19) |E\Phi| \leq K(1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}} h^3, \quad (E\Phi^2)^{\frac{1}{2}} \leq K(1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}} h^2.$$

Если в формуле (19) отбросить Φ , то получим неявную одношаговую аппроксимацию:

$$(20) \begin{aligned} \bar{X}(t+h) = & x + \sigma(\beta, x)(\omega(t+h) - \omega(t)) + \\ & + \mu a(\beta(t+h), \bar{X}(t+h))h + (1-\mu)a(\beta, x)h - \\ & - \mu h \Lambda a(\beta, x)(\omega(t+h) - \omega(t)) + \Lambda \sigma(\beta, x) \int_t^{t+h} (\omega(\vartheta) - \omega(t)) d\omega(\vartheta) + \\ & + L \sigma(\beta, x) \int_t^{t+h} (\vartheta - t) d\omega(\vartheta) + \Lambda a(\beta, x) \int_t^{t+h} (\omega(\vartheta) - \omega(t)) d\vartheta + \\ & + \Lambda^2 \sigma \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\vartheta} (\omega(\vartheta_1) - \omega(t)) d\omega(\vartheta_1) \right) d\omega(\vartheta) + \\ & + (1-\gamma)(1-2\mu)L a(\beta, x) \frac{h^2}{2} + \gamma(1-2\mu)L a(\beta(t+h), \bar{X}(t+h)) \frac{h^2}{2}. \end{aligned}$$

Одношаговой аппроксимации (20) отвечает двухпараметрический неявный метод (обозначим далее $\bar{X}_{t_k} = Y_k$, $\bar{\beta}_{t_k} = \beta_k$, $h = \Delta_k$):

$$(21) \begin{aligned} Y_{k+1} = & Y_k + \{ \mu a(\beta_{k+1}, Y_{k+1}) + (1-\mu)a(\beta_k, Y_k) \} \Delta_k + \\ & + \left(\frac{1}{2} - \mu \right) \{ \gamma L a(\beta_{k+1}, Y_{k+1}) + (1-\gamma)L a(\beta_k, Y_k) \} \Delta_k^2 + \\ & + \left(\sigma(\beta_k, X_k) \Delta\omega + L \sigma(\beta_k, X_k) I_{(0,1)} + \right. \\ & + \left. \Lambda a(\beta_k, X_k) \{ I_{(1,0)} - \mu \Delta\omega \Delta_k \} \right) + \Lambda \sigma(\beta_k, X_k) I_{(1,1)} + \\ & + \Lambda^2 \sigma I_{(1,1,1)}, \end{aligned}$$

где $I_{(0,1)}$, $I_{(1,0)}$, $I_{(1,1)}$, $I_{(1,1,1)}$ – повторные интегралы Ито (см. [3], стр. 9).

Рассмотрим, как осуществляется с помощью данной численной схемы состояние – зависимая модель переключений. Будем считать, что $\beta(t)$ – стохастически непрерывный процесс,

для которого $\beta(t+h) \xrightarrow{q} \beta(t)$ при $h \rightarrow 0$. Временной интервал разбивается на подынтервалы $[0, t_1), [t_1, t_1 + t_2), \dots$, на которых $\beta(t)$ постоянно, t_k – случайные моменты переключения марковской цепи. Далее будем рассматривать последовательность $\beta(t_k)$ как дискретно-временной стохастический процесс, аппроксимирующий $\beta(t)$ в соответствующем значении.

Будем рассматривать пару процессов $\beta(t)$ и $x(t)$ совместно как марковскую цепь следующим образом. Значения Y_{k+1} генерируются рекурсивно согласно (21), используя предыдущие значение Y_k , и одновременно генерируются значения β_{k+1} , также используя значение Y_k ($x = Y_k$ в матрице переходных вероятностей $P = I + \Delta Q(x)$) [3].

Сформулируем и докажем теорему сходимости метода (21) с среднеквадратичным порядком точности $3/2$ к решению уравнений вида (1).

Теорема 2. Пусть коэффициенты $a(\beta, x)$ и $\sigma(\beta, x)$ уравнения (1) удовлетворяют условиям (3), (4), (5). Тогда порядок точности метода (21), построенного с использованием одношаговой аппроксимации (20), равен $3/2$.

Доказательство.

Подсчитаем разность

$$(22) \quad X(t+h) - \bar{X}(t+h) = \\ = \mu(a(\beta(t+h), X(t+h)) - a(\beta(t+h), \bar{X}(t+h)))h + \\ + (1 - 2\mu)\gamma(La(\beta(t+h), X(t+h)) - La(\beta(t+h), \bar{X}(t+h)))\frac{h^2}{2} + \Phi.$$

Так как функции a и La удовлетворяют условиям Липшица, то

$$(23) \quad |X(t+h) - \bar{X}(t+h)| \leq |\mu| \cdot hK \cdot |X(t+h) - \bar{X}(t+h)| + \\ + |1 - 2\mu| \cdot |\gamma| \cdot K \frac{h^2}{2} \cdot |X(t+h) - \bar{X}(t+h)| + |\Phi|.$$

Тогда при достаточно малых h

$$(24) \quad |X(t+h) - \bar{X}(t+h)| \leq 2\Phi.$$

Поэтому, используя (19),

$$(25) E|X(t+h) - \bar{X}(t+h)|^2 \leq K(1+|x|^2)h^4.$$

Из (24) следует

$$(26) |E(X(t+h) - \bar{X}(t+h))| \leq |\mu| \cdot hK \cdot E|X(t+h) - \bar{X}(t+h)| + \\ + |1 - 2\mu| \cdot |\gamma| \cdot K \frac{h^2}{2} \cdot E|X(t+h) - \bar{X}(t+h)| + |E\Phi|.$$

Отсюда, благодаря (25),

$$(27) E|X(t+h) - \bar{X}(t+h)| \leq K(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}} h^2, \text{ и далее}$$

$$(28) |E(X(t+h) - \bar{X}(t+h))| \leq K(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}} h^3.$$

Неравенства (25), (28) и теорема 1 доказывают, что метод (21) имеет порядок точности 3/2 и может обеспечивать приближение решения уравнений вида (1). Теорема доказана.

Аналогично можно рассмотреть более простые методы (частные случаи рассмотренной схемы (21)), основанные на явных сильных схемах Эйлера (Euler–Maruyama) и Мильштейна, подобным образом доказывая их сходимость к решению уравнения (1).

3. Пример

Рассмотрим следующее линейное стохастическое уравнение

$$(29) dX_t = FX_t dt + GX_t d\omega_t,$$

на временном интервале $[0, T]$, $X_0=1$.

Определим матрицы

$$F = \begin{pmatrix} -f(\beta, x) & f(\beta, x) \\ f(\beta, x) & -f(\beta, x) \end{pmatrix}; \\ G = g(\beta, x)I = \begin{pmatrix} g(\beta, x) & 0 \\ 0 & g(\beta, x) \end{pmatrix},$$

где I – единичная матрица, $\beta = \beta(t)$, $x = x(t)$;

$$(30) X_t = X_0 \exp\left(\left(F - \frac{1}{2}G^2\right)t + G\omega_t\right)$$

– решение уравнения для $t \in [0, T]$ и данного винеровского процесса $\omega = \{\omega_t, t \geq 0\}$; $M = \{1, 2, \dots, m\}$ – число состояний марковской цепи.

Зададим начальные значения $Y_0 = X_0$, $\beta_0 = u_0$ и будем рекурсивно генерировать 100 значений Y_k с равным значением шага Δ согласно (21), где Δ_k – есть длина временного интервала дискретизации $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_k < \dots < \tau_N = T$ на временном интервале $[t_0, T]$.

Для сравнения будем использовать (30), чтобы определить соответствующие значения точного решения, используя ту же примерную траекторию винеровского процесса ω_t на подынтервалах $\tau_n \leq t \leq \tau_{n+1}$.

Рассмотрим результаты численного решения уравнения (29), выбирая различные варианты задания матрицы переходов P , шага дискретизации Δ , значений функций $f(\beta_t, x_t)$, $g(\beta_t, x_t)$.

Пусть $f(\beta_t, x_t)$ принимает два значения – $\{\alpha_1, \alpha_2\}$, соответствующие первому и второму состоянию марковской цепи. $g(\beta_t, x_t)$ принимает два значения – $\{\lambda_1, \lambda_2\}$.

$\mu_1 = 0,5$, $\mu_2 = 0,5$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 1$.

$$1. \quad Q = \begin{pmatrix} -5 \cos^2 x & 5 \cos^2 x \\ 10 \cos x & -10 \cos x \end{pmatrix}; \quad P = I + Q \Delta;$$

$$\alpha_1 = \sin x + \cos x; \quad \alpha_2 = 2 - \sin 2x;$$

$$\lambda_1 = 0,2; \quad \lambda_2 = 0,005;$$

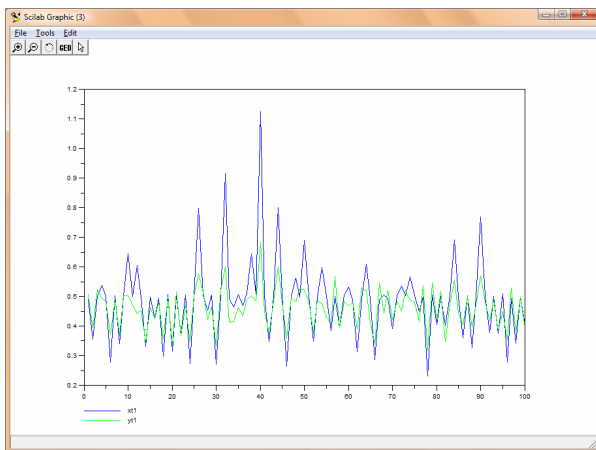


Рис. 1. Аппроксимация yt (зеленая кривая) и первая компонента точного решения xt (синяя кривая) $\Delta = 0,5$ ($T = 5$)

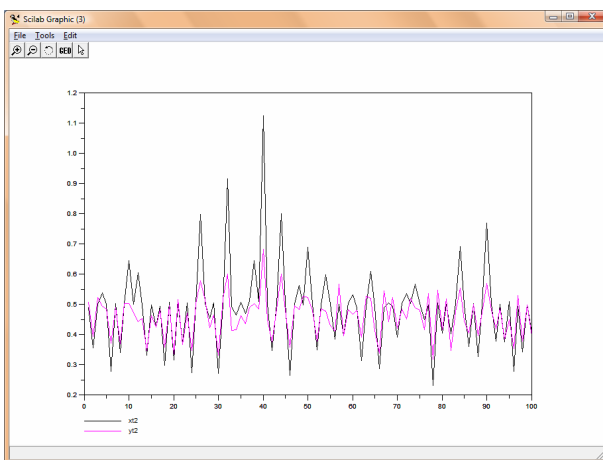


Рис. 2. Аппроксимация yt (лиловая линия) и вторая компонента решения xt (черная)

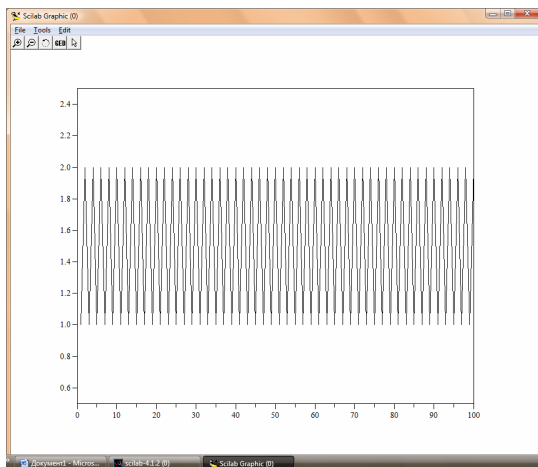


Рис. 3. Марковская цепь

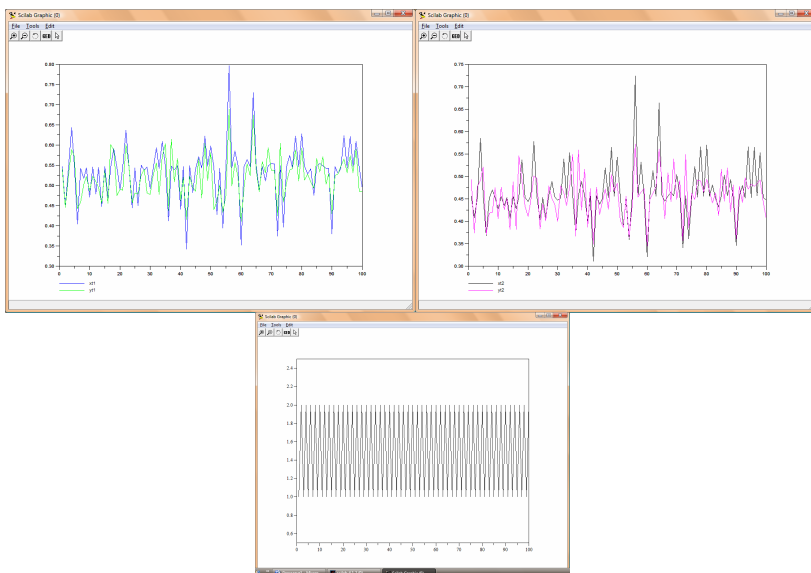


Рис. 4. $\Delta = 0,1 (T = 1)$

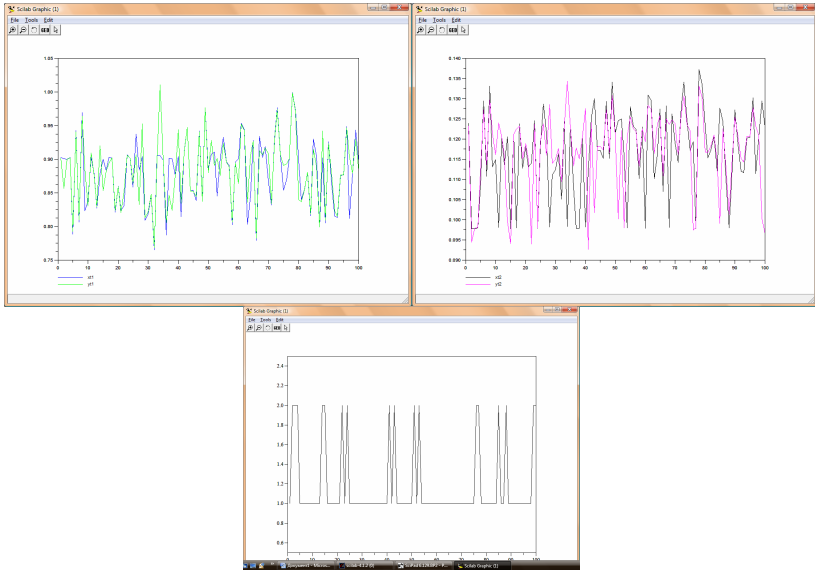


Рис. 5. $\Delta = 0,05$ ($T = 0,1$)

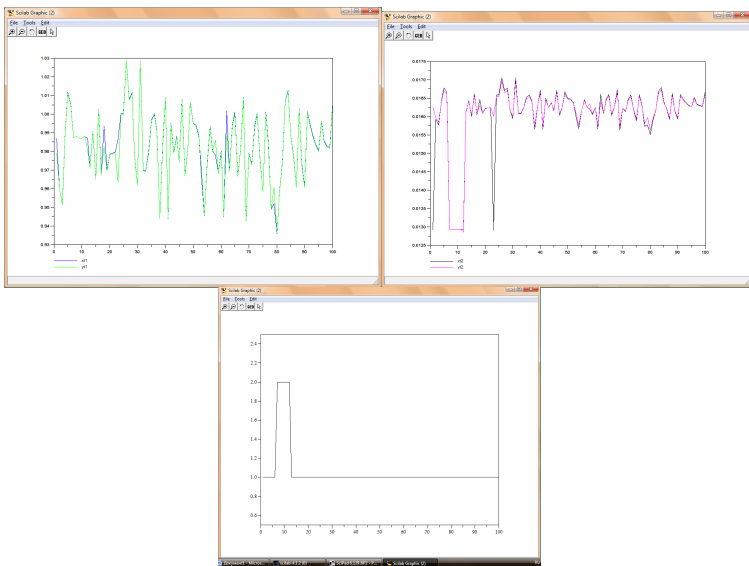


Рис. 6. $\Delta = 0,002$ ($T = 0,02$)

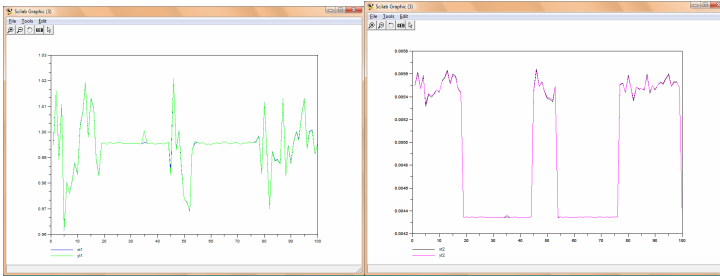


Рис. 7. $\Delta = 0,0008$ ($T = 0,004$)

2.
$$Q = \begin{pmatrix} -\cos^2 x & \cos^2 x \\ -3\sin x & 3\sin x \end{pmatrix}; P = I + Q\Delta;$$

$$\alpha_1 = 2 + \sin x; \alpha_2 = 1 + \sin x \cos x;$$

$$\lambda_1 = 0,2; \lambda_2 = 0,8;$$

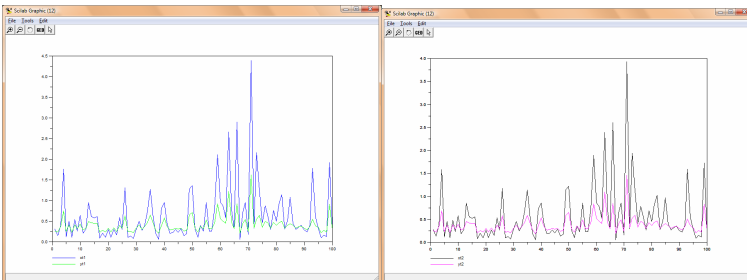


Рис. 8. $\Delta = 0,6$ ($T = 3$)

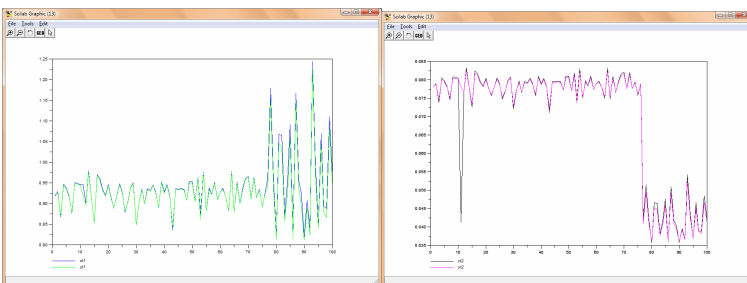


Рис. 9. $\Delta = 0,006$ ($T = 0,3$)

$$3. \quad Q = \begin{pmatrix} -5 \cos^2 x & 5 \cos^2 x \\ 10 \cos^2 x & -10 \cos^2 x \end{pmatrix}; \quad P = I + Q \Delta;$$

$$\alpha_1 = \sin x + \cos x; \quad \alpha_2 = 1 + \cos x;$$

$$\lambda_1 = 0,02; \quad \lambda_2 = 0,3;$$

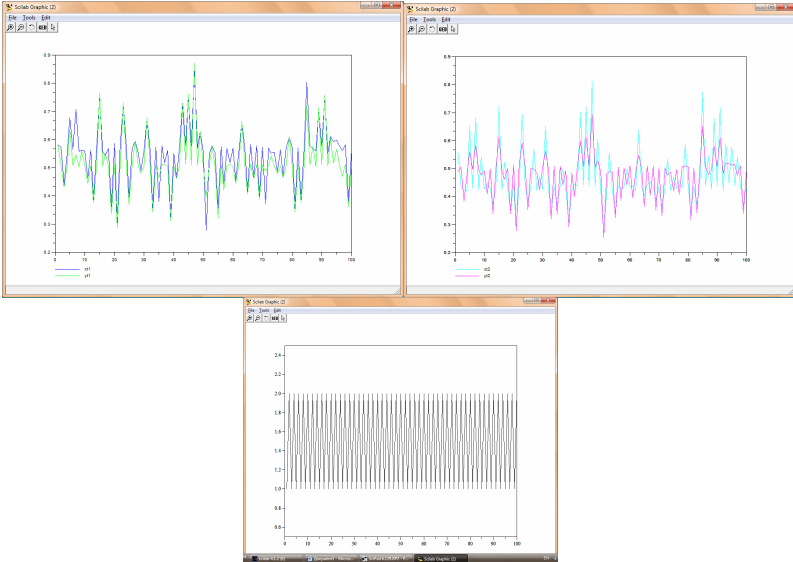


Рис. 10. $\Delta = 0,5$ ($T = I$); марковская цепь

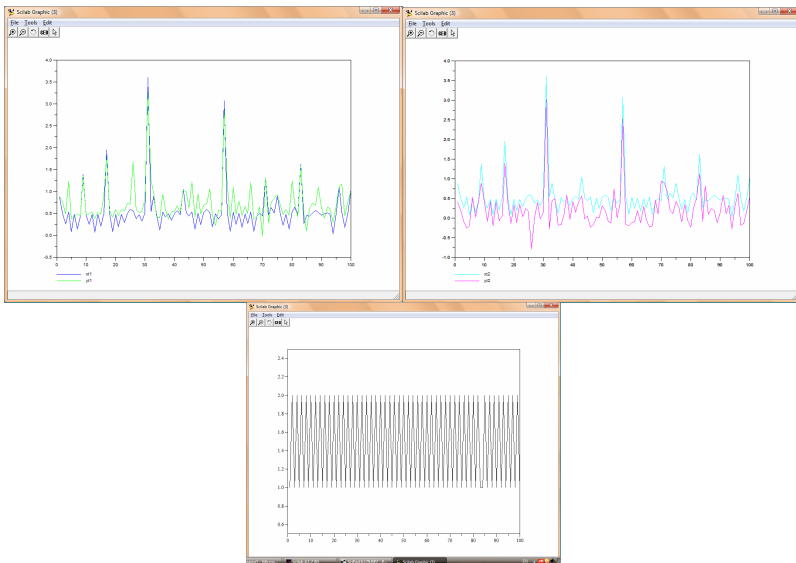


Рис. 11. $\Delta = 5$ ($T = 10$); марковская цепь

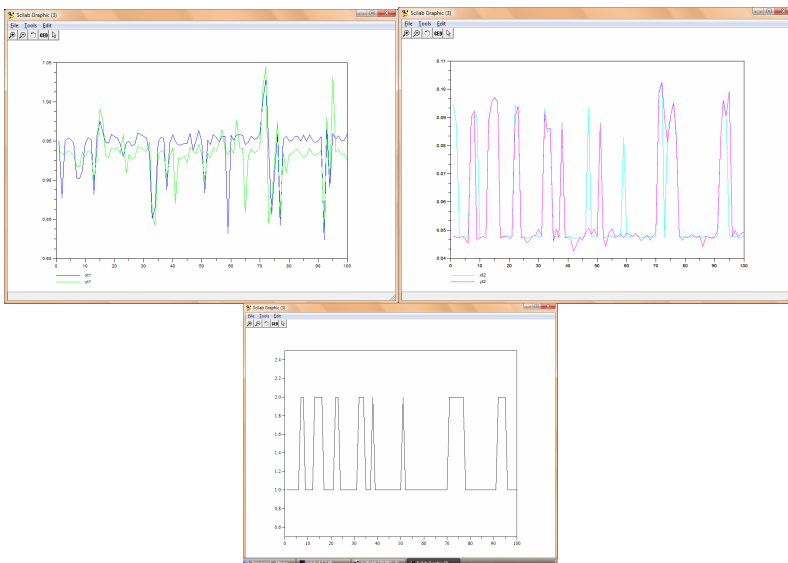


Рис. 12. $\Delta = 0,01$ ($T = 0,05$); марковская цепь

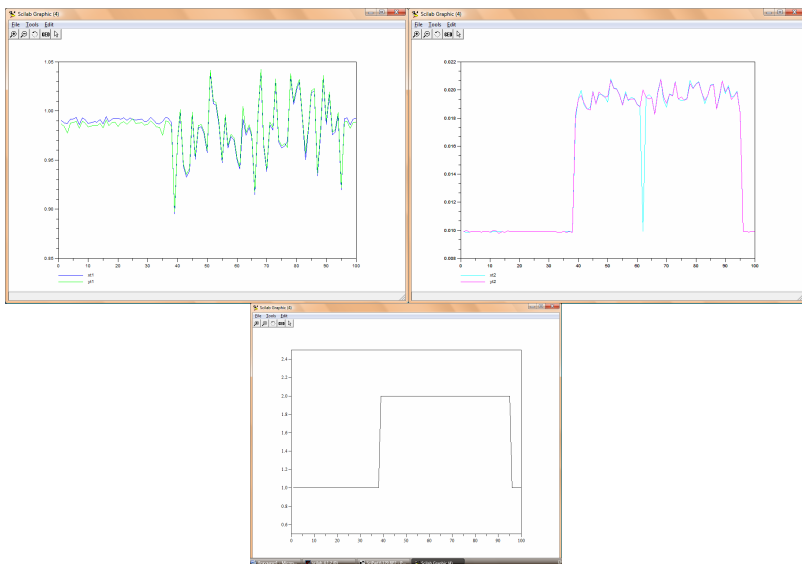


Рис. 13. $\Delta = 0,001$ ($T = 0,01$); марковская цепь

Далее приведем пример использования неявной схемы Эйлера:

$$Y_{k+1} = Y_k + \left\{ \mu a(\beta_{k+1}, Y_{k+1}) + (1 - \mu) a(\beta_k, Y_k) \right\} \Delta_k + \sum_{r=1}^d \sigma_r(\beta_k, X_k) \Delta \omega_r,$$

$$Q = \begin{pmatrix} -5 \cos^2 x & 5 \cos^2 x \\ 10 \cos^2 x & -10 \cos^2 x \end{pmatrix}; \quad P = I + Q \Delta;$$

$$\alpha_1 = 2 + \sin x; \quad \alpha_2 = 1 + \sin x \cos x;$$

$$\lambda_1 = 0,2; \quad \lambda_2 = 0,01;$$

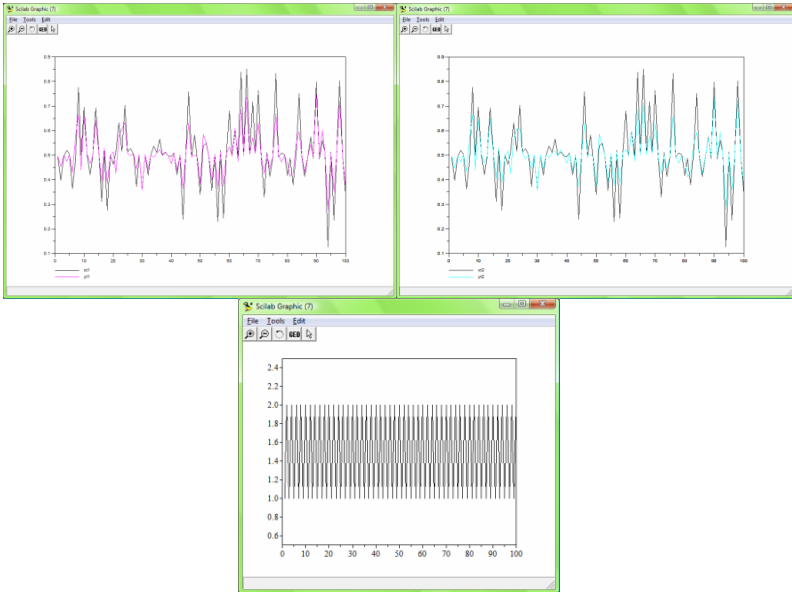


Рис. 14. $\Delta = 0,5$ ($T = 5$); марковская цепь

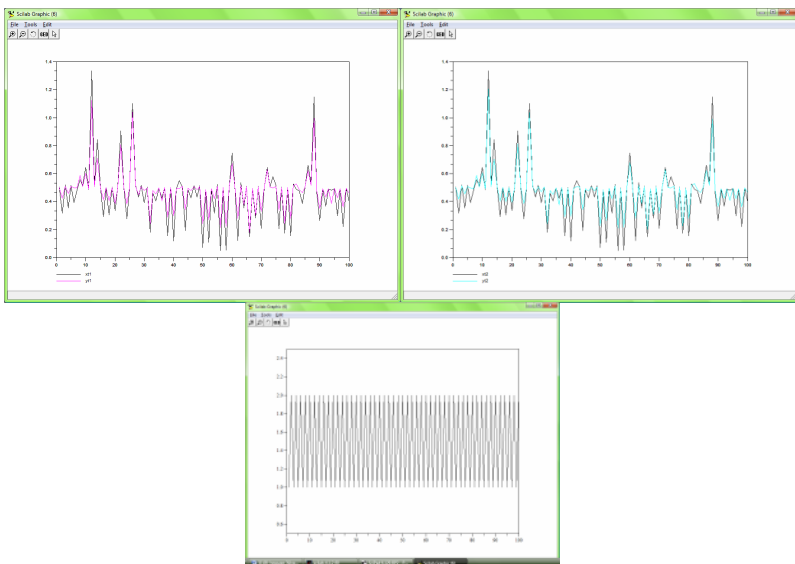


Рис. 15. $\Delta = 0,8$ ($T = 10$); марковская цепь

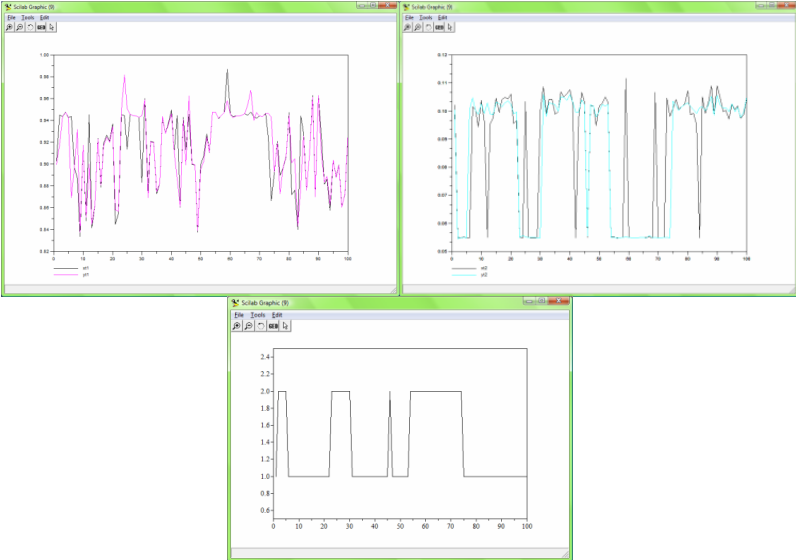


Рис. 16. $\Delta = 0,008$ ($T = 0,04$); марковская цепь

Пример применения неявной схемы Мильштейна:

$$Y_{k+1} = Y_k + \{\mu a(\beta_{k+1}, Y_{k+1}) + (1 - \mu)a(\beta_k, Y_k)\}\Delta_k + \sum_{r=1}^d \sigma_r(\beta_k, X_k)\Delta\omega_r + \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \Lambda_i \sigma_r(\beta_k, X_k)I_{(1,1)},$$

где $I_{(0,1)}$, $I_{(1,0)}$, $I_{(1,1)}$, $I_{(1,1,1)}$ – повторные интегралы Ито (см. [3], стр. 9).

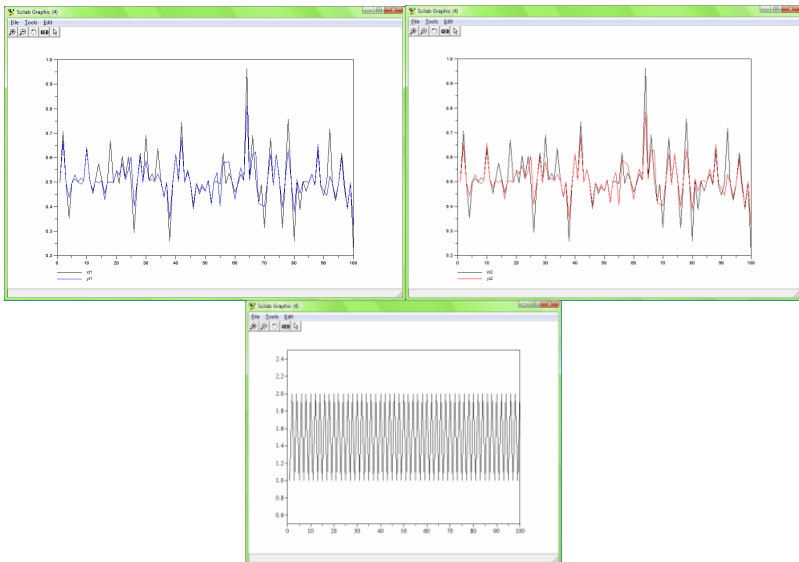


Рис. 17. $\Delta = 0,6$ ($T = 3$); марковская цепь

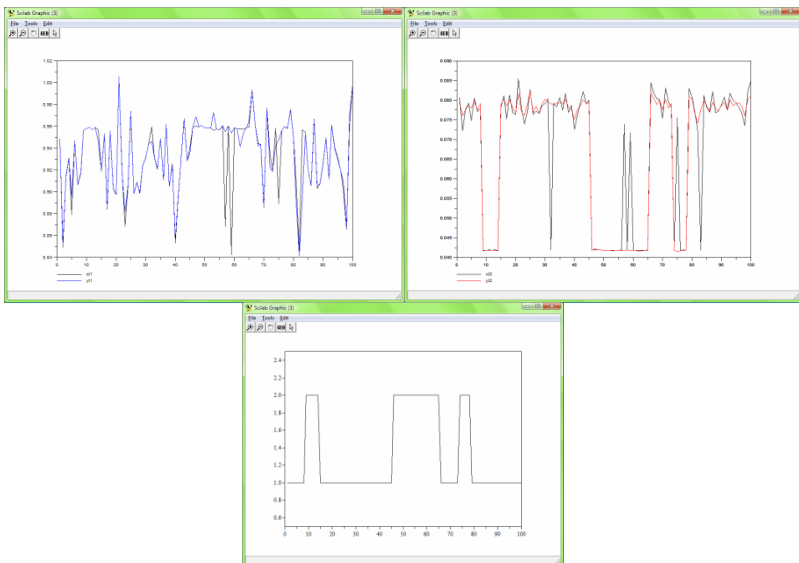


Рис. 18. $\Delta = 0,008$ ($T = 0,04$); марковская цепь

Литература

1. КУЗНЕЦОВ Д.Ф. *Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения*. – СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2007. – 800 с.
2. МИЛЬШТЕЙН Г.Н. *Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений*. – Свердловск: Изд-во Уральского университета, 1988. – 224 с.
3. ЧЕРНЫХ Н.В., ПАКШИН П.В. *Алгоритмы численного решения стохастических дифференциальных систем с переключаемой диффузией // Управление большими системами*. – 2012. – №36. – 315 с.
4. HIGHAM D.J. *Convergence and stability of implicit methods for jump-diffusion systems // Int. J. Numer. Anal. Mod.* – 2006 – №3. – P. 125–140.
5. KLOEDEN P. E., PLATEN E., SCHURZ H. *Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments*. – Berlin: Springer-Verlag, 1994. – 294 p.
6. LI H., XIAO L., YE J. *Strong predictor-corrector Euler-Maruyama methods for stochastic differential equations with Markovian switching // Journal of Computational and Applied Mathematics*. – 2013 – Vol. 237, Issue 1. – P. 5–17.
7. LI R., PANG W. K., LEUNG P. K. *Convergence of numerical solutions to stochastic age-structured population equations with diffusions and Markovian switching // Applied Mathematics and Computation*. – 2010 – Vol. 216, Issue 3. – P. 744–752.
8. MAO X., YUAN C., YIN G. *Approximations of Euler-Maruyama type for stochastic differential equations with Markovian switching, under non-Lipschitz conditions // Journal of Computational and Applied Mathematics*. – 2007. – Vol. 205, Issue 2. – P. 936–948.
9. MILOŠEVIĆ M., JOVANOVIĆ M. *A Taylor polynomial approach in approximations of solution to pantograph stochastic differential equations with Markovian switching // Mathematical and Computer Modelling*. – 2011 – Vol. 53, Issues 1–2. – P. 280–293.

10. RATHINASAMY A. *Split-step θ -methods for stochastic age-dependent population equations with Markovian switching* // Nonlinear Analysis: Real World Applications. – 2012 – Vol. 13, Issue 3. – P. 1334–1345.
11. RATHINASAMY A., YIN B., YASODHA B. *Numerical analysis for stochastic age-dependent population equations with Poisson jump and phase semi-Markovian switching* // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2011 – Vol. 16, Issue 1. – P. 350–362.
12. WU S.J. AND ZHOU B. *Existence and uniqueness of stochastic differential equations with random impulses and Markovian switching under non-lipschitz conditions* // Acta Mathematica Sinica. – 2011. – Vol. 27, Issue 3. – P. 519–536.
13. YIN B., MA Z.. *Convergence of the semi-implicit Euler method for neutral stochastic delay differential equations with phase semi-Markovian switching* // Applied Mathematical Modelling. – 2011 – Vol. 35, Issue 5. – P. 2094–2109.
14. YIN G., MAO X., YUAN C. AND CAO D. *Approximation methods for hybrid diffusion systems with state-dependent switching processes: numerical algorithms and existence and uniqueness of solutions* // SIAM Journal on Mathematical Analysis. – 2010 – Vol. 41, №6. – P. 2335–2352.
15. YIN G., ZHU C. *Hybrid switching diffusions. Properties and applications.* – Stochastic modeling and applied probability, Springer Science + Business Media, LLC, 2010.
16. YUAN C., MAO X. *Convergence of the Euler–Maruyama method for stochastic differential equations with Markovian switching* // Mathematics and Computers in Simulation. – 2004. – Vol. 64, Issue 2. – P. 223–235.

**IMPLICIT STRONG METHODS FOR THE
NUMERICAL SOLUTION MODELLING FOR
STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH
MARKOVIAN SWITCHING**

Nadezda Chernykh, post-graduate student (nadezdacher@mail.ru).

Abstract: We study implicit strong approximate methods for stochastic differential equations with Markovian switching (SDEwMSs). Theoretical results are verified with numerical examples in Scilab framework.

Keywords: stochastic systems, Markovian switching, state-dependent switching, implicit strong numerical scheme, convergence.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А.П. Курдюковым*

*Поступила в редакцию 17.08.2012.
Опубликована 31.07.2014.*