УДК 519.179.2
ББК 22.176 + 65.23

АНАЛИТИКО-ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБОБЩЕННЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СЕТЕВЫХ ГРАФИКОВ

Иванов Н. Н.[1]
(*ФГБУН Институт проблем управления РАН, Москва*)

Для обобщенного стохастического сетевого графика с заданной многомерной плотностью распределения времен прохождения дуг предложена методика аналитико-имитационного моделирования, имеющего целью вычисление вероятностей реализации всех критических путей, функции распределения и первых двух моментов времени выполнения графика. Методика основана на построении систем неравенств, описывающих соотношения между временами прохождения дуг.

Ключевые слова: стохастический сетевой график, критический путь, моменты распределения времени прохождения путей, метод Монте-Карло.

1. Введение

Сетевые графики (графы), существующие уже более полувека (PERT, [6]), служат для моделирования сложных взаимосвязанных временных процессов, таких как выполнение проектной документации, строительство зданий, сборочных процессов, процессов выполнения в реальном времени управляющих программ в вычислительных системах и т.п. Созданные первоначально в предположении о том, что времена прохождения отдельных дуг (activity), входящих в сетевой график, являются

[1] *Николай Николаевич Иванов, доктор технических наук, доцент* (*ivanov.nni@yandex.ru*).

детерминированными величинами, в настоящее время они рассматривается в более общих предположениях, связанных со случайными временами прохождения дуг с известными распределениями [2]. Такие графы получили название стохастических сетевых графиков (Stochastic Networks).

В отличие от классического понятия стохастического сетевого графика, в работе рассматривается его обобщенный вариант, названный обобщенным стохастическим сетевым графиком (ОССГ) и имеющий своим отличием допущение в качестве дисциплины возникновения события (возбуждения некоторой вершины), помимо стандартной, при которой событие наступает после прохождения всех дуг, входящих в соответствующую данному событию вершину (дисциплина «И»), альтернативной дисциплины «ИЛИ», которой соответствует возбуждение вершины в результате прихода первой (по времени) из входящих в нее дуг.

В литературе сетевые графики, подобные рассматриваемым в статье, носят название альтернативных сетевых моделей (АСМ). Подробное описание их классификации в зависимости от дисциплин возникновения в них событий содержится, например, в [2], в соответствии с которой рассматриваемые в работе сетевые графики содержат вершины типов $\tilde{x}$ и $\tilde{\beta}$.

Вторым отличием ОССГ от классического сетевого графика является допущение о том, что случайные времена прохождения дуг могут быть взаимозависимыми и описываться, соответственно, многомерными распределениями.

Для разработчиков параллельных вычислительных систем (ВС), управляющих объектами в реальном времени по программам, структурированным в виде ОССГ, методика может служить инструментом анализа временно́й надежности при условии, что в ВС имеется достаточное число параллельных каналов, необходимое для выполнения управляющих программ без образования очередей. При этом по совокупности критических путей в ОССГ, вероятностей и функций распределения времени их прохождения может быть решен вопрос о минимальном времени выполнения программы с вероятностью единица, о максимальном времени выполнения программы с заданной вероятностью, а также найдены числовые вероятностные характеристики времени выполнения программ.

Для ОССГ время его выполнения является случайной величиной, закон распределения и числовые вероятностные характеристики которой могут быть оценены с помощью имитационных методов в совокупности со статистическими методами обработки результатов имитации. В работе в продолжение подхода, изложенного в [4] по отношению к стохастическим сетевым графикам, в которых на входе в вершины наличествует только дисциплина «И», предлагается аналитико-имитационный метод нахождения функции распределения времени выполнения и числовых вероятностных характеристик ОССГ, основанный на достаточном для этих целей уровне его детализации в виде совокупности всех его путей. При этом не требуется построение глобальной имитационной модели ОССГ, функционирующей в непрерывном модельном времени.

2. Основы анализа модели

На графе ОССГ выделим вершины, в которые входит более одной дуги. Такие вершины назовем *узлами* ОССГ. Путь на графе ОССГ – это последовательность дуг, начинающаяся в (единственной) начальной вершине и заканчивающаяся в (единственной) заключительной, при этом каждая дуга пути, кроме дуги, исходящей из начальной вершины, является последователем предыдущей. Любой путь на графе ОССГ проходит по крайней мере через один узел.

Критическим называется путь **П**, который реализуется без временных задержек, т.е. инициализация очередной дуги происходит немедленно по окончании прохождения предшествующей, при этом время прохождения этого пути определяет время выполнения всего ОССГ (его завершение означает, что в ОССГ произошло заключительное событие, на рис. 1 этому событию соответствует вершина, помеченная номером 5).

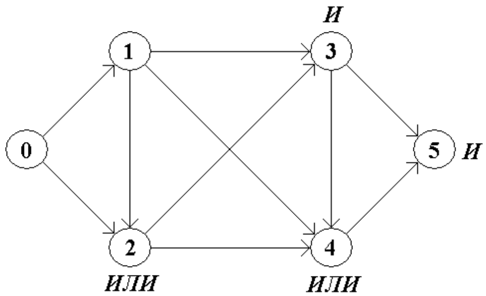

Рис. 1. Пример ОССГ

В ОССГ, в отличие от детерминированных сетевых графиков, возможно существование нескольких критических путей, реализуемых с определенной вероятностью, но во время одной реализации возможен только *единственный* критический путь (исключение можно сделать лишь для графиков с дискретными распределениями). При этом все остальные дуги, не входящие в критический путь **П**, проходятся параллельно («на фоне») дугам из **П** так, что завершение прохождения дуг-предшественников любого узла, через который проходит путь **П**, произойдет либо раньше для узлов типа «И», либо позже для узлов типа «ИЛИ», чем будет пройдена дуга-предшественник этого узла, принадлежащая **П**.

Критический путь определяет время окончания выполнения всего ОССГ, поэтому, зная вероятности p_i, с которыми реализуются все критические пути, и условные (при условии, что выбранные пути являются критическими) математические ожидания μ_i и вторые моменты a_{2i} времени их выполнения, можно вычислить все интересующие пользователя числовые характеристики ОССГ:

$$\mu = \sum_i p_i \mu_i\ ,\ a_2 = \sum_i p_i a_{2i}\ ,\ d = a_2 - \mu^2 .$$

Для ОССГ, приведенного на рис. 1, множество всех путей $\tilde{\mathbf{\Pi}}$ образуется следующими цепочками дуг, проходящих через вершины, обозначенные их номерами:

1) 0, 1, 2, 3, 4, 5;

2) 0, 1, 2, 3, 5;
3) 0, 1, 2, 4, 5;
4) 0, 1, 3, 4, 5;
5) 0, 1, 3, 5;
6) **0, 1, 4, 5;**
7) 0, 2, 3, 4, 5;
8) **0, 2, 3, 5;**
9) 0, 2, 4, 5.

В этом списке выделены пути 6 и 8, которые ниже будут служить примером применения предлагаемой методики анализа ОССГ.

Определение. Для всякого пути $\mathbf{\Pi} \in \tilde{\mathbf{\Pi}}$ будем называть его замыкающей любую последовательность непосредственно связанных друг с другом дуг, не принадлежащих пути **П**, которая начинается от какой-либо вершины пути **П** и заканчивается дугой, ведущей в узел, через которую проходит путь **П**.

Заметим, что замыкающими в соответствии с введенным определением могут стать целые пути, у которых с **П** нет общих дуг и узлов, кроме конечного.

Для пути 8 замыкающими будут пути: (01, 12), (01, 14, 45), (24, 45), (34, 45) и (01, 13) (здесь дуги обозначены номерами вершин, соединяемых ими).

Суть предлагаемой методики состоит в том, что для каждого пути может быть составлена система неравенств, выполнение которой при заданном наборе значений времен прохождения дуг является необходимым и достаточным условием реализуемости данного пути в качестве критического. Для рассматриваемого пути 8 эти неравенства сведутся к следующей системе, в которой совокупность неравенств, охваченных слева квадратной скобкой, соответствует всем возможным вариантам замыкающих, проходящих через вершину 4 типа «ИЛИ»:

$$\begin{cases} x_{02} < x_{01} + x_{12}, \\ \left[\begin{array}{l} x_{23} + x_{35} > x_{24} + x_{45}, \\ x_{02} + x_{23} + x_{35} > x_{01} + x_{14} + x_{45}, \\ x_{35} > x_{34} + x_{45}, \end{array}\right. \\ x_{02} + x_{23} > x_{01} + x_{13}. \end{cases}$$

Здесь x_{ij} обозначает время прохождения дуги, исходящей из вершины с номером i и входящей в вершину с номером j. Слева в неравенствах фигурируют суммы времен прохождения дуг замыкаемого участка рассматриваемого пути, а справа – суммы времен прохождения дуг его замыкающей. Знак неравенства при этом соответствует типу замыкаемого узла.

Свод правил, по которым составляются неравенства для всего ОССГ, состоит из следующих пунктов:

1) Все системы и совокупности составляются для каждого пути.

2) Для каждого пути выявляются узлы, через которые он проходит.

3) Для каждого узла находятся все замыкающие, в него входящие.

4) Определяются группы замыкающих, не содержащих узлов, а также группы замыкающих, проходящих через каждый узел, ближайший к узлу, на котором происходит замыкание.

5) Для каждой такой группы составляются системы или совокупности неравенств, регламентирующих временные соотношения между замыкающими и замыкаемыми участками пути, по следующим правилам:

− неравенства, которые определяются замыкающими, не содержащими узлов, объединяются в систему;

− если типы замыкаемого узла и узла, ближайшего для данной группы совпадают, то неравенства, определяемые замыкающими из этой группы, объединяются в систему, в противном случае неравенства объединяются в совокупность.

6) Для замыкающих некоторой группы находятся узлы, ближайшие к уже рассмотренному узлу, и для них повторяются действия в соответствии с п.п. 4–5 в предположении, что пред-

шествующий узел проходится немедленно в результате прихода в него дуги, являющейся продолжением последовательностей дуг, которые входят в группу. В результате внутри системы или совокупности могут образоваться подсистемы или подсовокупности.

7) Данные действия проводятся до тех пор, пока новых узлов у замыкающих не окажется.

8) Все структуры неравенств для каждого узла, на котором происходит замыкание, и для всего пути объединяются в общую систему с учетом правил: система систем есть система, совокупность совокупностей есть совокупность. Для всего ОССГ построенные таким образом для отдельных путей системы или совокупности объединяются в совокупность.

Пункты 4–7 этих правил можно считать корректными на основе следующих рассуждений. Ниже под длиной участка некоторого пути подразумевается время его прохождения без задержек в промежуточных вершинах.

Пусть некоторая замыкающая L пути **П**, входящая в узел замыкания $\mathbf{У}_1$, содержит в себе узел $\mathbf{У}_2$. Тогда замыкающими пути **П** будут также все последовательности дуг, исходящие из вершин пути **П**, входящие в $\mathbf{У}_2$ и имеющие общее продолжение с L. Обозначим это множество замыкающих через M.

Утверждение. 1) Если узлы $\mathbf{У}_1$ и $\mathbf{У}_2$ – разноименные, то неравенства, определяемые всеми замыкающими, входящими в M, образуют совокупность.

2) Если узлы $\mathbf{У}_1$ и $\mathbf{У}_2$ – одноименные, то неравенства, определяемые всеми замыкающими, входящими в M, образуют систему.

Доказательство см. в приложении.

Проиллюстрируем введенные правила на ряде примеров.

Так, выше для пути 8 в приведенной системе первое неравенство соответствует узлу 2, совокупность соответствует узлу 5 и нижнее неравенство – узлу 3.

Рассмотрим структуру неравенств, составленную для узла 4 типа «ИЛИ», входящего в путь 6 (01, 14, 45). В данный узел входят пять замыкающих: (02, 24), (12, 24), (02, 23, 34), (12, 23, 34) и (13, 34). Первых две замыкающих в этом ряду проходят только через узел 2 типа «ИЛИ» и по этой причине в соответствии с утверждением, приведенным выше, образуют систему

$$\begin{cases} x_{01} + x_{14} < x_{02} + x_{24}, \\ x_{14} < x_{12} + x_{24}. \end{cases}$$

Следующие три замыкающих проходят через узел 3 типа «И» (ближайший к рассматриваемому узлу 4 типа «ИЛИ») и, следовательно, определяют неравенства, входящие в совокупность

$$\left[\begin{array}{l} x_{14} < x_{13} + x_{34}, \\ x_{14} < x_{12} + x_{23} + x_{34}, \\ x_{01} + x_{14} < x_{02} + x_{23} + x_{34}. \end{array}\right.$$

Но при этом две последних замыкающих (12, 23, 34) и (13, 34) проходят также через узел 2 типа «ИЛИ», находящийся ниже узла 3, что заставляет внутри совокупности образовать подсистему, поскольку типы узлов 2 и 4 совпадают:

$$\left[\begin{array}{l} x_{14} < x_{13} + x_{34}, \\ \begin{cases} x_{14} < x_{12} + x_{23} + x_{34}, \\ x_{01} + x_{14} < x_{02} + x_{23} + x_{34}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Таким образом, для узла 4 пути 6 структура неравенств будет таковой:

$$\begin{cases} x_{01} + x_{14} < x_{02} + x_{24}, \\ x_{14} < x_{12} + x_{24}, \\ \left[\begin{array}{l} x_{14} < x_{13} + x_{34}, \\ \begin{cases} x_{14} < x_{12} + x_{23} + x_{34}, \\ x_{01} + x_{14} < x_{02} + x_{23} + x_{34}. \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

Теперь составленные для всех улов структуры неравенств объединяются в систему, выполнение которой является необходимым и достаточным условием реализации выбранного пути 6 в качестве критического:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
x_{01} + x_{14} < x_{02} + x_{24}, \\
x_{14} < x_{12} + x_{24}, \\
\left[
\begin{array}{l}
x_{14} < x_{13} + x_{34}, \\
\left\{
\begin{array}{l}
x_{14} < x_{12} + x_{23} + x_{34}, \\
x_{01} + x_{14} < x_{02} + x_{23} + x_{34},
\end{array}
\right.
\end{array}
\right. \\
\left[
\begin{array}{l}
x_{01} + x_{14} + x_{45} > x_{02} + x_{23} + x_{35}, \\
x_{14} + x_{45} > x_{12} + x_{23} + x_{35},
\end{array}
\right. \\
x_{14} + x_{45} > x_{13} + x_{35}.
\end{array}
\right.
$$

Следует отметить, что в частном случае существования в ОССГ только узлов типа «И» или «ИЛИ» структура неравенств существенно упростится, поскольку для каждого пути неравенства будут образовывать систему без совокупностей, как это имело место в [4].

3. Аналитико-имитационное моделирование ОССГ

Построенная в соответствии с введенными правилами совокупность систем неравенств может служить основой для различных вычислительных и имитационных процедур с целью нахождения параметров ОССГ, интересующих пользователя. К числу таковых может быть, в частности, отнесено: а) вычисление функции распределения времени выполнения ОССГ при заданных законах распределения времен прохождения как отдельных дуг в случае независимости этих времен, так и в случае задания многомерных распределений для времен прохождения некоторых множеств дуг вплоть до многомерной функции времен распределения всего набора дуг, б) вычисление числовых вероятностных характеристик – вероятности реализации критических путей, математического ожидания и среднеквадратического отклонения, как времени прохождения отдельных критических путей, так и всего ОССГ в целом.

В этом разделе рассматривается методика вычисления соответствующих вероятностных характеристик применительно к случаю зависимости времен прохождения всех дуг, входящих в сетевой график. Это означает, что задана соответствующая многомерная функция распределения времени прохождения дуг $F(\bar{u}) = F(u_1, \dots, u_m)$ (или плотность $f(\bar{u})$), где m – общее число дуг сетевого графика. Более простые случаи зависимости времен прохождения дуг могут рассматриваться аналогичным образом.

Используя алгоритм построения множества $\tilde{\mathbf{\Pi}}$ всех путей орграфа, упорядочим их в произвольном порядке.

Выбирая некоторый (i-й) путь $\mathbf{\Pi} \in \tilde{\mathbf{\Pi}}$, рассмотрим сумму случайных времен прохождения всех его дуг:

$$\zeta = \sum_j \zeta_j .$$

Пусть $D \subset R_+^l = \{(x_1, x_2, \dots, x_l) : x_k \in R, x_k \geq 0\}$ – область, в которой отличны от нуля маргинальные плотности распределений времен прохождения дуг, входящих во все замыкающие пути $\mathbf{\Pi}$ (нумерация работ произвольная).

Отсюда, если $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_l)$ представляет собой случайный вектор в области D, составленный из случайных времен прохождения дуг, входящих во все замыкающие пути $\mathbf{\Pi}$, то фиксируя его значение $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_l) \in D$, следует считать, что вероятность p_i реализации пути $\mathbf{\Pi}$ зависит от $\bar{x}$: $p_i = p_i(\bar{x})$. Тогда

$$p_i F_i(z \mid \bar{\xi} = \bar{x}) = p_i(\bar{x}) F_\zeta(z \mid \bar{\xi} = \bar{x}) .$$

Взвешенная условная функция распределения $p_i(\bar{x}) F_\zeta(z \mid \bar{\xi} = \bar{x})$ суммы $\zeta = \sum_j \zeta_j$ случайных величин $\zeta_1, \dots, \zeta_s$ может быть вычислена в соответствии с равенством

$$(*) \quad p_i(\bar{x}) F_\zeta(z \mid \bar{\xi} = \bar{x}) = \int_B f(\bar{y}, \bar{x})\, d\bar{y} ,$$

где область B определяется следующими условиями.

Во-первых, область B должна содержаться в области

$$A = \{\bar{y} : \sum_j y_j < z, y_j \geq 0\} \subset R_+^s ,$$

по которой определяется распределение суммы

$$\zeta = \sum_j \zeta_j \ .$$

Во-вторых, на область B накладываются ограничения, определяемые замыкающими в виде соответствующей данному пути структуры неравенств.

Используя теперь интегральную формулу полной вероятности, из равенства (*) получаем:

(1) $$p_i F_i(z) = \int_D \int_B f(\bar{y}, \bar{x})\, d\bar{y}\, d\bar{x} \ .$$

Вычисление получившихся интегралов в конечном виде возможно только в некоторых простейших случаях. В общем случае вычисления интегралов целесообразно проводить с привлечением метода Монте-Карло. Один из возможных вариантов применения этого метода при вычислении интегралов, подобных (1), описан в [4]. Здесь отметим лишь особенность этой методики, заключающуюся в том, что для ее реализации не требуется использование генераторов случайных векторов в соответствии с заданной многомерной плотностью распределения.

Из соотношения (1) может быть получено значение вероятности p_i реализации каждого пути в ОССГ: достаточно выбрать по возможности минимальное значение $z = T$, для которого вычисление $p_iF_i(z)$ в соответствии с (1) приводит к равенству $p_iF_i(T) = p_i$. Такое значение $z = T$ существует, если времена прохождения дуг заданы на конечных промежутках. Например, можно положить T равным сумме всех правых концов промежутков, на которых определены маргинальные плотности распределений времен прохождения всех дуг рассматриваемого пути.

Вычисление моментов распределения $F(z)$ может проводиться несколькими способами: во-первых, численным интегрированием по значениям функции $F(z)$, если она вычислена в достаточном числе точек, например, с помощью формулы Симпсона в соответствии с равенствами

$$\mu = \int_0^T [1 - F(z)]dz = T - \int_0^T F(z)\,dz \ ,$$

$$a_2 = 2\int_0^T z\left[1 - F(z)\right]dz = T^2 - 2\int_0^T z\,F(z)\,dz\,.$$

Во-вторых, имитационным методом с использованием генераторов случайных векторов по заданным плотностям распределения. В случае независимых времен прохождения дуг создание такого генератора не вызывает трудностей. Для многомерных плотностей в общем случае можно использовать метод исключения [3], что потребует нахождения верхней грани (лучше точной, что не всегда просто) многомерной плотности. Однако при большом числе переменных координат случайного вектора эффективность этого метода не слишком велика и стремится к нулю при $n \to \infty$, где n – размерность вектора.

Для нормальных плотностей, заданных значениями математических ожиданий компонент и положительно определенными корреляционными матрицами, достаточно воспользоваться методом, основанным на построении изотропного вектора. Эффективность метода также стремится к нулю при $n \to \infty$, поэтому целесообразно генерацию вектора проводить, разбивая множество координат вектора на группы. Рекомендовано разбивать это множество на пары [3, 5]. Отметим также, что эффективность генерации несколько снижается при необходимости отсечения «крыльев» гауссовых кривых с целью недопущения генерации отрицательных координат нормальных векторов, а также при введении некоторого уровня значимости с целью ограничения промежутков, на которых задаются координаты этих векторов. Однако следует отметить, что подобный метод генерации случайных векторов не может быть использован при произвольных многомерных распределениях.

Координаты каждого случайного вектора, полученного в результате генерации одним из описанных методов, подставляются в структуры неравенств, составленных для каждого пути в ОССГ. Если подстановка происходит в соответствии с некоторым установленным порядком для путей, то после того как выясняется, что для некоторого пути неравенства выполняются, дальнейшие подстановки для других путей становятся излишними. Это обусловлено тем, что выполнение неравенств является необходимым и достаточным условием реализуемости этого пути в качестве критического, и в силу единственности критического пути в каждой реализации ОССГ. По этой причине целесообразно устанавливать такой порядок рассмотрения путей, при котором на первых позициях стоят пути с наибольшей вероятностью. Можно, например, установить этот порядок, проведя предварительные вычисления с помощью соотношения (1) вероятностей критических путей при небольшом числе статистических «прогонов».

4. Пример

В качестве примера применения предложенного метода рассмотрим моделирование ОССГ, представленного на рис. 1. Моделирование производилось для многомерных нормальных распределений, заданных наборами средних значений и корреляционными матрицами при уровнях значимости, определяемых «правилом трех сигм» (m_{ij} представляют собой в условных единицах математические ожидания времен прохождения дуг, соединяющих вершины с номерами i и j):

$m_{01} = m_{12} = m_{23} = m_{34} = m_{35} = m_{45} = 3,$

$m_{02} = m_{14} = m_{24} = 4{,}243,$

$m_{13} = 6,$

$$K_{01,02,23} = K_{34,24,45} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 2 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$K_{12,13,14,35} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \\ -0{,}5 & -2 & 2 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для всех десяти векторов использовалось моделирование с генерацией пяти двумерных изотропных векторов. Эти векторы позволили моделировать один четырехмерный и два трехмерных нормально распределенных вектора с параметрами $m = 0$ и $\sigma = 1$ с независимыми компонентами, из которых затем с помощью линейных преобразований вида $X = AY + \boldsymbol{m}$ [3], определяемых с помощью корреляционных матриц, строились соответствующие векторы из случайных времен прохождения дуг ОССГ. Треугольные матрицы преобразований имели вид:

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5\sqrt{7} & 0 \\ -0,5 & -0,5/\sqrt{7} & 0,5\sqrt{3-1/7} \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ -0,5 & -0,5\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0,5 & -\sqrt{3}/6 & 0,5 & 0,5\sqrt{5/3} \end{bmatrix}.$$

Применение альтернативного метода исключения сопровождалось предварительным построением многомерных нормальных плотностей по соответствующим векторам математических ожиданий и корреляционным матрицам, которое можно осуществлять, например, с использованием алгоритма, приведенного в [1]. Для таких многомерных плотностей легко определяются их точные верхние грани.

Результаты моделирования, полученные в среде Delphi 7 на ПК, оборудованном процессором Intel Core i3 2100, 3,1 ГГц, ОЗУ 4 ГБ представлены в таблице 1. Время счета при числе прогонов $N = 5 \cdot 10^6$ составило величины 5 *с* при генерации нормальных векторов с помощью изотропных векторов (второй столбец таблицы) и 80 *с* при использовании метода исключения (третий столбец). Значения числовых параметров ОССГ оказались в обоих случаях равными и составили величины $m = 12,515$ и $\sigma = 1,934$ условных единиц времени.

Таблица 1. Значения вероятностей критических путей

Путь	p_i	p_i
1	0,6817	0,6816
2	0,0024	0,0025
3	0,0922	0,0921
4	0,0440	0,0440
5	0,0185	0,0184
6	0,0029	0,0029
7	0,0984	0,0984
8	0,0584	0,0586
9	0,0015	0,0015

Как видно из таблицы 1, результаты моделирования практически совпадают, однако генерация случайных векторов первым способом показала себя более эффективной, что и отразилось на затрачиваемом времени счета.

Отметим также, что непосредственное имитационное моделирование рассматриваемого ОССГ, проводившееся с целью получения только оценок величин m и σ без вычисления оценок вероятностей критических путей, математических ожиданий и вторых моментов времени их прохождения, требовало практически одно и то же время счета (при одинаковых методах генерации случайных векторов), что и при использовании метода моделирования, предложенного в статье. Это указывает на то, что основное время счета в обоих случаях тратилось на моделирование случайных векторов.

5. Заключение

На основе предлагаемой в работе детализации ОССГ в виде множества всех его путей и процедуры построения систем и совокупностей неравенств, регламентирующих соотношения времен прохождения дуг ОССГ в рамках каждого пути, показано, как может производиться аналитическое и имитационное исследование ОССГ с целью получения интересующих пользователя его вероятностных параметров. Изложенная методика анализа ОССГ построена на регулярной основе, позволяющей широко использовать машинные средства для поиска критических путей, составления для каждого пути множества замыкающих и соответствующих им структур неравенств, а также проводить численный анализ получаемого при этом функционального описания исследуемого ОССГ.

Автор выражает благодарность О.П. Кузнецову и его сотрудникам за ценные замечания, сделанные ими при обсуждении работы.

6. ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения. 1) Пусть узел **У**$_1$ типа «И», а узел **У**$_2$ типа «ИЛИ». Событие, связанное с узлом **У**$_2$, происходит, когда в него входит первой по времени некоторая замыкающая $\tilde{L}$ из множества *M*. Длина *l* участка пути **П**, отсчитываемая от начальной вершины до узла **У**$_1$, будет удовлетворять условию $l \geq l'$, где l' – длина $\tilde{L}$, также отсчитываемая от начальной вершины. Но для других замыкающих из множества *M* аналогичные неравенства выполняться не обязаны, поскольку их длины, отсчитываемые от начальной вершины, больше l'. Таким образом, из всех неравенств, определяемых замыкающими из множества *M*, во внимание должно приниматься только одно, определяемое замыкающей $\tilde{L}$. Это означает, что все неравенства, определяемые замыкающими из множества *M*, должны рассматриваться под знаком совокупности.

Пусть теперь узел **У**$_1$ типа «ИЛИ», а узел **У**$_2$ типа «И» и $\tilde{L}$ – замыкающая, приходящая последней по временем в узел **У**$_2$. Длина *l* участка пути **П**, отсчитываемая от начальной вершины до узла **У**$_1$, будет удовлетворять условию $l \leq l'$, где l' – длина $\tilde{L}$, также отсчитываемая от начальной вершины. Но для других замыкающих из множества *M* аналогичные неравенства выполняться не обязаны, поскольку их длины, отсчитываемые от начальной вершины, меньше l'. Таким образом, из всех неравенств, определяемых замыкающими из множества *M*, во внимание должно приниматься только одно, определяемое замыкающей $\tilde{L}$. Это означает, что все неравенства, определяемые замыкающими из множества *M*, должны рассматриваться под знаком совокупности.

2) Пусть оба узла **У**$_1$ и **У**$_2$ типа «ИЛИ». Событие, связанное с узлом **У**$_2$, происходит, когда в него входит первой по времени некоторая замыкающая $\tilde{L}$ из множества *M*. Длина l участка пути **П**, отсчитываемая от начальной вершины до узла **У**$_1$, будет удовлетворять условию $l \le l'$, где l' – длина $\tilde{L}$, также отсчитываемая от начальной вершины. Но длины l'' аналогичных участков всех остальных замыкающих из множества *M* могут быть только больше l', и, следовательно, всегда $l \le l''$. Это означает, что должны выполняться все неравенства, определяемые замыкающими из множества *M*, и, следовательно, они должны рассматриваться под знаком системы.

Пусть теперь оба узла **У**$_1$ и **У**$_2$ типа «И». Событие, связанное с узлом **У**$_2$, происходит, когда в него входит последней некоторая замыкающая $\tilde{L}$ из множества *M*. Длина l участка пути **П**, отсчитываемая от начальной вершины до узла **У**$_1$, будет удовлетворять условию $l \ge l'$, где l' – длина $\tilde{L}$, также отсчитываемая от начальной вершины. Но длины l'' аналогичных участков всех замыкающих из множества *M* могут быть только меньше l', и, следовательно, всегда $l \ge l''$. Это означает, что должны выполняться все неравенства, определяемые замыкающими из множества *M*, и они должны рассматриваться под знаком системы. Утверждение доказано.

Литература

1. ВЕНТЦЕЛЬ Е.С., ОВЧАРОВ Л.А. *Теория вероятности и ее инженерные приложения.* – М.: Наука, 1988. – 480 с.
2. ГОЛЕНКО-ГИНЗБУРГ Д.И. *Стохастические сетевые модели планирования и управления разработками*. – Воронеж: Научная мысль, 2010. – 283 с.

3. ЕРМАКОВ С.М., МИХАЙЛОВ Г.А. *Статистическое моделирование*. – М.: Наука, 1982. – 296 с.
4. ИВАНОВ Н.Н., ШАСТУН В.В. *Определение точных верхних оценок времени выполнения сложных наборов задач в управляющих параллельных вычислительных системах* // Автоматика и телемеханика. – 2010. – №9. – С. 174–184.
5. МАРТЫШЕНКО С.Н., МАРТЫШЕНКО Н.С., КУСТОВ Д.А. *Моделирование многомерных данных и компьютерный эксперимент* // Техника и технология. – 2007. – №2. – С. 47–52.
6. CLARK C.E. *The PERT model for the distribution of an activity* // Operations Research. – 1962. – Vol. 10(3), – P. 405–406.

ANALYTICAL AND SIMULATION MODELS OF GENERALIZED STOCHASTIC NETWORKS

Nikolay Ivanov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, ivanov.nni@yandex.ru).

Abstract: *For a generalized stochastic network schedule with a given multi-dimensional distribution of arcs passage time we propose the analytical- and simulation-based routines to calculate the probability of all critical paths, the distribution function and the first two moments of the project completion time. The routines are based on a specially constructed system of inequalities binding the task completion times.*

Keywords: stochastic network, critical path, moments of task completion time distribution, the Monte Carlo method.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В.Н. Бурковым

Поступила в редакцию 13.11.2014.
Опубликована 31.01.2015.