УДК 519.86 + 330.46
ББК 65.012.1

ЭФФЕКТИВНОСТЬ РЕЗЕРВНОЙ ЦЕНЫ И ДАВЛЕНИЕ КОНКУРЕНЦИИ В АУКЦИОНАХ[1]

Топинский В. А.[2],
(*ООО Яндекс, Москва; ЛИСОМО РЭШ, Москва*)

В работе представлен анализ эффективности резервной цены в аукционах, определенной как относительное значение прироста ожидаемого дохода от аукциона с оптимальным значением резервной цены относительно ожидаемого дохода от того же аукциона, но без резервной цены. Дается формальное определение конкуренции (или давлению конкуренции) в аукционах и доказывается обратная зависимость эффективности резервной цены от уровня конкуренции в аукционе. Приведены примеры свойств аукционов, монотонно влияющих на конкуренцию.

Ключевые слова: резервная цена, оптимизация дохода, конкуренция, давление конкуренции, симметричные аукционы, позиционный аукцион.

Введение

На практике продавец или аукционист часто устраивает аукцион (или в некоторых случаях тендер – обратный аукцион) с целью извлечь из процесса максимальную выгоду для себя. Под максимальной выгодой в случае аукционов обычно понимают максимально возможный ожидаемых доход аукциониста. Вид оптимального с этой точки зрения аукциона для продажи одного товара описал Роджер Майерсон в работе [17]. Этот оптималь-

---

[1] *Автор признателен проф. С.Б. Измалкову за ценное обсуждение содержания статьи. Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, грант Правительства РФ, договор 14.U04.31.0002.*

[2] *Валерий Александрович Топинский,* (*topinsky@gmail.com*).

ный механизм в своем общем виде является трудно реализуемым на практике, но, когда все покупатели по представлениям аукциониста обладают одинаковыми свойствами (симметричный случай), согласно Теореме об эквивалентности по доходу («Revenue Equivalence Theorem», [14]) любой классический аукцион с правильно установленной *резервной ценой*[3] будет оптимальным.

Разработка правил или формата аукциона с целью максимизации ожидаемого дохода аукциониста называется задачей *оптимизации дохода*. Де-факто на практике используются как правило классические форматы аукционов: английский аукцион, аукцион первой цены, аукцион второй цены или их естественные обобщения. Одной из причин распространенности этих аукционов является их *универсальность*, то есть их правила универсальны для продажи любого вида объектов. Кроме того данные форматы не позволяют устраивать дискриминацию среди покупателей, что часто является типичным ограничением на правила аукциона. Оптимизацию ожидаемого дохода при этом аукционист проводит как правило с помощью инструмента резервной цены.

Задача определения оптимального значения резервной цены является сама по себе не простой, так как требует знания свойств покупателей и выполнения ряда предположений. Например, даже в случае, когда аукционист обладает данными о ставках в предыдущих (за прошлые годы или кварталы) аналогичных аукционах, то для определения оптимального значения резервной цены необходимо знать, каким образом покупатели оценивают ценность обладания объектом продажи, и согласно каким стратегиям покупатели делают ставки в ходе аукциона (подробнее о методах структурной эконометрики аукционов см. [19]).

На практике покупатели часто не удовлетворяют всем теоретическим предположениям, поэтому применяемые методы вычисления резервной цены позволяют найти оптимальное значение с некоторой погрешностью. Естественно размер этой по-

[3] *Под резервной ценой понимается минимально возможная цена продажи. Как правило резервная цена устанавливается аукционистом и объявляется в правилах аукциона.*

грешности зависит от того, насколько сильно сделанные предположения не соответствуют действительности. Результатом таких неточностей в оценке оптимальной резервной цены может быть два случая:

1) значение резервной цены переоценено, и, как следствие, аукционист может получить уменьшение ожидаемого дохода;[4]

2) значение резервной цены недооценено.

Второй случай с недооцененной резервной ценой приводит к суб-оптимальному аукциону, когда ожидаемых доход увеличивается, но не на максимально возможное значение. При этом большинство современных аукционов проводятся на базе современных информационных технологий (в электронном формате). И подобного рода оптимизация аукционов (сбор данных по предыдущим аукционам, решение задачи определения оптимального значения резервной цены, дальнейшее их внедрение в систему, оценка результатов, поддержка и возможная корректировка этих значений) порождает естественные издержки на развитие программного обеспечения, инфраструктуры в целом. Поэтому даже недооценка резервной цены в случае больших отклонений от оптимального значения может приводить в итоге к уменьшению прибыли (доход за вычетом издержек), что также нежелательно.

Поэтому очень важно понимать, когда применение инструмента резервной цены практично, а когда слишком рискованно. Очевидно, что если возможный прирост ожидаемого дохода от оптимальной резервной цены очень маленький, то существующий риск получить потери в прибыли весьма велик. С другой стороны, если резервная цена сильно влияет на ожидаемый доход, то есть даже в окрестности оптимального значения можно получить существенный прирост ожидаемого дохода, то риск

[4] *Известно, что значение ожидаемого дохода в зависимости от значения резервной цены начинает резко уменьшаться в области справа от оптимального значения резервной цены.*

оказаться в проигрыше существенно сокращается. Всё это приводит к необходимости анализировать свойства конкретных аукционов с целью оценить возможный прирост дохода от резервной цены.

Общеизвестным правилом считается факт, что резервная цена имеет значимый эффект на ожидаемый доход в тех случаях, когда уровень конкуренции в аукционе недостаточно велик, и что с ростом этой конкуренции этот эффект монотонно уменьшается. При этом данный факт понимается в большей степени на интуитивном уровне – термин *конкуренция* или ее уровень формально не определяется и лишь порой отождествляется с числом участников в аукционе (см. [12, 19]).

В данной работе, определяя эффективность резервной цены как отношение ожидаемого дохода от аукциона с оптимальной резервной ценой к ожидаемому доходу без резервной цены, проводится анализ эффективности резервных цен в многотоварных аукционах с единичным спросом среди покупателей в симметричном случае. Сравнение аукционов по эффективности резервных цен удается построить, основываясь лишь на сравнении их *приведенных форм*.[5] На основе этих же приведенных форм строится формальное определение *давления конкуренции*, с помощью которого удается сравнивать аукционы по уровню конкуренции в них. Далее показывается, что определенные таким образом эффективность резервной цены и уровень конкуренции в аукционе имеют обратную зависимость. То есть с ростом уровня конкуренции эффективность резервных цен действительно уменьшается.

Важным практическим результатом является проводимый здесь анализ свойств аукциона, которые определяют уровень конкуренции в данном аукционе. Так как на практике вычисление приведенной формы и ее дальнейший анализ сильно затруднен в силу того, что приведенная форма определяется через ненаблюдаемые величины, то знание того, какие простые (наблюдаемые или вычисляемые) свойства аукциона определяют конкуренцию,

[5] *Подробнее о приведенных формах аукционов и ограничениях на их реализуемость см. [4].*

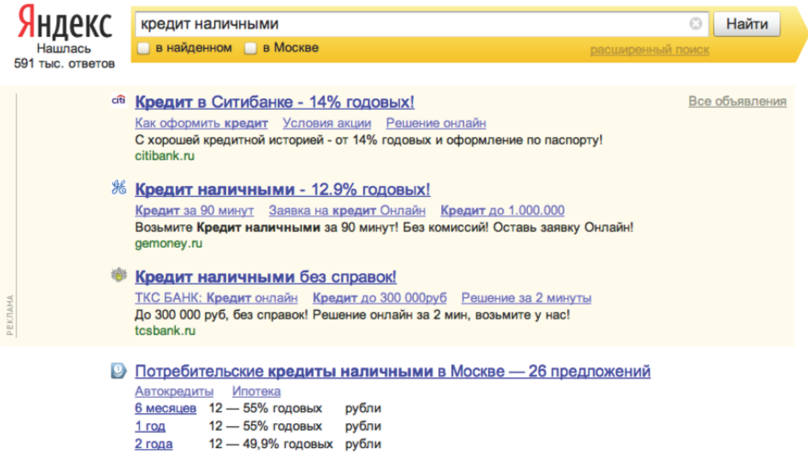

Рис. 1. Пример вертикального размещения рекламы на трех позициях рекламного блока на странице результатов поисковой системы Яндекс.

позволяет строить практичные критерии сравнения аукционов.

Важным примером прикладной области для данной работы являются *рекламные интернет-аукционы*. Данный вид аукционов формирует один из крупнейших и быстро растущих рынков в электронной коммерции. При этом он позволяет продемонстрировать на себе сразу несколько формирующих уровень конкуренции свойтсв и их влияние на эффективность резервной цены.

Рекламный интернет-аукцион часто называют *позиционным*, так как на нем продаются позиции на странице поисковых результатов (см. рис. 1). Аукцион является *динамичным*, так как он разыгрывается каждый раз, когда пользователь поисковой системы задает запрос, на который рекламодатель желает разместить свое объявление, и, соответственно, может повториться в будущем. Кроме того здесь возникают *многотоварность* и *неоднородность* объектов продажи, так как одновременно продается несколько рекламных позиций, которые естественным образом упорядочены сверху вниз по средней частоте генерируемых переходов пользователей на сайт рекламодателя [13]. Последним характерным свойством данного вида аукционов является *единичный спрос*, так как поисковая система позволяет любому рекламодателю единовременно разместить не более одного рекламного объявления на странице результатов.

Динамичность аукционов, многообразие запросов с одной и той же тематикой, механизмы сопоставления запросов и рекламных объявлений делают объект исследования сложным. Эксперимент по оптимизации позиционного аукциона с помощью резервных цен описали в своей работе Островский и Шварц на примере рекламных аукционов на портале «Yahoo!», [18]. Любая работа по промышленному внедрению резервных цен имеет себестоимость: цена разработки программного комплекса, цена увеличения необходимых объемов памяти. Кроме того, на примере данной экспериментальной работы ясно, что применяемые методы являются неточными и получаемые оценки имеют погрешность. Результат Островского и Шварца в среднем по системе был положительным: был получен прирост в прибыли. При этом авторы указали на наличие проблем: существовали подмножества поисковых запросов, на которых наблюдались потери в прибыли.

Одним из возможных путей уменьшения подобных негативных результатов, является исключение тех аукционов, для которых ожидаемый эффект от внедрения оптимальных резервных цен незначим, то есть возможные погрешности в получаемых оценках могут привести к отрицательным результатам. Поэтому важно понимать, какие свойства таких аукционов уменьшают эффективность резервных цен.

Из полученных в данной работе результатов применительно к данному виду аукционов можно выделить три простых и основных свойства, определяющих уровень конкуренции, а значит и эффективность резервных цен.

1) *Число участников в аукционе*. Наиболее интуитивное свойство аукциона, которое обычно отождествляется с уровнем конкуренции, – чем больше участников, тем выше уровень конкуренции.

2) *Число доступных рекламных позиций*. Данное свойство обладает своего рода обратным эффектом относительно числа участников — чем больше объектов продажи, тем меньше уровень конкуренции. Напомню, что здесь рассматривается случай единичного спроса, то есть покупатели не могут получить более одной рекламной позиции на странице.

3) *Степень дискриминации по позиционному эффекту*. Если рекламные позиции на странице организованы достаточно «плотно» друг к другу, то дискриминация по позициям в таком случае будет минимальна. Если же рекламные позиции сильно удалены друг от друга или размер одной позиции по вертикали достаточно велик, то позиционный эффект для второй и последующих позиций будет существенно бóльшим: вероятность того, что пользователь просмотрит их позиции будет существенно уменьшена. Поэтому, если степень дискриминации мала, то позиции имеют практически одинаковую ценность для покупателей, то есть уровень конкуренции здесь небольшой. В противном случае рекламодатели будут стремиться получить первую позицию, тем самым увеличивая уровень конкуренции в аукционе.

Все только что перечисленные свойства являются простыми в том смысле, что их значения можно либо наблюдать явно, либо являются в достаточной мере просто вычисляемыми (про вычисление значений позиционных эффектов см. [2]), что делает сравнительный анализ аукционов реализуемым на практике.

Работа организована следующим образом. В первой главе определены основные компоненты математической модели аукциона и понятие приведенной формы аукциона, которое является основным для анализа в данной работе. Здесь же дается определение эффективности резервной цены. Во второе главе определено формально понятие давление конкуренции и на базе него определен частичный порядок над аукционами. После чего собраны основные результаты об обратной зависимости эффективности резервной цены от роста уровня конкуренции.

1. Приведенная форма аукциона

Для того чтобы изучать аукцион необходимо описать модель его участников и задать правила (формат). Базовые понятия теории аукционов с более подробным описанием их свойств можно найти в [14]. Здесь кратко перечислены основные предположения, составляющие так называемую *модель независимых частных ценностей* или IPV-модель («independent private values») в симметричном случае.

1.1. УЧАСТНИКИ АУКЦИОНА

Аукционист и покупатели составляют множество участников аукциона. Множество покупателей обозначим как $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, N\}$. Для аукциониста при необходимости будем использовать индекс 0.

Предположим, что каждый участник может определить для любого товара максимальную цену, которую он согласен заплатить – *ценность*, v. Здесь без потери общности предположим, что ценность аукциониста от непроданного товара нулевая, т.е. $v_0 = 0$. Покупатели в ходе аукциона делают свои ставки b_i, а аукционист согласно заявленному формату аукциона по собранному вектору ставок $\vec{b}$ распределяет товары среди покупателей и определяет платежи.

Наиболее общим рассматриваемым здесь случаем будет многотоварный аукцион с $K \geqslant 1$ неоднородными объектами продажи, множество которых обозначим через $\mathcal{K}$. При этом будем рассматривать только случай единичного спроса среди покупателей (любой покупатель хочет или может приобрести только один объект), а для множества неоднородных объектов продажи $\mathcal{K}$ определим вектор качества товаров α, который отображает относительное качество продаваемых единиц товара друг относительно друга и определяет ценность покупателя для каждого товара.

Определение 1. *Для аукциона с K товарами и N покупателями определим вектор качества товаров $\alpha \in \mathbb{R}^N$ следующим образом.*

1) $\alpha_1 = 1$;
нормирование относительно наиболее качественного.

2) $\alpha_i \geqslant \alpha_{i+1}$;
товары упорядочены по убыванию качества.

3) $\alpha_{K+1} = \cdots = \alpha_N = 0$;
отсутствие товара эквивалентно товару с нулевым качеством.

Таким образом вектор качества α порождает естественный порядок на множестве товаров $\mathcal{K}$. При этом, ценность покупателя $i \in \mathcal{N}$ для товара с номером k определяется как произведение:

$$v_{i,k} = \alpha_k \cdot v_i,$$

где значение v_i, ценности за единицу товара, определяет тип покупателя.

Таким образом, с помощью вектора качества товаров покрываются случаи:

– $K = 1$, однотоварного аукциона;

– $\alpha_1 = \cdots = \alpha_K$, аукциона с единичным спросом и одинаковыми товарами;

– $\exists i < K : \alpha_i > \alpha_{i+1} > 0$, аукциона с единичным спросом и неоднородными товарами или позиционный аукцион.

Так как для моделирования и анализа аукционов используется теоретико-игровой подход, то важно определить, какая информация о свойствах участников (свойствах их моделей) считается общеизвестной, а какая нет.

В рамках IPV-модели информацию о правилах аукциона, о свойствах аукциониста (в нашем случае, это просто v_0), о свойствах предлагаемых товаров (вектор α) и о свойствах рынка постулируют общеизвестной. Под общеизвестными свойствами рынка здесь понимаются множество возможных типов покупателей $V = (0, \omega)$ и функция распределение типов $F(v)$ (в симметричном случае все участники описываются одинаково с помощью одной общей функции распределения), т.е.

$$\forall i \in \mathcal{N} \quad \mathrm{v}_i \in V \text{ и } \mathrm{v}_i \sim F(v).$$

При этом свойство каждого покупателя в отдельности, его конкретный тип v_i[6], известно только ему самому и никому более. В дополнение будем предполагать, что рассматриваемая функция распределения $F(v)$ имеет строго положительную плотность $f(v)$ внутри V, и что типы покупателей являются реализациями независимых друг от друга случайных величин.

1.2. ФОРМАТ АУКЦИОНА

Как уже отмечалось выше, речь пойдет лишь о симметричных аукционах, причем тех, что могут быть описаны с помощью вектора качества товаров. Вообще говоря, под такое описание подпадает достаточно обширный класс аукционов. Некоторые примеры уже были озвучены (аукцион первой и второй цены, английский аукцион) для случая одного товара. В случае многих товаров примерами аукционов, к которым применимы результаты данной работы, являются аукцион единой цены, аукцион Викри-Кларка-Гровса [7] (или VCG-аукцион) или эквивалентный ему в некотором смысле обобщенный аукцион второй цены[8] (или GSP-аукцион).

[6] *Курсивом будет всегда обозначаться конкретная реализация значения типа, то есть v_i – это конкретное значение, а v_i – случайная величина, с помощью которой моделируется представление аукциониста и прочих участников о типе участника i.*

[7] *Назван после работ [7, 9, 21], где последовательно для различных задач было дано описание эффективного механизма в квазилинейных моделях. В [15] показан более общий результат.*

[8] *Подробнее о свойствах равновесия в обобщенном аукционе второй цены, в которому все платежи эквивалентны соответствующему VCG-аукциону, см. [8].*

Таким образом, в данной работе речь пойдет про симметричные *стандартные*[9] аукционы, в которых существует симметричное и возрастающее равновесие: то есть для всех участников существует возрастающая стратегия (отображение из ценности в ставку), отклоняться от которой для любого участника не выгодно при условии, что все остальные придерживаются данной стратегии. То есть здесь и далее под словом аукцион будет всегда пониматься именно симметричный стандартный аукцион с симметричным и возрастающим равновесием. Кроме того, из дальнейшего анализа неявно будут исключены ставки покупателей, и все вычисления будут проводиться в терминах их типов. Такой прием возможен за счет известного в теории *Принципа откровенности*[10], согласно которому для любого аукциона с указанным равновесием в нем можно построить эквивалентный ему аукцион, где равновесной стратегией является правдивое раскрытие своего типа.

Определение 2. *Для аукциона по продаже K товаров с вектором качества α среди N покупателей функцией ожидаемого количества товара $q(v)$ для покупателя с типом v будем называть математическое ожидание качества товара, которое он может выиграть в ходе данного аукциона. То есть*

$$q(v) = \sum_{i=1}^{K} \alpha_i \cdot \pi_i(v),$$

где $\pi_i(v)$ есть вероятность события, заключающегося в том, что тип v оказался i-ым по величине типом среди всех N типов

[9] *Стандартным принято называть аукцион, в котором согласно его правилам участник с наибольшей ставкой получает самый ценный товар, участник со второй по величине ставкой — следующий по качеству товар, и т.д.*

[10] *Название данного принципа в русской литературе обычно переводят как «Принцип выявления» ([14, The Revelation Principle]), но понятие **откровенности** в контексте аукционов лучше отображает суть происходящего: утверждается, что можно создать условия в аукционе, согласно которым откровенно (правдиво) сообщать свой тип аукционисту будет равновесием.*

участников, то есть

$$\pi_i(v) = C_{N-1}^{i-1}(1 - F(v))^{i-1}F(v)^{N-i}.$$

Название «количество товара» в определении оправдано тем фактом, что товар №i с качеством α_i можно воспринимать как часть или долю α_i товара №1 с наибольшим качеством $\alpha_1 = 1$. То есть для каждого покупателя с типом v значение $q(v)$ есть его ожидание того, какое количество товара (качества 1) он может получить в ходе аукциона. При этом каждый такой покупатель выигрывает товары, платя за это. Известным в теории аукционов результатом является Теорема об эквивалентности доходов аукционов, которая связывает функцию ожидаемого платежа $m(v)$ участника с типом v с его функцией ожидаемого количества товара следующим образом.[11]

$$m(v) = v \cdot q(v) - \int_0^v q(s)\,ds = \int_0^v s\,dq(s). \tag{1}$$

Таким образом, пара функций $q(v)$ и $m(v)$ описывают ожидания каждого покупателя от участия в аукционе. Именно такое, сжатое по сути до одной функции $q(v)$, описание аукциона называют *приведенной формой* аукциона. Более развернутое описание всех правил аукциона здесь скрыто, и, вообще говоря, существуют различные форматы (или правила) аукционов, которые в своей приведенной форме эквивалентны друг другу.

Ожидаемый доход аукциониста также просто выражается через приведенную форму аукциона. Действительно, ожидаемый доход есть ожидание суммы платежей всех участников аукциона, то есть

$$\begin{aligned}(2)\qquad \mathbb{E} =&\mathbb{E}\sum_{i\in\mathcal{N}} m(\mathrm{v}_i) = N\int_0^\omega \int_0^v s\,dq(s)\,dF(v)\\ =&N\int_0^\omega \int_v^\omega dF(s)\,v\,dq(v) = N\int_0^\omega v(1-F(v))\,dq(v).\end{aligned}$$

[11] *Вообще говоря, данная теорема применима к более широкому классу экономических инструментов, а не только к стандартным аукционам. Подробнее см. [14, Revenue Equivalence Theorem].*

Полученные выражения становятся интуитивно понятными и естественными, если воспользоваться интерпретацией из [5]. А именно, можно мыслить про значение типа v как про цену на товар, а про вероятность того, что покупатель будет согласен на такую стоимость, $1 - F(v)$, как про количество или объем товара, на который покупатель согласен при данной стоимости (т.е. $\text{price} = v, \ \text{volume} = 1 - F(v)$). Тогда в (2) подынтегральное выражение $v(1 - F(v)) = \text{price} \cdot \text{volume}(\text{price})$ есть аналог функции общего дохода из курса микроэкономики. Только в аукционе значение ожидаемого дохода есть усредненное значение этой функции общего дохода, где усреднение проходит с весами пропорциональными вкладу текущей цены v в увеличение ожидаемого количества товара $q(v)$, которое доступно по данной цене.

1.3. ЭФФЕКТИВНОСТЬ РЕЗЕРВНЫХ ЦЕН

Резервной ценой R называется цена, ниже которой продажа товара невозможна. То есть, если некоторый покупатель i имеет тип $v_i < R$, то согласно правилам аукциона он достоверно не сможет выиграть товар. Следовательно, в терминах приведенной формы для любого покупателя, чей тип меньше установленной резервной цены, ожидаемое количество товара равно нулю:

$$\forall v < R, \quad q(v; R) = 0.$$

Причем,

$$\forall v \geqslant R, \quad q(v; R) = q(v; 0) \equiv q(v).$$

Таким образом, согласно (2), величина ожидаемой прибыли аукциониста также явно зависит от величины резервной цены посредством функции ожидаемого количества товара:

$$\mathbb{E}(R) = N \int_V v \cdot (1 - F(v))\, dq(v; R). \tag{2'}$$

Поэтому естественно положить за определение *оптимальной* резервной цены значение $R^\star$, доставляющее наибольшее значение ожидаемой прибыли:

$$R^\star = \arg\max_R \mathbb{E}(R). \tag{3}$$

Задачу оптимизации дохода будем называть *регулярной*, если функция ожидаемого дохода $\mathbb{E}(R)$ имеет только одну точку максимума, и, соответственно, $\frac{d}{dR}\mathbb{E}(R)\big|_{R=R^\star} = 0$ есть необходимое и достаточное условие для оптимальности резервной цены. Далее будем везде предполагать, что рассматриваемая функция распределения $F(v)$ порождает регулярную задачу.

Определение 3. *Эффективностью резервной цены в аукционе будем называть величину относительного прироста ожидаемой прибыли аукциониста с установленной оптимальной резервной ценой от ожидаемой прибыли аукциона без резервной цены,*

$$\rho = \frac{\mathbb{E}(R^\star)}{\mathbb{E}(0)} - 1. \tag{4}$$

Данное определение вводит меру эффективности резервной цены для некоторого аукциона. Поэтому важно определить формально, что подразумевается под аукционом здесь.

Очевидно, что резервная цена это часть правил или формата аукциона $\mathcal{A}$, согласно которым проводятся торги, определяются победители и размеры необходимых платежей. При этом детальных правил $\mathcal{A}$ не достаточно при вычислении ($2'$), значения ожидаемого дохода аукциониста: необходимо учесть свойства всех участников аукциона и предлагаемых товаров. Совокупность этих свойств будем называть *контекстом* аукциона $\mathcal{C}$. В случае симметричного аукциона контекстом будет тройка: вектор качества товаров, множество покупателей и функция распределения их типов, $\mathcal{C} = \langle \alpha, \mathcal{N}, F(v) \rangle$. В итоге полное описание конкретного аукциона представляет из себя пару $\langle \mathcal{A}, \mathcal{C} \rangle$.

Из определения (4) ясно, что при вычислении эффективности ρ, строго говоря, используются описания сразу двух аукционов $\langle \mathcal{A}, \mathcal{C} \rangle$ и $\langle \mathcal{A}', \mathcal{C} \rangle$, где отличие заключается лишь в правилах аукционов наличием или отсутствием резервной цены. В определении используется оптимальное значение резервной цены (3), которое может быть вычислено из свойств базового аукциона $\langle\mathcal{A},\mathcal{C}\rangle$. Поэтому величина эффективности резервной цены определяется на основе свойств лишь базового аукциона без резервной цены, $\rho = \rho[\mathcal{A},\mathcal{C}]$.

В данной работе при анализе различных симметричных аукционов функцию распределения типов покупателей $F(v)$ будем считать фиксированной и одинаковой для всех аукционов. Поэтому зависимость основных характеристик (например, ожидаемый платеж покупателя, значение оптимальной резервной цены или эффективность резервной цены в аукционе) от свойств модели аукционов $\langle\mathcal{A},\mathcal{C}\rangle$ вырождается в зависимость лишь от приведенной формы $q(v) \equiv q(v;0)$ этого аукциона (см. (2′)).

Утверждение 1. *Для симметричных аукционов с заданным распределением типов покупателей $F(v)$ эффективность резервной цены в этих аукционах есть функционал от их приведенной формы, $\rho[\mathcal{A},\mathcal{C}] \equiv \rho[q(v;0)]$.*

2. Резервная цена и уровень конкуренции

Неформально, хорошо известно, что эффект от резервной цены небольшой там, где конкуренция велика. Поэтому важно дать определение понятию *конкуренции в аукционе*. Во многих работах с конкуренций отождествляется просто число конкурентов.

В данной главе дается определение понятия давления конкуренции и показаны некоторые естественные его свойства. После чего на базе этого анализа определяется частичный порядок над аукционами, где согласно этому порядку факт доминирования $\langle\mathcal{A}_1,\mathcal{C}_1\rangle$ над $\langle\mathcal{A}_2,\mathcal{C}_2\rangle$ интерпретируется, как увеличение уровня конкуренции.

В заключении показано, что увеличение уровня конкуренции в аукционе приводит к снижению эффективности резервной цены, и приведены примеры возможных способов увеличения уровня конкуренции. В случае интернет-аукционов рекламы данные примеры позволяют выделять аукционы с потенциально малой эффективностью резервных цен без явного вычисления приведенной формы $q(v; 0)$.

2.1. ПОНЯТИЕ КОНКУРЕНЦИИ В АУКЦИОНЕ

Как отмечалось выше понятие конкуренции в литературе по теории аукционов использовалось неформально. При этом под увеличением конкуренции на интуитивном уровне понималось правило: *чем выше конкуренция, тем больше цены*. Поэтому здесь формальное определение понятию конкуренции будет дано таким образом, чтобы соблюсти это правило.

В работе [6] приводится сравнительный анализ генерируемой прибыли для аукционов первой цены в случаях симметричных и асимметричных покупателей. Автор анализирует, каким образом асимметрия влияет на свойства аукциона и приходит к выводу, что асимметрия сокращает так называемое давление конкуренции: более сильные участники все еще более вероятно выигрывают аукцион, но ставят ставки более сдержанно (в аукционе первой цены ставка равна платежу в случае выигрыша). Но формального определения давлению конкуренции автор не приводит.

В работах по теории отраслевых рынков существуют примеры определения давления конкуренции через ожидаемую полезность фирм. Например, в [10], [11] и [16] моделируется эффект увеличения конкуренции через сокращение ожидаемой полезности. В работе [3] дается более общее определение давления конкуренции как некоторого абстрактного параметра, котрый влияет как на уровень ожидаемой полезности, так и на величину ее наклона в точке (производной).

Перейдем к определению конкуренции в случае аукционов. Каждый покупатель обладает некоторым типом v — его ценность от обладания единицей товара. Назовем *средней стоимостью единицы товара* для покупателя с типом v отношение ожидаемого платежа к ожидаемому количеству товара:

$$pp(v) = \frac{m(v)}{q(v)}. \tag{5}$$

Тогда полезность покупателя с типом v от обладания единицей товара можно положить разницу его ценности этой единицы товара и среднюю стоимость за единицу товара:

$$u(v) = v - pp(v). \tag{6}$$

Таким образом факт увеличения конкуренции можно связать с уменьшением полезности покупателя или с увеличением средней стоимости единицы товара.

Определение 4. *Давлением конкуренции $cp(v)$ назовем производную функции среднего платежа за единицу товара, то есть*

$$cp(v) = \frac{d}{dv}pp(v) \quad \text{или} \quad pp(v) = \int_0^v cp(t)\,dt.$$

В качестве мотивации именно такого определения давления конкуренции рассмотрим следующий пример.

Пример 1. Рассмотрим случай аукциона первой цены с N покупателями, чьи ценности распределены равномерно на $[0,1]$. Тогда равновесной стратегией для покупателя с типом v будет ставить ставку равную $\frac{N-1}{N}v$, см. [14]. В силу того, что это аукцион первой цены, величина равновесной ставки является и средней стоимостью за единицу товара.

Одним из известных примеров того, как увеличивается конкуренция, является рост числа покупателей N. Легко заметить, что величина средний стоимости $\frac{N-1}{N}v$ не только увеличивается с ростом N, но увеличивается и ее угол наклона (в общем случае — производная). •

Теперь дадим определение факту «увеличения конкуренции». Наиболее интуитивно понятным и естественным способом является определение через функцию давления конкуренции, которое очевидным образом согласовывалось бы с простыми примерами аналогичными выше описанному. Но как будет показано далее, это определение можно ослабить так, что основной результат касательно эффективности резервной цены будет сохранен. Несмотря на то, что второе определение менее интуитивно понятно, оно будет использоваться в дальнейшем как основной способ описания факта «увеличения конкуренции» в аукционе.

Определение 5. *Будем говорить, что аукцион $\langle\mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1\rangle$ доминирует аукцион $\langle\mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2\rangle$ в смысле давления конкуренции и обозначать $\langle\mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1\rangle \succ_{cp} \langle\mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2\rangle$, если*

$$\forall v, \quad cp_1(v) \geqslant cp_2(v).$$

Определение 6. *Будем говорить, что аукцион $\langle\mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1\rangle$ доминирует аукцион $\langle\mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2\rangle$ в смысле уровня конкуренции и обозначать $\langle\mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1\rangle \succ_{cl} \langle\mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2\rangle$, если отношение их функций ожидаемого количества товара не убывает*[12]*, то есть*

$$\frac{d}{dv}\frac{q_1(v)}{q_2(v)} \geqslant 0.$$

В дальнейшем под выражением «увеличение уровня конкуренции» будет пониматься некоторое изменение в свойствах конкретного аукциона, приведшее к тому, что новый аукцион стал доминировать исходный аукцион в смысле уровня конкуренции. Примеры того, какие изменения в свойствах аукциона может приводить к «увеличению уровня конкуренции» , будут показаны ниже.

Следующий результат показывает, что оба определения доминирования приводят к тому, что средняя стоимость в первом аукционе больше, чем в аукционе с «меньшей конкуренцией».

Лемма 1.

1) $\langle\mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1\rangle \succ_{cp} \langle\mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2\rangle \;\Rightarrow\; \langle\mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1\rangle \succ_{cl} \langle\mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2\rangle.$

2) $\langle\mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1\rangle \succ_{cl} \langle\mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2\rangle \;\Rightarrow\; \forall v,\ pp_1(v) \geqslant pp_2(v).$

Доказательство. Докажем сначала второе утверждение. Для этого распишем среднюю стоимость $pp_1(v)$ следующим образом.

$$pp_1(v) = \frac{m_1(v)}{q_1(v)} = v - \frac{\int_0^v q_1(t)\,dt}{q_1(v)}.$$

[12] *Или иными словами распределение $q_1(v)$ стохастически доминирует распределение $q_2(v)$ в смысле обратной функции отказов, см. [14].*

Условие доминирования в смысле уровня конкуренции означает, что отношение $q_1(v)/q_2(v)$ не убывает по v. Это значит, что $\forall t < v$ верно неравенство: $q_1(t)/q_1(v) \leqslant q_2(t)/q_2(v)$. А значит такое же неравенство верно и для их интегралов по $t < v$, то есть $\int_0^v q_1(t)/q_1(v)\,dt \leqslant \int_0^v q_2(t)/q_2(v)\,dt$. Следовательно

$$pp_1(v) \geqslant pp_2(v).$$

Теперь докажем первую часть леммы. Согласно определению условие $\langle \mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1 \rangle \succ_{cp} \langle \mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2 \rangle$ можно переписать следующим образом.

$$\forall v, \qquad \frac{d}{dv}\frac{m_1(v)}{q_1(v)} \geqslant \frac{d}{dv}\frac{m_2(v)}{q_2(v)}.$$

Распишем производную средней стоимости с учетом (1).

$$\frac{d}{dv}\frac{m_1(v)}{q_1(v)} = \frac{d}{dv}\frac{\int_0^v t\,dq_1(t)}{q_1(v)} = \frac{q_1'(v)}{q_1(v)}v - \frac{q_1'(v)}{q_1(v)}\frac{m_1(v)}{q_1(v)}$$

. То есть мы получили, что

$$cp_1(v) = \frac{q_1'(v)}{q_1(v)}(v - pp_1(v)) = \frac{q_1'(v)}{q_1(v)}u_1(v).$$

Но, если $cp_1(v) \geqslant cp_2(v)$, то их интегралы будут также упорядочены, то есть $pp_1(v) \geqslant pp_2(v)$ или $u_2(v)/u_1(v) \geqslant 1$. А значит верно следующее.

$$cp_1(v) \geqslant cp_2(v) \;\Rightarrow\; \frac{q_1'(v)}{q_1(v)} \geqslant \frac{q_2'(v)}{q_2(v)}\frac{u_2(v)}{u_1(v)} \geqslant \frac{q_2'(v)}{q_2(v)}.$$

Что и требовалось доказать.

Данные определения доминирования порождают лишь частичный порядок над множеством аукционов. При этом более слабым доминированием является доминирование в смысле уровня конкуренции. Причем, только что показали, что в случае этого доминирования верно, что $q_2(v) > q_1(v)$, $pp_1(v) > pp_2(v)$ и что $q_2(v) - q_1(v)$ монотонно убывает по v. Иными словами, там где уровень конкуренции больше, цены больше, вероятность получить единицу товара меньше, и с ростом вашего типа v разница в вероятностях получить товар монотонно убывает.

2.2. ЗАВИСИМОСТЬ $\rho[\mathcal{A}, \mathcal{C}]$ ОТ УРОВНЯ КОНКУРЕНЦИИ

Определив отношение частичного порядка для аукционов в смысле уровня конкуренции, можно показать следующий результат об эффективности резервных цен в различных аукционах.[13]

Теорема 1.

$$\langle \mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1 \rangle \succ_{cl} \langle \mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2 \rangle \quad \Rightarrow \quad \rho[\mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1] < \rho[\mathcal{A}_2, , \mathcal{C}_2].$$

Доказательство.
Напомним, что $\mathbb{E}(R) = N \int_V (v)\, dq(v; R)$, где $(v) = v \cdot (1 - F(v))$. А оптимальная резервная цена есть оптимум ожидаемого дохода аукциониста, $R^\star = \arg\max \mathbb{E}(R)$. В силу предполагаемой регулярности задачи имеем, что $\mathbb{E}(R)$ имеет лишь один оптимум, который является решением уравнения $\frac{d}{dR}(R^\star) = 0$. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dR}\mathbb{E}(R) = N \left(\frac{d}{dR}\left((R) \cdot q(R; 0)\right) + \frac{d}{dR} \int_R^\omega (v)\, dq(v; 0) \right) \\ = N \left('(R) q(R; 0) + (R) q'(R; 0) - (R) q'(R; 0) \right) \\ = N \cdot' (R) \cdot q(R; 0) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, регулярность задачи – это выпуклость вверх функции общего дохода (v). То есть на интервале $(0, R^\star)$ функция (v) растет, а на оставшейся части $(R^\star, \omega)$ – убывает.

[13] *Здесь важно заметить, что в рассматриваемых аукционах функция распределения типов участников зафиксировано, то есть $F_1 = F_2$. Поэтому в силу определения* (3) *оптимальные значения резервных цен в обоих аукционах будут одинаковыми, $R_1^\star = R_2^\star$.*

Теперь рассмотрим эффективность резервной цены в аукционе $\langle\mathcal{A},\mathcal{C}\rangle$ согласно определению:

$$\rho[\mathcal{A},\mathcal{C}] = \frac{N\int_V (v)\,dq(v;R^\star) - N\int_V (v)\,dq(v;0)}{N\int_V (v)\,dq(v;0)}$$
$$= \frac{(R^\star)q(R^\star;0) + \int_{R^\star}^{\omega}(v)\,dq(v;0) - \int_0^{\omega}(v)\,dq(v;0)}{\int_V (v)\,dq(v;0)}$$
$$= \frac{(R^\star)q(R^\star;0) - \int_0^{R^\star}(v)\,dq(v;0)}{\int_V (v)\,dq(v;0)} = \frac{\int_0^{R^\star} q(v;0)\,d(v)}{-\int_0^{\omega} q(v;0)\,d(v)}$$
$$= \frac{\int_0^{R^\star} q(v;0)\,d(v)}{\int_{R^\star}^{\omega} q(v;0)\,d(-(v)) - \int_0^{R^\star} q(v;0)\,d(v)}.$$

Далее будем везде использовать обозначения: $q(v) = q(v;0)$, $\rho_1 = \rho[\mathcal{A}_1,\mathcal{C}_1]$ и $\rho_2 = \rho[\mathcal{A}_2,\mathcal{C}_2]$, $q_1 = q[\mathcal{A}_1,\mathcal{C}_1]$ и $q_2 = q[\mathcal{A}_2,\mathcal{C}_2]$. Причем в силу того, что для обоих случаев распределение $F(v)$ фиксировано и регулярно, то соответствующая функция общего дохода также фиксирована и регулярна. А значит значения оптимальных резервных цен совпадают, то есть $R_1^\star = R_2^\star = R^\star$, что в нерегулярном случае невсегда истинно.

Для краткости введем следующие обозначения для соответствующих интегралов: $\forall i \in \{1,2\},\ l_i = \int_0^{R^\star} q_i(v)\,d(v)$ и $r_i = \int_{R^\star}^{\omega} q_i(v)\,d(-(v))$. Причем легко увидеть, что $\forall i \in \{1,2\},\ l_i \geqslant 0,\ r_i \geqslant 0$ и $r_i \geqslant l_i$. Тогда,

$$\rho_1 = \frac{l_1}{r_1 - l_1} \quad \text{и} \quad \rho_2 = \frac{l_2}{r_2 - l_2}.$$

В этом случае задачу сравнения значений ρ_1 и ρ_2 можно свести к задаче сравнения l_1/l_2 и r_1/r_2 следующим образом.

$$\rho_1 < \rho_2 \;\Leftrightarrow\; \frac{l_1}{r_1 - l_1} < \frac{l_2}{r_2 - l_2} \;\Leftrightarrow\; \frac{l_1}{l_2} < \frac{r_1 - l_1}{r_2 - l_2} \;\Leftrightarrow\; \frac{l_1}{l_2} < \frac{r_1}{r_2}.$$

По предположению теоремы $\langle\mathcal{A}_1,\mathcal{C}_1\rangle \succ_{cl} \langle\mathcal{A}_2,\mathcal{C}_2\rangle$, то есть внутри интервала $V = [0,\omega]$ выполнено $q_1(v) < q_2(v)$ и

$q_1(v) = \gamma(v) \cdot q_2(v)$, где функция $\gamma(v)$ монотонно возрастает (как и каждая из $q_1(v)$ и $q_2(v)$). Тогда

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{\int_0^{R^\star} q_1(v)\,d(v)}{\int_0^{R^\star} q_2(v)\,d(v)} = \frac{\int_0^{R^\star} \gamma(v) q_2(v)\,d(v)}{\int_0^{R^\star} q_2(v)\,d(v)} < \frac{\int_0^{R^\star} \gamma(R^\star) q_2(v)\,d(v)}{\int_0^{R^\star} q_2(v)\,d(v)} = \gamma(R^\star);$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\int_{R^\star}^{\omega} q_1(v)\,d(v)}{\int_{R^\star}^{\omega} q_2(v)\,d(v)} = \frac{\int_{R^\star}^{\omega} \gamma(v) q_2(v)\,d(v)}{\int_{R^\star}^{\omega} q_2(v)\,d(v)} > \frac{\int_{R^\star}^{\omega} \gamma(R^\star) q_2(v)\,d(v)}{\int_{R^\star}^{\omega} q_2(v)\,d(v)} = \gamma(R^\star).$$

Таким образом имеем, что

$$\langle \mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1 \rangle \succ_{cl} \langle \mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2 \rangle \quad \Rightarrow \quad \frac{l_1}{l_2} < \gamma(R^\star) < \frac{r_1}{r_2} \quad \Leftrightarrow \quad \rho_1 < \rho_2,$$

что и требовалось доказать.

Итак, с ростом уровня конкуренции эффективность резервной цены как инструмента в увеличении ожидаемой прибыли падает. Таким образом, если знать, от чего уровень конкуренции может увеличиться в том или ином аукционе, то становится ясно, в каких ситуациях резервная цена может быть практически полезна, а в каких нет.

Утверждение 2.

В аукционах с ме́ньшим уровнем конкуренции резервная цена более эффективна, чем в аукционах с бо́льшим уровнем конкуренции.

2.3. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ КОНКУРЕНЦИЮ СВОЙСТВА АУКЦИОНА

Важной характеристикой контекста аукциона является вектор качества товаров α. Для того, чтобы продемонстрировать пример, какие свойства в аукционе влияют на уровень конкуренции, рассмотрим случай, когда вектор качества товаров можно описать тройкой параметров, $\langle N, K, q\rangle$, следующим образом.

$$\begin{aligned} &\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N), \\ &\forall i > K, \quad \alpha_i = 0, \\ &\forall i \leqslant K, \quad \alpha_{i+1} = q\alpha_i \ \ (0 < q \leqslant 1). \end{aligned}$$

Таким образом, вектор α, определенный через тройку $\langle N, K, q\rangle$, описывает случай аукциона по продаже K товаров с N покупателями, где качество товаров дисконтируется на постоянный знаменатель q.

Для таких векторов качества товаров рассмотрим два контекста аукциона $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$, отличающихся лишь своими векторами качества товаров α_1 и α_2 соответственно (на самом деле в общем случае будут отличаться и множества покупателей $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$, но для симметричных аукционов значима лишь разница в числе покупателей, что входит в описание свойств α). Определим следующим образом частичный порядок над такими контекстами с помощью их векторов качества товаров.

Определение 7.
Пусть даны два контекста аукциона, $\mathcal{C}_1 = \langle \alpha_1, \mathcal{N}_1, F(v)\rangle$ *и* $\mathcal{C}_2 = \langle \alpha_2, \mathcal{N}_2, F(v)\rangle$, *где* $\alpha_1 = \langle N_1, K_1, q_1\rangle$ *и* $\alpha_2 = \langle N_2, K_2, q_2\rangle$.

Тогда будем говорить, что $\mathcal{C}_1$ *доминирует* $\mathcal{C}_2$ *по вектору качества товаров* ($\mathcal{C}_1 \succ_\alpha \mathcal{C}_2$), *если выполнено одно из следующих условий:*

(*i*) $N_1 > N_2,\ K_1 = K_2,\ q_1 = q_2$;

(*ii*) $N_1 = N_2,\ K_1 < K_2,\ q_1 = q_2$;

(*iii*) $N_1 = N_2,\ K_1 = K_2,\ q_1 < q_2$;

Тогда для двух аукционов $\langle \mathcal{A}, \mathcal{C}_1\rangle$ и $\langle \mathcal{A}, \mathcal{C}_2\rangle$ можно показать, что порядок по уровню конкуренции согласуется с порядком над их контекстами.

Лемма 2.

$$\mathcal{C}_1 \succ_\alpha \mathcal{C}_2 \quad \Rightarrow \quad \langle \mathcal{A}, \mathcal{C}_1\rangle \succ_{cl} \langle \mathcal{A}, \mathcal{C}_2\rangle.$$

Доказательство. Доказательство будет происходит в три этапа, соответствующих трем различным случаям из определения доминирования по вектору качества товаров. Начнем со второго пункта — увеличение числа объектов продажи.

Введем явное обозначение зависимости от числа объектов K для функции ожидаемого количества товаров через $q^K(v)$ (ниже, такое явное обозначение зависимости от изменяемого параметра будет использоваться повсеместно). Тогда, необходимо показать, что отношение $q^{K-1}(v)/q^K(v)$ не убывает по v. Распишем детально это отношение.

$$\frac{q^{K-1}(v)}{q^K(v)} = \frac{\sum_{i=1}^{K-1} \alpha_i C_{N-1}^{i-1}(1-F(v))^{i-1}F(v)^{N-i}}{\sum_{i=1}^{K} \alpha_i C_{N-1}^{i-1}(1-F(v))^{i-1}F(v)^{N-i}}$$
$$= \left(1 + \frac{\alpha_K C_{N-1}^{K-1}(1-F(v))^{K-1}F(v)^{N-K}}{\sum_{i=1}^{K-1} \alpha_i C_{N-1}^{i-1}(1-F(v))^{i-1}F(v)^{N-i}}\right)^{-1}$$
$$= \left(1 + \alpha_K C_{N-1}^{K-1}\left(\sum_{i=1}^{K-1} \alpha_i C_{N-1}^{i-1}\left[\frac{F(v)}{1-F(v)}\right]^{K-i}\right)^{-1}\right)^{-1}.$$

Заметим, что отношение $F(v)/(1-F(v))$ есть функция неубывающая, поэтому в силу только что полученного представления отношение $q^{K-1}(v)/q^K(v)$ — не убывающее по v функция.

Теперь рассмотрим случай двух разных векторов качества товаров: α и β. Напомним следующее правило, которое будет активно использоваться.

$$\forall b > 0,\ \forall d > 0, \quad \frac{a}{b} \geqslant \frac{a+c}{b+d} \ \Leftrightarrow\ \frac{a}{b} \geqslant \frac{c}{d}.$$

Доказательство неубывания отношения $q^\beta(v)/q^\alpha(v)$ будем показывать методом индукции по числу объектов. Для удобства слагаемые вида $C_{N-1}^{i-1}(1-F(v))^{i-1}F(v)^{N-i}$ будем обозначать как π_i.

Напомним, что для обоих векторов α и β верно, что $\alpha_1 = \beta_1 = 1$. В качестве базы индукции рассмотрим случай с двумя товарами. Покажем, что

$$(7) \qquad \frac{(\pi_1(v)+\beta_2\pi_2(v))'}{\pi_1(v)+\beta_2\pi_2(v)} \geqslant \frac{(\pi_1(v)+\alpha_2\pi_2(v))'}{\pi_1(v)+\alpha_2\pi_2(v)}.$$

Для этого, заметим, что в силу доказанного свойства относительно изменения числа объектов продажи, мы знаем, что $\forall\alpha$ справедливо следующее утверждение.

$$\frac{\pi_1'(v)}{\pi_1(v)} \geqslant \frac{(\pi_1(v)+\alpha_2\pi_2(v))'}{\pi_1(v)+\alpha_2\pi_2(v)}.$$

А значит, верно, что $\pi_1'(v)/\pi_1(v) \geqslant \pi_2'(v)/\pi_2(v)$ или эквивалентно $\pi_1'(v)\pi_2(v) \geqslant \pi_2'(v)\pi_1(v)$.

Тогда, преобразовав следующим образом выражение в (7),

$$(\alpha_2-\beta_2)\pi_1'(v)\pi_2(v) \geqslant (\alpha_2-\beta_2)\pi_2'(v)\pi_1(v)$$

получаем, что достаточным условием на коэффициенты будет: $\beta_2 < \alpha_2$.

Теперь предположим, что для некоторого числа $K-1$ объектов выполнено предположение индукции:

$$\frac{(\sum_{i=1}^{K-1}\beta_i\pi_i(v))'}{\sum_{i=1}^{K-1}\beta_i\pi_i(v)} \geqslant \frac{(\sum_{i=1}^{K-1}\alpha_i\pi_i(v))'}{\sum_{i=1}^{K-1}\alpha_i\pi_i(v)}.$$

Если для краткости использовать вместо $\sum_{i=1}^{K-1}\beta_i\pi_i(v)$ и $\sum_{i=1}^{K-1}\alpha_i\pi_i(v)$ обозначения A и B соответственно, то для завершения доказательства достаточно показать, что верно следующее утверждение:

$$(8) \qquad \frac{B'+\beta_K\pi_K'}{B+\beta_K\pi_K} \geqslant \frac{A'+\alpha_K\pi_K'}{A+\alpha_K\pi_K}.$$

Для этого предположим, что оно верно и найдем достаточное условие на коэффициенты, из следующих эквивалентных преобразований.

$$B'A+\beta_K\pi_K'A+\alpha_K B'\pi_K \geqslant A'B+\alpha_K\pi_K'B+\beta_K A'\pi_K$$

$$\frac{B'}{B} + \frac{\alpha_K \beta_K}{AB} \pi_K \left[\frac{B'}{\beta_K} - \frac{A'}{\alpha_K} \right] \geqslant \frac{A'}{A} + \frac{\alpha_K \beta_K}{AB} \pi'_K \left[\frac{B}{\beta_K} - \frac{A}{\alpha_K} \right]$$

По предположению индукции первые слагаемые из последнего неравенства упорядочены нужным образом. Осталось показать, что выполнено следующее неравенство.

$$\pi_K \left[\frac{B'}{\beta_K} - \frac{A'}{\alpha_K} \right] \geqslant \pi'_K \left[\frac{B}{\beta_K} - \frac{A}{\alpha_K} \right]$$

или, что тоже самое,

$$\frac{\left[\frac{B'}{\beta_K} - \frac{A'}{\alpha_K} \right]}{\left[\frac{B}{\beta_K} - \frac{A}{\alpha_K} \right]} \geqslant \frac{\pi'_K}{\pi_K}.$$

Заметим, что выражение слева представляет из себя выражение типа C'/C для $K-1$ объектов, где $C = \sum_i c_i \pi_i$, но с другими коэффициентами: $c_i = \beta_i/\beta_K - \alpha_i/\alpha_K$. Это неравенство будет истинным в силу доказанного свойства об изменении числа объектов продажи, если коэффициенты c_i будут упорядочены по убыванию и неотрицательны по значению. Достаточным условием для этого является следующая система неравенств:

$$\forall i \; : \; 1 \leqslant i \leqslant K-1, \qquad \frac{\beta_{i+1}}{\beta_i} \leqslant \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}. \tag{9}$$

Данное свойство заведомо выполнено, если знаменатель последовательности β меньше знаменателя у α.

Последним пунктом докажем требуемое свойство неубывания отношения функций ожидаемого количества товара при увеличении числа покупателей. Для этого удобно ввести обозначение $q_N^{\alpha_{\{i\}}}(v)$ для функции ожидаемого количества товара в аукционе с N покупателями, где на продажу выставлено некоторое фиксированное число товаров с соответствующим вектором качества α (обозначение $\alpha_{\{i\}}$ используется для удобства, чтобы в дальнейшем через обозначение $\alpha_{\{i+1\}}$ ссылаться на вектор качества товаров $\mathcal{K}_{-1}$ без первого, наиболее качественного товара

(α_1): то есть новый вектор образован из оригинального α соответствующим сдвигом в начало последовательности элементов, начиная со второго).

Тогда для того, чтобы доказать доминирование аукциона с большим числом покупателей в смысле уровня конкуренции, необходимо и достаточно показать, что выполнено следующее неравенство:

$$q_N^{\alpha\{i\}} \cdot \frac{d}{dv} q_{N+1}^{\alpha\{i\}} - q_{N+1}^{\alpha\{i\}} \cdot \frac{d}{dv} q_N^{\alpha\{i\}} \geqslant 0.$$

Для доказательства этого неравенства заметим, что для функции $q_N^{\alpha\{i\}}(v)$ справедливо следующее рекурентное выражение.

$$q_N^{\alpha\{i\}}(v) = q_{N-1}^{\alpha\{i\}}(v) F(v) + q_{N-1}^{\alpha\{i+1\}}(v)(1 - F(v)). \tag{10}$$

Используя указанное рекурентное правило для $q_{N+1}^{\alpha\{i\}}(v)$ левая часть проверяемого неравенства преобразуется следующим образом.

$$\begin{gathered} F(v) q_N^{\alpha\{i\}} \cdot \frac{d}{dv} q_N^{\alpha\{i\}} + (1 - F(v)) q_N^{\alpha\{i\}} \cdot \frac{d}{dv} q_N^{\alpha\{i+1\}} \\ + f(v) q_N^{\alpha\{i\}} \left[q_N^{\alpha\{i\}} - q_N^{\alpha\{i+1\}} \right] \\ - F(v) q_N^{\alpha\{i\}} \cdot \frac{d}{dv} q_N^{\alpha\{i\}} - (1 - F(v)) q_N^{\alpha\{i+1\}} \cdot \frac{d}{dv} q_N^{\alpha\{i\}} \end{gathered}$$

Легко увидеть, что первое и четвертое слагаемые взаимно уничтожаются, что выражение в квадратных скобках неотрицательно (функция ожидаемого количества товара для случая множества товаров $\mathcal{K}$ не меньше, чем ее аналог для случая множества $\mathcal{K}_{-1}$), и что разница $q_N^{\alpha\{i\}} \cdot \frac{d}{dv} q_N^{\alpha\{i+1\}} - q_N^{\alpha\{i+1\}} \cdot \frac{d}{dv} q_N^{\alpha\{i\}}$ неотрицательна в силу доказанного свойства при уменьшении числа объектов.

Таким образом, неубывание отношения функций ожидаемого количества товара в трех различных случаях условия леммы было показано. Что и требовалось доказать.

Для наглядности рассмотрим численные эксперименты с последовательностью различных аукционов, в которых уровень конкуренции монотонно рос, затем уменьшался и вновь увеличивался за счет поочередного изменения разных свойств аукциона: числа конкурентов N, числа объектов продажи K и величины знаменателя дисконтирования этих объектов q . Как мы уже знаем, эффективность резервной цены в такой последовательности должна меняться в противоположных направлениях.

Пример 2. Зафиксируем вид функции распределения типов возможных покупателей как равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Для каждого значения вектора α_i из $\mathcal{C}_i$ будем устраивать VCG-аукцион (то есть правила $\mathcal{A}$ фиксированы) и следить за значением эффективности резервной цены $\rho_i = \rho[\mathcal{A}, \mathcal{C}_i]$ в зависимости от меняющегося контекста.

Последовательность значений векторов α_i организуем следующим образом:

(i) Начиная с 1 товара и 2 покупателей будем увеличивать число покупателей до 10, то есть

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = (1, 0),\\
&\alpha_2 = (1, 0, 0),\\
&\dots\\
&\alpha_9 = (1, 0, 0, \dots, 0);
\end{aligned}$$

(ii) Зафиксировав число покупателей, будем увеличивать по одному число торгуемых товаров, то есть

$$\begin{aligned}
&\alpha_{10} = (1, 1, 0, \dots, 0, 0, 0),\\
&\alpha_{11} = (1, 1, 1, \dots, 0, 0, 0),\\
&\dots\\
&\alpha_{15} = (1, 1, 1, \dots, 1, 0, 0);
\end{aligned}$$

(iii) Введем дискриминирующий фактор качества $q \in (0, 1)$, и будем последовательно ужесточать этот фактор (устремлять

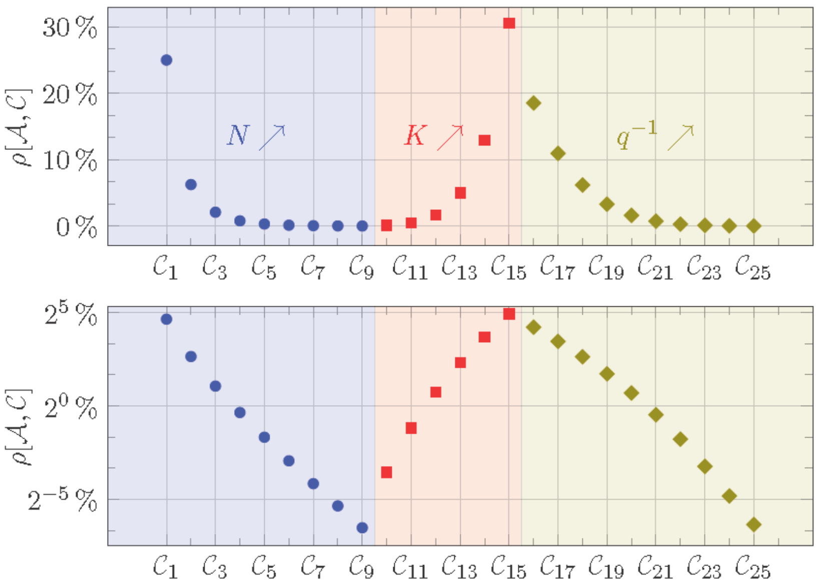

Рис. 2. Численные результаты расчетов эффективности резервных цен в последовательности аукционов.

к нулю), то есть

$$\begin{aligned}
&\alpha_{16} = (1, q_1, \ldots, q_1^7, 0, 0),\\
&\alpha_{17} = (1, q_2, \ldots, q_2^7, 0, 0),\\
&\ldots\\
&\alpha_{25} = (1, q_{10}, \ldots, q_{10}^7, 0, 0),
\end{aligned}$$

где $q_1 = 0,9, q_2 = 0,8, \ldots, q_9 = 0,1, q_{10} = 0,01$.

Таким образом определенная последовательность будет обладать следующим свойством:

$$\begin{aligned}
&\forall i : 1 \leqslant i < 10, \quad \mathcal{C}_{i+1} \succ_\alpha \mathcal{C}_i,\\
&\forall i : 10 \leqslant i < 16, \quad \mathcal{C}_i \succ_\alpha \mathcal{C}_{i+1},\\
&\forall i : 16 \leqslant i < 25, \quad \mathcal{C}_{i+1} \succ_\alpha \mathcal{C}_i.
\end{aligned}$$

На рис. 2 в десятичной и логарифмической шкалах показаны результаты численных расчетов для эффективности резервных цен в аукционах $\langle \mathcal{A}, \mathcal{C}_i \rangle$, где на оси абсцисс отмечены соответствующие контексты. Полученные результаты согласуются с теоретическими результатами. Кроме того на графиках явно заметна разница в скорости изменения эффективности резервной цены при различных способах варьирования контекста. ●

Заключение

В данной работе получен ответ на практический вопрос: когда оптимизация дохода аукциониста с помощью резервной цены эффективна? Чтобы получить ответ, достаточно изучить свойства приведенной формы аукциона. На основе проделанного анализа определен частичный порядок над аукционами по их уровню конкуренции, что обобщает существующую в литературе концепцию конкуренции. Удалось установить факт обратной зависимости эффективности резервной цены от уровня конкуренции. Данный результат показывает универсальный способ сравнения широкого класса аукционов по эффективности резервной цены в них.

При рассмотрении частного примера интернет-аукционов рекламы показано, что не только количество покупателей определяет уровень конкуренции, но и количество доступных рекламных позиций, и их относительное качество также монотонно влияют на итоговый уровень конкуренции. Интернет реклама на тематических интернет-страницах размещается с самыми разными значениями этих свойств. Поэтому полученные здесь результаты для позиционного аукциона представляют из себя простые (а значит практичные!) критерии по отбору тех интернет-аукционов, где резервные цены могут быть полезны.

Литература

1. ИЗМАЛКОВ С.Б., ЛЕВИН М.В., ТОПИНСКИЙ В.А., ХАКИМОВА Д.А. *Эксперимент по внедрению резервной це-*

ны в аукционах контекстной рекламы. – ООО «Яндекс», мимеограмма, 2014. – 21 с.

2. ARKHANGELSKY D., IZMALKOV S., KHAKIMOVA D. *On evaluation of CTRs of different positions in sponsored search auctions*. Poster / 14th ACM Conference on Electronic Commerce. – 2013. – [Электронный ресурс] – URL: http://www.newmediacenter.ru/wp-content/uploads/2013/05/DDS_v6.pdf (дата обращения 25.07.2014)
3. BOONE J. *Competitive pressure: the effects on investments in product and process innovation* // The RAND Journal of Economics. – 2000. – Vol. 31, № 3. – P. 549–569.
4. BORDER K.C. *Implementation of reduced form auctions: A geometric approach* // Econometrica: Journal of the Econometric Society. – 1991. – Vol. 59, № 4. – P. 1175–1187.
5. BULOW J., ROBERTS J. *The Simple Economics of Optimal Auctions* // Journal of Political Economy. – 1989. – Vol. 97, №. 5. – P. 1060–90.
6. CANTILLON E. *The effect of bidders' asymmetries on expected revenue in auctions* // Games and Economic Behavior. – 2008. – Vol. 62, №. 1. – P. 1–25.
7. CLARKE E.H. *Multipart pricing of public goods* // Public choice. – 1971. – Vol. 11, № 1. – P. 17–33.
8. EDELMAN B., OSTROVSKY M., SCHWARZ M. *Internet advertising and the generalized second price auction: Selling billions of dollars worth of keywords* // American Economic Review. – 2007. – Vol. 97, № 1. – P. 242–259.
9. GROVES T. *Incentives in teams* //Econometrica. – 1973. – Vol. 41, № 4. – P. 617–631.
10. HART O.D. *The market mechanism as an incentive scheme* // The Bell Journal of Economics. – 1983. – Vol. 14, № 2. – P. 366–382.
11. HERMALIN B.E. *Heterogeneity in organizational form: Why otherwise identical firms choose different incentives for their managers* // The RAND Journal of Economics. – 1994. – Vol. 25, № 4. – P. 518–537.

12. HONG H., SHUM M. *Increasing competition and the winner's curse: Evidence from procurement* // The Review of Economic Studies. — 2002. — Vol. 69, № 4. — P. 871–898.
13. HOTCHKISS G., ALSTON S., EDWARDS G. *Eye tracking study* – Research white paper, Enquiro Search Solutions Inc, 2005. – 106 p.
14. KRISHNA V. *Auction theory.* — Academic press, 2009. – 336 p.
15. KRISHNA V., PERRY M. *Efficient Mechanism Design.* — Pennsylvania State University, mimeo. — 2000. – 23 p.
16. MARTIN S. *Endogenous firm efficiency in a Cournot principal-agent model* // Journal of Economic Theory. — 1993. — Vol. 59, № 2. — P. 445–450.
17. MYERSON R. *Optimal auction design* // Mathematics of Operations Research. — 1981. — Vol. 6, № 1. — P. 58–73.
18. OSTROVSKY M., SCHWARZ M. *Reserve prices in internet advertising auctions: A field experiment.* — Stanford GSB, working paper, 2009. – 19 p.
19. PAARSCH H.J., HONG H. *An introduction to the structural econometrics of auction data.* — The MIT Press, 2006. – 448 p.
20. RILEY J.G., SAMUELSON W.F. *Optimal auctions* // The American Economic Review. — 1981. — Vol. 73, № 1. — P. 381–392.
21. VICKREY W. *Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders* // The Journal of finance. — 1961. — Vol. 16, № 1. — P. 8–37.

RESERVE PRICE EFFICIENCY AND COMPETITIVE PRESSURE IN AUCTIONS

Valery Topinsky, Yandex LLC, Moscow; CSDSI NES, Moscow (topinsky@gmail.com).

Abstract: In this paper I analyze the reserve price efficacy of an auction, that is the relative value of the expected revenue increase induced by the optimal reserve price. I define the competitive pressure in an auction and the notion of one auction dominance over another auction in terms of competition level. After that I prove that the reserve price efficacy decays with respect to the increase of competition level. Finally I provide some examples of auction attributes, which monotonically affect the competition level.

Keywords: reserve price, revenue optimization, competition, competitive pressure, symmetric auctions, position auction.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Д. А. Новиковым

.

Поступила в редакцию 03.04.2014.
Опубликована 31.07.2014.