УДК 519.853.3
ББК 22.18

ДЕКОМПОЗИЦИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПОТРЕБЛЕНИЯ НА ДИСКРЕТНОМ РЫНКЕ[1]

Соловьев А. И.[2]
(*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва*)

Рассмотрена многопериодная дискретная модель рынка, описываемого деревом сценариев без самопересечений. Инвестор максимизирует ожидаемую полезность потребления в течение конечного периода времени. Предлагаются декомпозиционные схемы решения задач оптимального потребления со степенной и логарифмической функциями полезности, которые позволяют свести решение основной задачи к решению нескольких однопериодных задач.

Ключевые слова: безарбитражный рынок, неполный рынок, задача оптимального потребления, дерево сценариев, динамическое программирование, выпуклое программирование.

Введение

Задача максимизации функции полезности на дискретных неполных рынках вызывает затруднения по нескольким причинам. Сложность задач выпуклого программирования очень быстро увеличивается с ростом числа переменных и ограничений. В случае задач оптимального потребления это объясняется свободой выбора портфеля ценных бумаг и неопределенностью поведения финансового рынка. Таким образом, решение рассматрива-

---

[1] *Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 14–01–91163а. Автор выражает благодарность своему научному руководителю к.ф.-мs.н., доценту В. В. Морозову за помощь в написании данной работы.*

[2] *Алексей Игоревич Соловьев, аспирант,* (*alex.solo.88@mail.ru*).

емых задач в изначальной постановке является неэффективным. Мартингальный подход позволяет сначала определить оптимальный план потребления и затем соответствующие этому плану портфели, но неполнота рынка усложняет поиск оптимального потребления.

Проблемы оптимального потребления на дискретных рынках рассматривались во многих работах. Плиска [6] разработал критерий допустимости процесса потребления на полных рынках. Он предложил три основных метода решения задач оптимального потребления: динамический и мартингальный подходы и метод введения фиктивных бумаг. Хэ и Пирсон [3], используя крайние точки множества цен, обеспечивающих отсутствие арбитража, свели основную динамическую задачу к статической. Бушар и Фам [1] рассмотрели дискретные неполные финансовые рынки с пропорциональными транзакционными издержками. Оптимальные процессы потребления и инвестирования найдены, опираясь на теорию двойственности. Эренфрид [2] нашел аналитический вид решения задач для моделей потребления с логарифмической, степенной и экспоненциальной функциями полезности. Он предполагает рынок полным, дисконтирующий фактор определяется состоянием рынка. В работе используются марковские процессы принятия решений.

Дискретная задача оптимального потребления с возможностью инвестирования близка задаче хеджирования платежного обязательства [5]. Модель финансового рынка, описанная в настоящей статье, введена Кингом в работе [4]. Им доказан критерий существования оптимального решения в задачах максимизации полезности.

Раздел 2 данной работы посвящен описанию модели. В разделе 3 формулируется основная задача, и устанавливаются ее эквивалентные формы. Описан метод динамического программирования для нахождения оптимального потребления в задачах со степенной и логарифмической функциями полезности.

1. Описание модели

На рынке обращаются $d+1$ видов ценных бумаг, имеющих номера $j = 0, 1, ..., d$. Актив с номером 0 имеет положительную стоимость и считается безрисковым, он выбирается дисконтирующим. Пусть неотрицательный вектор $X_n = \left(X_n^0, ..., X_n^d\right)$ обозначает дисконтированные цены бумаг по отношению к безрисковому активу в состоянии рынка n. Его компонента X_n^0 равна 1 для любого состояния n.

Множество состояний $\mathcal{N}$ разбито на попарно непересекающиеся подмножества состояний $\mathcal{N}_t$, в которые рынок может перейти в моменты времени $t = 0, ..., T$. Множество $\mathcal{N}_0$ состоит из единственной корневой вершины дерева, обозначаемой 0. Пусть $a(n)$ обозначает единственную вершину из множества $\mathcal{N}_{t-1}$, предшествующую вершине $n \in \mathcal{N}_t$, $t = 1, ..., T$. Положим также $a^0(n) = n$, $a^s(n) = a^{s-1}(a(n))\ \forall n \in \mathcal{N}_t$, $s = 1, ..., t$. Множество всех прямых потомков вершины $n \in \mathcal{N}_t$, $t = 0, ..., T-1$, обозначим через $\mathcal{C}(n) \subset \mathcal{N}_{t+1}$. Пусть $\mathcal{D}(n)$ – множество всех следующих за n вершин дерева. Рынок моделируется деревом без самопересечений. Это значит, что каждой концевой вершине (листу) дерева соответствует единственный путь, ведущий к ней из корневой вершины. Эти пути образуют вероятностное пространство элементарных событий Ω. Множество $\mathcal{N}_t$ делит пространство Ω на подмножества (события), определяемые вершинами $n \in \mathcal{N}_t$, и состоящие из всех путей, содержащих n. Совокупность этих событий порождает алгебру $\mathcal{F}_t$. При этом $\mathcal{F}_0 = \{0, \Omega\} \subset \mathcal{F}_1 \subset ... \subset \mathcal{F}_T$.

Вероятностная мера $p = (p_n,\, n \in \mathcal{N})$ на Ω приписывает листьям дерева вероятности $p_n > 0$, $\sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n = 1$. Вероятности для всех промежуточных вершин определяются рекурсивно: $p_n = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} p_m$, $\forall n \in \mathcal{N} \backslash \mathcal{N}_T$. Заметим, что $p_0 = 1$. Будем считать, что мера p задает истинные (статистические) вероятности событий. Она однозначно определяется по вероятностному распределению $p_T = (p_n,\, n \in \mathcal{N}_T)$.

Вероятностная мера $q = (q_n,\, n \in \mathcal{N})$ эквивалентная p

$(q_n > 0, \forall\, n \in \mathcal{N})$ называется мартингальной, если

(1) $$q_m X_m = \sum_{n \in \mathcal{C}(m)} q_n X_n,\ \forall\, m \in \mathcal{N}_t,\ t = 0, ..., T-1.$$

Пусть Q – множество всех мартингальных мер. Будем рассматривать согласованные с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t\}$ процессы вида $b = \{b_t\}$, где случайная величина b_t принимает значения b_n, $n \in \mathcal{N}_t$, и, следовательно, $\mathcal{F}_t$-измерима. Из (1) следует, что процесс приведенной стоимости $\{X_t^j\}$ каждой j-й бумаги является q-мартингалом.

Предположим, в каждом состоянии рынка $n \in \mathcal{N}$ инвестор формирует портфель $\theta_n = \left(\theta_n^0, ..., \theta_n^d\right)$, где θ_n^j – количество бумаг j-го вида, $j = 0, 1, ..., d$. Приведенная стоимость портфеля θ_n равна $X_n \cdot \theta_n$ – скалярное произведение векторов X_n и θ_n. Пусть $c_n \geqslant 0$ – объем средств, потребляемых инвестором в состоянии $n \in \mathcal{N}$. Стратегией инвестора назовем пару (c, θ), где процесс потребления $c = \{c_t\}$ и портфельный процесс $\theta = \{\theta_t\}$ удовлетворяют условию самофинансирования

(2) $$X_n \cdot \theta_{a(n)} = X_n \cdot \theta_n + c_n, \forall\, n \in \mathcal{N}_t,\ t = 1, ..., T.$$

Пусть v – начальный капитал инвестора. Предположим, что его функция полезности $u\,(x)$ возрастает и строго вогнута. В этом случае инвестору следует тратить весь свой начальный капитал и использовать все конечные сбережения. Поэтому можно ограничиться стратегиями, удовлетворяющими условиям $v = X_0 \cdot \theta_0 + c_0$ и $X_n \cdot \theta_n = 0, \forall\, n \in \mathcal{N}_T$.

Говорят, что рынок допускает арбитражную возможность, если инвестор, не вкладывая средств в ценные бумаги, может не остаться должником в каждом из возможных состояний рынка и получить прибыль с ненулевой вероятностью. Известно [6], что на безарбитражных рынках существует мартингальная мера, и она единственна на полных рынках. В данной статье рассматриваются безарбитражные неполные рынки.

2. Основная задача

Инвестор выбирает стратегию, максимизирующую суммарную ожидаемую полезность потребления в течение T периодов торгов. Сформулируем исходную задачу

$$\max_{(c,\theta)} \sum_{n\in\mathcal{N}} p_n u\left(c_n\right)$$

(3) $$\begin{cases} X_n \cdot \theta_{a(n)} = X_n \cdot \theta_n + c_n, & \forall\, n \in \mathcal{N}_t,\ t = 1, ..., T \\ v = X_0 \cdot \theta_0 + c_0, & \\ X_n \cdot \theta_n = 0, & \forall\, n \in \mathcal{N}_T \\ c_n \geqslant 0, & \forall\, n \in \mathcal{N}. \end{cases}$$

Следующая теорема доказана в [6] для полных рынков.

Теорема 1. *Ограничения задачи (3) эквивалентны следующим:*

(4) $$\sum_{n\in\mathcal{N}} q_n c_n = v,\ \forall\, q \in Q,\ c_n \geqslant 0,\ \forall\, n \in \mathcal{N}.$$

Доказательство. Возьмем произвольную мартингальную меру $q \in Q$ и домножим на q_n левые и правые части условия самофинансирования. Сложим все равенства системы ограничений, в результате имеем $\sum_{n\in\mathcal{N}} q_n c_n = v, \forall\, q \in Q$.

Обратно, пусть c удовлетворяет условиям (4). Покажем, что найдется процесс θ, удовлетворяющий ограничениям задачи (3). Система уравнений

(5) $$\begin{cases} -X_0 \cdot \theta_0 = -v + c_0, & \\ X_n \cdot \theta_{a(n)} - X_n \cdot \theta_n = c_n, & \forall\, n \in \mathcal{N}_t,\ t = 1, ..., T \\ X_n \cdot \theta_n = 0, & \forall\, n \in \mathcal{N}_T \end{cases}$$

разрешима относительно θ по альтернативе Фредгольма. Действительно, любая мартингальная мера $q \in Q$ является решением сопряженной к (5) однородной системы

(6) $$\textstyle\sum_{n\in\mathcal{C}(m)} X_n q_n = X_m q_m,\ \forall\, m \in \mathcal{N}\backslash\mathcal{N}_T$$

и ортогональна правой части системы (5).

$$(c_0 - v) + \sum_{n\in\mathcal{N}\backslash\{0\}} q_n c_n = \sum_{n\in\mathcal{N}} q_n c_n - v = 0.$$

Нетрудно показать, что любое решение (6) принадлежит линейной оболочке множества мартингальных мер и, поэтому, также ортогонально правой части системы (5). ■

Таким образом, задача (3) эквивалентна следующей:

$$
\begin{gathered}
\max_c \sum_{n\in\mathcal{N}} p_n u\left(c_n\right) \\
\begin{cases}
\sum\limits_{n\in\mathcal{N}} q_n c_n = v, & \forall\, q\in Q \\
c_n \geqslant 0, & \forall\, n\in\mathcal{N}.
\end{cases}
\end{gathered}
\tag{7}
$$

Введем обозначение для приведенной стоимости портфеля θ_n в состоянии $n\in\mathcal{N}$: $V_n \overset{def}{=} X_n\cdot\theta_n$. По принципу доказательства необходимости из условия самофинансирования (2) можно получить следующие выражения:

$$
V_m = \sum_{n\in\mathcal{D}(m)} q\left(n|m\right) c_n,\ \forall\, q\left(m\right)\in Q\left(m\right),\ m\in\mathcal{N}, \tag{8}
$$

где $Q\left(m\right)$ – множество условных мартингальных мер $q\left(m\right) = \left(q\left(n|m\right),\ n\in\mathcal{D}\left(m\right)\right)$. Преобразуем задачу (7), используя (8):

(9)

$$
\begin{gathered}
\max_{(c,\,V)} \sum_{n\in\mathcal{N}} p_n u\left(c_n\right) \\
\begin{cases}
\sum\limits_{n\in\mathcal{C}(m)} q\left(n|m\right)\left(V_n + c_n\right) = V_m, & \forall\, q\left(m\right)\in Q\left(m\right),\ m\in\mathcal{N}\backslash\mathcal{N}_T \\
V_0 + c_0 = v, & \\
V_n = 0, & \forall\, n\in\mathcal{N}_T \\
c_n \geqslant 0, & \forall\, n\in\mathcal{N}.
\end{cases}
\end{gathered}
$$

Равенства системы ограничений (7) эквивалентны системе

$$
\sum_{n\in\mathcal{N}} q_n c_n = v,\ \forall\, q\in Q^{\mathrm{ext}}.
$$

Здесь, Q^{ext} – множество крайних точек замыкания $\overline{Q}$. Учитывая [5, Утверждение 3.1.], приходим к выводу, что первая группа ограничений задачи (9) выполнена для всех $q(m)\in Q^{\mathrm{ext}}(m)$.

Замечание 1. Методы динамического программирования, описанные далее, позволяют установить оптимальное решение задачи (7). Таким образом, для нахождения оптимального портфельного процесса θ^* необходимо решить систему уравнений (5). Причем, определив стоимости портфелей V_n по формуле (8), решения θ_n^* можно найти отдельно для каждого состояния $n\in\mathcal{N}$.

2.1. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ ПОЛЕЗНОСТИ

В этом подразделе приведена динамическая схема решения задачи оптимального потребления для следующей функции полезности: $u(x) = x^\alpha/\alpha,\ \alpha < 1,\ \alpha \neq 0$.

Целевая функция задачи (9) с учетом записи меры p через условные меры

$$p_n = \prod_{s=0}^{t-1} p\left(a^s(n)\,|a^{s+1}(n)\right),\ \forall\, n \in \mathcal{N}_t,\ t = 1,...,T.$$

принимает вид

$$Z \stackrel{def}{=} \sum_{n\in\mathcal{N}} p_n u(c_n) = u(c_0) + \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{m\in\mathcal{N}_t} \sum_{n\in\mathcal{C}(m)} p_n u(c_n)$$

$$= u(c_0) + \sum_{n_1\in\mathcal{N}_1} p(n_1|0) \left[u(c_{n_1}) + \sum_{n_2\in\mathcal{C}(n_1)} p(n_2|n_1) \right.$$

$$\left. \times \left[u(c_{n_2}) + \ldots + \sum_{n_T\in\mathcal{C}(n_{T-1})} p(n_T|n_{T-1})\, u(c_{n_T}) \right] \right].$$

Введем обозначения

$$Z_m \stackrel{def}{=} \begin{cases} \sum_{n\in\mathcal{C}(m)} p(n|m)\, u(c_n), & m \in \mathcal{N}_{T-1} \\ \sum_{n\in\mathcal{C}(m)} p(n|m)\left[u(c_n) + Z_n\right], & m \in \mathcal{N}_t,\ t = 0,...,T-2, \end{cases}$$

тогда $Z = u(c_0) + Z_0$.

Итак, метод динамического программирования для решения задачи (9) состоит в последовательном решении следующих задач для всех $m \in \mathcal{N}_t,\ t = T-1,...,0$:

Вначале $\forall\, m \in \mathcal{N}_{T-1}$ и $\forall\, V_m \geqslant 0$ необходимо решить задачи

$$Z_m^*(V_m) \stackrel{def}{=} \max{}_{(c_n,\, n\in\mathcal{C}(m))} \sum_{n\in\mathcal{C}(m)} p(n|m)\, u(c_n)$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{n\in\mathcal{C}(m)} q(n|m)\, c_n = V_m, & \forall\, q(m) \in Q^{\text{ext}}(m) \\ c_n \geqslant 0, & \forall\, n \in \mathcal{C}(m). \end{cases} \tag{10}$$

Далее, $\forall\, m \in \mathcal{N}_t,\ t = T-2, ..., 0,\ V_m \geqslant 0$:
(11)
$$Z_m^*\left(V_m\right) \overset{def}{=} \max{}_{(c_n,\, V_n,\, n\in\mathcal{C}(m))} \sum_{n\in\mathcal{C}(m)} p\left(n|m\right)\left[u\left(c_n\right) + Z_n^*\left(V_n\right)\right]$$
$$\begin{cases} \sum\limits_{n\in\mathcal{C}(m)} q\left(n|m\right)\left(V_n + c_n\right) = V_m, & \forall\, q\left(m\right) \in Q^{\text{ext}}\left(m\right) \\ c_n \geqslant 0, & \forall\, n \in \mathcal{C}\left(m\right). \end{cases}$$
Затем остается решить задачу
$$Z^* \overset{def}{=} \max{}_{(c_0,\, V_0)}\left[u\left(c_0\right) + Z_0^*\left(V_0\right)\right]$$
(12)
$$\begin{cases} V_0 + c_0 = v, \\ c_0 \geqslant 0. \end{cases}$$

Данную схему можно значительно упростить, если воспользоваться однородностью максимумов $Z_m^*\left(V_m\right)$ по V_m для всех $m \in \mathcal{N}\backslash\mathcal{N}_T$.

Теорема 2. *Для степенной функции полезности оптимальное потребление в задаче (7) определяется по формулам*
$$c_0^* = v/\left(1 + \left(\alpha Z_0^*\left(1\right)\right)^{1/(1-\alpha)}\right),$$
$$c_n^* = \bar{c}_n^* c_m^*\left(\alpha Z_m^*\left(1\right)\right)^{1/(1-\alpha)},\ \forall\, n \in \mathcal{C}\left(m\right),\ m \in \mathcal{N}\backslash\mathcal{N}_T,$$
где $\left(\bar{c}_n^*,\, n \in \mathcal{C}\left(m\right)\right)$ *и* $Z_m^*\left(1\right)$ *– оптимальное решение и максимум в задачах (10) и (11) при* $V_m = 1$. *Максимум в задаче (7) равен* $Z^* = v^\alpha\left(1 + \left(\alpha Z_0^*\left(1\right)\right)^{1/(1-\alpha)}\right)^{1-\alpha}/\alpha$.

Доказательство. Пусть $m \in \mathcal{N}_{T-1}$. Сделаем замену переменных $\bar{c}_n \overset{def}{=} c_n/V_m, \forall\, n \in \mathcal{C}\left(m\right)$. Легко видеть, что $u\left(c_n\right) = V_m^\alpha u\left(\bar{c}_n\right), \forall\, n \in \mathcal{N}_T$, поэтому
(13)
$$Z_m^*\left(V_m\right) = V_m^\alpha Z_m^*\left(1\right),$$
где $Z_m^*\left(1\right)$ обозначает максимум в задаче (10) при $V_m = 1$.

Пусть $m \in \mathcal{N}_{T-k}$, где $k \in \{2, ..., T\}$. Чтобы упростить решение устраним явную зависимость ограничений от переменных c_n для всех $n \in \mathcal{C}\left(m\right)$ с помощью замены $W_n \overset{def}{=} V_n + c_n,\ n \in \mathcal{N}$. С учетом замены и однородности (13) имеем
$$Z_m = \sum_{n\in\mathcal{C}(m)} p\left(n|m\right)\left[u\left(c_n\right) + \left(W_n - c_n\right)^\alpha Z_n^*\left(1\right)\right].$$

Точка максимума функции Z_m по $c_n \geqslant 0$ при фиксированных $W_n,\ n \in \mathcal{C}(m)$

$$c_n = W_n \left(1 + (\alpha Z_n^* (1))^{1/(1-\alpha)}\right)^{-1}.$$

Пусть $s_n \stackrel{def}{=} 1 + (\alpha Z_n^* (1))^{1/(1-\alpha)}$. Тогда $W_n = s_n c_n$ и $u(c_n) + (W_n - c_n)^\alpha Z_n^* (1) = u(c_n)(1 + (s_n - 1)^\alpha \alpha Z_n^* (1)) = s_n u(c_n)$. Поэтому $\forall\, m \in \mathcal{N}_{T-k}$, исключая переменные W_n, $n \in \mathcal{C}(m)$, задача (11) эквивалентно сводится к следующей задаче:

$$Z_m^* (V_m) = \max{}_{(c_n,\, n \in \mathcal{C}(m))} \sum_{n \in \mathcal{C}(m)} p(n|m)\, s_n u(c_n)$$

(14) $$\begin{cases} \sum\limits_{n \in \mathcal{C}(m)} q(n|m)\, s_n c_n = V_m, & \forall\, q(m) \in Q^{\text{ext}}(m) \\ c_n \geqslant 0, & \forall\, n \in \mathcal{C}(m). \end{cases}$$

Используя замену $\bar{c}_n \stackrel{def}{=} c_n / V_m,\ n \in \mathcal{C}(m)$, находим, что $Z_m^* (V_m) = V_m^\alpha Z_m^* (1)$, где $Z_m^* (1)$ – максимум в задаче (14) с $V_m = 1$.

Определяем оптимальное значение $Z_0^* (V_0) = V_0^\alpha Z_0^* (1)$ и переходим к решению задачи (12). С учетом условия $V_0 + c_0 = v$ максимум целевой функции $Z = u(c_0) + (v - c_0)^\alpha Z_0^* (1)$ по $c_0 \geqslant 0$ достигается при $c_0^* = v / s_0$.

Таким образом, оптимальное решение задачи (7) можно определить последовательно следующим способом:

$$c_0^* = v / s_0,\ c_n^* = \bar{c}_n^* c_{a(n)}^* \left(s_{a(n)} - 1\right),\ \forall\, n \in \mathcal{N}_t,\ t = 1, ..., T,$$

где $s_n = 1 + (\alpha Z_n^* (1))^{1/(1-\alpha)}$, $\bar{c}_n^*$ – оптимальное решение задач (10) и (11) при $V_m = 1$. Максимум целевой функции исходной задачи равен $Z^* = u(c_0^*) + (v - c_0^*)^\alpha Z_0^* (1) = s_0 u(c_0^*) = v^\alpha \left(1 + (\alpha Z_0^* (1))^{1/(1-\alpha)}\right)^{1-\alpha} / \alpha$. ■

2.2. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ ПОЛЕЗНОСТИ

Теорема 3. *Оптимальный процесс потребления в задаче (7) с логарифмической функцией полезности является q-мартингалом при $q \in Q$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное $t = 0, ..., T-1$. Согласно (8) задача (9) эквивалентна следующей задаче:
(15)

$$Z^* = \max_{(c,\, V_m,\, m\in\mathcal{N}_t)} \left[\sum_{s=0}^{t-1}\sum_{n\in\mathcal{N}_s} p_n \ln(c_n) + \sum_{m\in\mathcal{N}_t}\left(p_m \ln(c_m) + \sum_{n\in\mathcal{D}(m)} p_n \ln(c_n)\right)\right]$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{s=0}^{t}\sum\limits_{n\in\mathcal{N}_s} q_n c_n + \sum\limits_{m\in\mathcal{N}_t} q_m V_m = v, & \forall\, q \in Q^{\text{ext}} \\ \sum\limits_{n\in\mathcal{D}(m)} q(n|m)\, c_n = V_m, & \forall\, q(m) \in Q^{\text{ext}}(m)\,,\ m \in \mathcal{N}_t \\ c_n \geqslant 0, & \forall\, n \in \mathcal{N}. \end{cases}$$

В частности, при $t = 0$ получаем задачу эквивалентную (7)

$$Z^* = \max_{(c,\, V_0)} \sum_{n\in\mathcal{N}} p_n \ln(c_n)$$

$$\begin{cases} V_0 + c_0 = v, \\ \sum\limits_{n\in\mathcal{N}\setminus\{0\}} q_n c_n = V_0, & \forall\, q \in Q^{\text{ext}} \\ c_n \geqslant 0, & \forall\, n \in \mathcal{N}. \end{cases}$$

Делаем замены переменных

$$\bar{c}_n \stackrel{def}{=} c_n/V_m,\ n \in \mathcal{D}(m)\,,\ m \in \mathcal{N}_t,\ W_n \stackrel{def}{=} V_n + c_n,\ n \in \mathcal{N}.$$

Тогда

$$\sum_{n\in\mathcal{D}(m)} p_n \ln(c_n) = \sum_{n\in\mathcal{D}(m)} p_n \left[\ln(\bar{c}_n) + \ln(W_m - c_m)\right]$$

$$= \sum_{n\in\mathcal{D}(m)} p_n \ln(\bar{c}_n) + p_m (T-t) \ln(W_m - c_m)\,.$$

Таким образом, целевая функция записывается так:

$$Z = \sum_{s=0}^{t-1} \sum_{n \in \mathcal{N}_s} p_n \ln(c_n) +$$

$$\sum_{m \in \mathcal{N}_t} \left[p_m \left(\ln(c_m) + (T-t) \ln(W_m - c_m) \right) + \sum_{n \in \mathcal{D}(m)} p_n \ln(\bar{c}_n) \right].$$

Для случая $t = 0$:

$$Z = \ln(c_0) + T \ln(v - c_0) + \sum_{n \in \mathcal{N} \setminus \{0\}} p_n \ln(\bar{c}_n).$$

При фиксированном W_m максимум целевой функции Z по c_m достигается при $c_m = W_m / (T - t + 1)$, так как ограничения задачи (15) после замены переменных от c_m не зависят. Преобразуем с учетом этих равенств первую группу ограничений задачи (9):

$$\sum_{n \in \mathcal{C}(m)} q(n|m) W_n = W_m - c_m, \ \forall q(m) \in Q(m), \ m \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$$
$$\Leftrightarrow \sum_{n \in \mathcal{C}(m)} q(n|m) c_n = c_m, \ \forall q(m) \in Q(m), \ m \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T.$$

В результате, приходим к определению мартингального процесса (1). Таким образом, оптимальный процесс потребления c^* является q-мартингалом. ■

Теорема 3 позволяет провести декомпозицию исходной задачи на несколько однопериодных задач. Для этого нужно положить $c_0^* = v/(T+1)$ и последовательно по $t = 1, ..., T$ определить оптимальный процесс потребления c^*, решая задачи

$$\max_{(c_n,\, n \in \mathcal{C}(m))} \sum_{n \in \mathcal{C}(m)} p_n \ln(c_n)$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{n \in \mathcal{C}(m)} q(n|m) c_n = c_m^*, & \forall q(m) \in Q^{\text{ext}}(m) \\ c_n \geqslant 0, & \forall n \in \mathcal{C}(m). \end{cases}$$

Литература

1. BOUCHARD B., PHAM H. *Optimal consumption in discrete-time financial models with industrial investment opportunities and nonlinear returns* // The Ann. of App. Prob. – 2005. – Vol. 15, № 4. – P. 2393-2421.
2. EHRENFRIED S. *Consumption-investment problems with state dependent discounting*: Doctoral dissertation. – University of Ulm, Germany, 2012. – 139 p.
3. HE H., PEARSON N. D. *Consumption and portfolio policies with incomplete markets and short-sale constraints: the finite-dimensional case* // Math. Fin. – 1991. – Vol. 1, № 3. – P. 1–10.
4. KING A. J. *Duality and martingales: a stochastic programming perspective on contingent claims* // Math. Program. Ser. B. – 2002. – Vol. 91, № 3. – P. 543–562.
5. MOROZOV V. V., SOLOVIEV A. I. *On optimal partial hedging in discrete markets* // Optimization. – 2013. – Vol. 62, № 11. – P. 1403–1418.
6. PLISKA S. R. *Introduction to mathematical finance: discrete time models*: Malden, Massachusetts: Blackwell Publishers, 1997. – 276 p.

DECOMPOSITION OF CONSUMPTION-INVESTMENT PROBLEMS IN DISCRETE MARKETS

Alexey Soloviev, Lomonosov Moscow State University, Moscow, post-graduate student (alex.solo.88@mail.ru).

Abstract: We consider a multi-period discrete model of an incomplete market evolving with respect to a non-recombining scenario tree. The investor maximizes expected utility of his of her consumption over a finite time horizon. Decomposition schemes are suggested for optimal consumption-investment problems with power-like and logarithmic utility functions. We introduce dynamic programming algorithms that reduce the original problem to the set of one-period problems.

Keywords: arbitrage-free markets, incomplete markets, consumption problems, scenario tree, dynamic programming, convex programming.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии М. В. Губко

Поступила в редакцию 16.09.2014
Дата опубликования 31.01.2015