УДК 517.977.5
ББК 22.18

МЕХАНИЗМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПЛАТЕЖАМИ, ЛИМИТАМИ И ШТРАФАМИ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ РЕГИОНАЛЬНЫХ МОДЕЛЯХ ОХРАНЫ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Горелик В. А.[1]
(*Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Москва*)
Золотова Т. В.[2]
(*Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва*)

Рассмотрена двухуровневая иерархическая система с одним элементом верхнего уровня и n *элементами нижнего уровня. Приведены необходимые и достаточные условия оптимальности управления верхнего уровня, которые применяются для исследования предлагаемой иерархической региональной модели охраны окружающей среды. Представлены различные механизмы управления экологическими платежами, лимитами и штрафами, с помощью которых можно достичь идеальной согласованности интересов верхнего и нижнего уровней в иерархической системе.*

Ключевые слова: иерархическая система, идеальная согласованность интересов, экологический платеж, лимиты, штрафы.

[1] *Виктор Александрович Горелик, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник* (*Москва, ул. Вавилова, д.40, тел.* (*499*) *135-62-04*).
[2] *Татьяна Валерьяновна Золотова, доктор физико-математических наук, профессор* (*Москва, ул. Щербаковская, д.38, тел.* (499) *277-21-02*).

1. Введение

Государственный контроль над загрязнением окружающей среды осуществляется территориальными органами Ростехнадзора. В рамках такого контроля производится нормирование загрязнений в зависимости от видов и масштабов хозяйственной и иной деятельности организаций. Выбросы химических веществ и размещение отходов организациями допускаются только на основании специально выданных уполномоченными органами разрешений и в пределах установленных лимитов. Эти принципы закреплены в Федеральном законе «Об охране окружающей среды». При этом определенные виды вредного воздействия облагаются платой. В частности облагаются платой выбросы в атмосферный воздух загрязняющих веществ, сбросы загрязняющих веществ в поверхностные и подземные водные объекты, размещение отходов производства и потребления. Поэтому организация обязана обеспечить измерение и учет объемов загрязнений, возникающих в производственном процессе. Порядок определения платы за вредное воздействие на окружающую природную среду и нормативы платы по каждому из неблагоприятных факторов утверждены постановлением Правительства РФ. Экологические платежи поступают в Федеральный бюджет Российской Федерации.

Уменьшение платежа может осуществляться в результате зачета средств на выполнение природоохранных мероприятий, а также за счет льгот организациям, финансируемым из федерального бюджета и бюджетов субъектов Российской Федерации. Зачет расходов предусмотрен по следующим природоохранным мероприятиям: создание и внедрение автоматической системы контроля за составом и объемом сброса сточных вод или за загрязнением атмосферного воздуха; оснащение двигателей внутреннего сгорания нейтрализаторами для обезвреживания отработавших газов; строительство производств для получения сырья или готовой продукции из отходов производства; работы по экологическому образованию кадров; научно-исследовательские работы соответствующей тематики.

Существует два вида базовых нормативов платы: за вредное воздействие в пределах допустимых нормативов (ПДН), за вредное воздействие в пределах установленных лимитов (УЛ) или временно согласованных нормативов. По этим видам нормативов дифференцированы ставки платы, а показатели ПДН и УЛ по каждому разрешенному загрязнителю зафиксированы в экологической документации организации.

Для выбора ставки платежа нужно сравнить фактический объем загрязнения с показателями ПДН и УЛ. Если фактический объем допущенного загрязнения меньше предельно допустимого норматива, то плата рассчитывается путем умножения этого объема на соответствующую ставку. Если же фактический объем превысил предельно допустимый норматив, но не достиг установленного лимита, то превышение оплачивается по ставке, действующей в пределах лимита. Ну а если фактический объем больше установленного лимита, то весь объем загрязнения оплачивается по ставке, действующей в пределах лимита, увеличенной в пять раз. Таким же способом определяется размер платежа при отсутствии разрешения на загрязнение. Полученный результат дополнительно корректируется при помощи ряда коэффициентов, учитывающих территориальные факторы.

В настоящей статье рассмотрен вопрос охраны окружающей среды на региональном уровне. При этом экологические проблемы решаются совместно с задачей согласования интересов регионального управления и организаций, осуществляющей хозяйственную деятельность. Предлагаются механизмы управления едиными и дифференцированными экологическими платежами при наличии или отсутствии управления лимитами и штрафами. В [5] рассмотрены вопросы согласования интересов для региональных экологических моделей сохранения природных ресурсов. В данной работе рассматриваются модификации этих моделей, связанных с ограничениями по загрязнению окружающей среды.

В пункте 2 дано описание иерархической системы и приведены необходимые и достаточные условия оптимальности для центра в общем виде. В пункте 3 на примере региональной иерархической модели доказана возможность согласования интересов в системе при назначении региональным центром дифференцированных экологических платежей. В пункте 4 доказана согласованность интересов при назначении центром единых экологических платежей для всех предприятий и дифференцированных лимитов и штрафов, а в пункте 5 – при фиксированных экологических платежах только путем назначения лимитов и штрафов.

2. Согласование интересов в иерархической системе и условия оптимальности управления центра

В сложных организационных системах механизмы управления основаны на иерархической декомпозиции. Адекватным математическим аппаратом для анализа иерархических систем управления служит теория игр. Развитие теоретико-игрового подхода к моделированию иерархических систем привело к созданию информационной теории иерархических систем [3, 4] и теории активных систем [1, 7]. В рамках информационной теории иерархических систем рассматривались и экологические проблемы [4, 6].

Описание функционирования иерархической системы управления подразумевает задание порядка принятия решений (выбора управляющих параметров) и информированности всех элементов в моменты принятия решений, а также принципов выбора при всех возможных видах информированности (с точки зрения центра). Выбирая управляющие параметры и передавая информацию подсистемам, центр стремится к тому, чтобы в процессе функционирования системы обеспечить выполнение необходимых глобальных ограничений на параметры системы (в широком смысле устойчивости или гомеостазиса системы) и при этом оптимизировать значение своего критерия эффективности. Рассматриваемые в статье математические модели иерархической системы представляют собой игру типа Γ_1 [2, 4], в которой управление центра не зависит от управления нижнего уровня. Отметим, что управление типа Γ_1 может иметь место и для иерархических моделей, в которых механизмы управления включают штрафы, если функция штрафа задается в модели с точностью до параметров. Тогда управление центра состоит в выборе этих параметров, а так называемая «стратегия наказания» игры Γ_2 неприменима.

Основным условием устойчивости и эффективности функционирования в иерархической системе является согласованность интересов всех ее элементов. Интересы элементов согласуемы, если центр может обеспечить устойчивое функционирование системы. Если при этом центр может достичь абсолютного максимума своего критерия эффективности, то интересы элементов системы идеально согласуемы.

Рассмотрим двухуровневую иерархическую систему с одним элементом верхнего уровня (центром) и n элементами нижнего уровня (подсистемами).

Обозначим управление центра через u, считая его точкой некоторого пространства U. Управление подсистем обозначим через v_i, $i = 1, \ldots, n$, а управление нижнего уровня в целом – через $v = (v_1, \ldots, v_n)$, также считая его точкой некоторого пространства V. При выборе центром управления u и передаче информации об этом выборе множество возможных управлений нижнего уровня есть $R(u) \subseteq V$.

Если фазовое состояние системы x однозначно определяется управлениями u и v, то условие устойчивости системы может быть записано в виде

(1) $(u, v) \in \Omega$,

где множество $\Omega \subseteq U \times V$ представляет собой совокупность управлений, приводящих к устойчивым состояниям.

Множество допустимых управлений центра, обеспечивающих выполнение условия устойчивости (1), есть

(2) $D = \{u \in U \mid (u, v) \in \Omega \quad \forall v \in R(u)\}$.

Критерии эффективности элементов нижнего уровня являются функциями от управлений верхнего и нижнего уровней, т.е. $G_i(u, v_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Пространства управлений подсистем $V_i(u)$ зависят от управления центра, т.е. центр имеет возможность в определенных пределах регламентировать свободу их действий. Будем считать, что подсистема при выборе управления стремится максимизировать $G_i(u, v_i)$. Тогда оптимальная стратегия i-й подсистемы $v_i^0(u)$ определяется из условия

(3) $G_i(u, v_i^0(u)) = \max\limits_{v_i \in V_i(u)} G_i(u, v_i)$.

При этом реакция i-й подсистемы есть

$$R_i(u) = Arg \max_{v_i \in V_i(u)} G_i(u, v_i) .$$

Множество возможных управлений нижнего уровня имеет вид

$$R(u) = \prod_{i=1}^{n} R_i(u) .$$

Пусть критерий эффективности центра представляет собой функцию $F(u, v)$. Задача центра заключается в нахождении оптимального гарантирующего управления u^0 и результата F^0, определяемых соотношением

(4) $$F^0 = \max_{u \in D} \inf_{v \in R(u)} F(u, v) .$$

Если максимум в задаче (3) определяется однозначно, т.е. имеется соотношение $R_i(u) = \arg \max_{v_i \in V_i(u)} G_i(u, v_i)$, то

(5) $$F^0 = \max_{u \in D} F(u, v^0(u)) .$$

Пусть пространство управлений нижнего уровня задается системой неравенств:

(6) $$V_i(u) = \{v_i \mid g_i(u, v_i) \geq 0\} ,$$

где u, v_i – точки конечномерных евклидовых пространств, $g_i(u, v_i)$ – вектор-функция размерности m_i.

Множество Ω будем считать заданным в виде

(7) $$\Omega = \{(u, v) \mid \varphi(u, v) \geq 0\} ,$$

где $\varphi(u, v)$ вектор-функция размерности l.

В [3] получены необходимые условия, а в [5] – необходимые и достаточные условия оптимальности управления центра в общем виде (здесь они сформулированы в виде теоремы 1).

Приведем две леммы, используемые при дальнейшем изложении. Будем считать векторную функцию $y(x) = (y_1(x), \ldots, y_i(x), \ldots, y_n(x))$ вогнутой по переменной x, если каждая ее компонента $y_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, есть вогнутая функция по x.

Лемма 1. Пусть X и Y – выпуклые множества, и для некоторой непрерывно дифференцируемой функции $h(x, y)$ $\forall x \in X$, $y \in Y$ выполнены условия

(а) $\partial h(x, y)/\partial y_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$;

(б) функция $h(x, y)$ вогнута по совокупности переменных;

(в) $y(x)$ является вогнутой функцией переменной x.

Тогда сложная функция $h(x, y(x))$ вогнута по x.

Лемма 2. Пусть X и Y – выпуклые множества, и для некоторой непрерывно дифференцируемой функции $h(x, y)$ $\forall x \in X$, $y \in Y$ выполнены условия

(а) $\partial h(x, y)/\partial y_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$;

(б) $y(x) = \arg\max\limits_{y \in Y} h(x,y)$.

Тогда $y(x)$ является вогнутой функцией переменной x.

Введем функцию Лагранжа для задачи (3), (6):

$$L_i(u, v_i, \lambda_i) = G_i(u, v_i) + \lambda_i g_i(u, v_i),$$

где λ_i – векторный множитель Лагранжа, $\lambda_i \geq 0$. Здесь и далее мы не делаем различия в обозначении вектора-строки и вектора-столбца, считая их соответствующими требованиям операций умножения матриц и векторов.

Теорема 1. Пусть в задачах (3), (5), (6), (7) выполнены следующие условия:

1^0. Функция $F(u, v)$ и компоненты вектор-функции $\varphi(u, v)$ непрерывно дифференцируемы по всем переменным и вогнуты по совокупности переменных; функции $G_i(u, v_i)$ и компоненты вектор-функций $g_i(u, v_i)$, $i = 1, \ldots, n$, – дважды непрерывно дифференцируемы и вогнуты по совокупности переменных.

2^0. $\partial \varphi_k(u, v)/\partial v_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, l$.

3^0. $\partial F(u, v)/\partial v_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

4^0. Градиенты $\partial g_i(u^0, v^0)/\partial v$, $i \in I = \{i \mid i=1, \ldots, n,\ g_i(u^0, v^0) = 0\}$ в точке (u^0, v^0) линейно независимы; v^0 – решение задачи (3), (6) при $u = u^0$.

5^0. $\lambda_i^0 > 0$, λ_i^0 – векторный множитель Лагранжа, соответствующий (u^0, v^0);

6^0. $\eta(\partial^2 L_i(u^0, v_i^0, \lambda_i^0)/\partial v_i^2)\eta < 0$ $\forall \eta \neq 0$ такого, что

$(\partial g_i(u^0, v^0)/\partial v)\eta = 0$, $i \in I$.

7^0. для функции $G_i(u, v_i)$, $i = 1, \ldots, n$ выполняются условия

$\partial G_i(u, v_i)/\partial v_{ij} > 0$, $j=1, \ldots, m$; $v_i^0(u) = \arg\max\limits_{v_i \in V_i(u)} G_i(u, v_i)$.

Тогда для того чтобы u^0 являлась оптимальной стратегией центра для задачи (5), (7), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\frac{\partial F(u^0, v^0(u^0))}{\partial u} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F(u^0, v^0(u^0))}{\partial v_i} \cdot \left[\frac{\partial v_i^0(u^0)}{\partial u} \right]^T \right) +$$

$$+ \mu\left(\left[\frac{\partial \varphi(u^0, v^0(u^0))}{\partial u} \right] + \sum_{i=1}^{n} \left(\left[\frac{\partial \varphi(u^0, v^0(u^0))}{\partial v_i} \right] \cdot \left[\frac{\partial v_i^0(u^0)}{\partial u} \right]^T \right) = 0, \tag{8}$$

$$\varphi(u^0, v^0(u^0) = 0,$$

где матрица частных производных функций $v_i^0(u)$ определяется из матричного соотношения

$$\begin{pmatrix} \left[\dfrac{\partial v_i^0(u)}{\partial u} \right]^T \\ \left[\dfrac{\partial \lambda_i(u)}{\partial u} \right]^T \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \left[\dfrac{\partial^2 G_i(u, v_i^0(u))}{\partial v_i^2} \right] + [\lambda_i(u)] \left[\dfrac{\partial^2 g_i(u, v_i^0(u))}{\partial v_i^2} \right]^T & \left[\dfrac{\partial g_i(u, v_i^0(u))}{\partial v_i} \right] \\ [\lambda_i(u)] \left[\dfrac{\partial g_i(u, v_i^0(u))}{\partial v_i} \right]^T & \left[g_i(u, v_i^0(u)) \right] \end{pmatrix}^{-1} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} - \left[\dfrac{\partial^2 G_i(u, v_i^0(u))}{\partial v_i \partial u} \right] - [\lambda_i(u)] \left[\dfrac{\partial^2 g_i(u, v_i^0(u))}{\partial v_i \partial u} \right]^T \\ - [\lambda_i(u)] \left[\dfrac{\partial g_i(u, v_i^0(u))}{\partial u} \right]^T \end{pmatrix}.$$

$[\cdot]$ – значок матрицы, T – знак транспонирования матрицы.

Доказательство леммы 1, леммы 2 и теоремы 1 приведено в [5]. При этом лемма 1 и лемма 2 используются при доказательстве теоремы 1.

Оптимальный результат центра может, вообще говоря, отличаться от глобального максимума его критерия.

3. Региональная модель с дифференцированными экологическими платежами

Предположим, что региональный центр регулирует экологический платеж $p = (p_1, \ldots, p_m)$ за счет льгот организациям, финансируемым из бюджета субъекта Российской Федерации, где p_j – плата за негативное воздействие на единицу объема y_j j-го загрязняющего вещества, $j = 1, \ldots, m$. Предположим, что объемы вредных воздействий пропорциональны объемам соответствующих факторов производства:

$$y_{ij} = \gamma_{ij} x_i = \sum_{s=1}^{S} \gamma_{ijs} x_{is},$$

где $\gamma_{ij} = (\gamma_{ij1}, \ldots, \gamma_{ijs}, \ldots, \gamma_{ijS})$ – вектор коэффициентов пропорциональности по j-му загрязняющему веществу; $\gamma_{is} = (\gamma_{i1s}, \ldots, \gamma_{ijs}, \ldots, \gamma_{ims})$ – вектор коэффициентов пропорциональности по всем загрязняющим веществами для i-го предприятия, использующего s-й фактор производства; $x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{is}, \ldots, x_{iS})$ – вектор факторов производства i-й производственной единицы. Пусть K_i, $i = 1, \ldots, n$, – финансовые средства предприятий, $q = (q_1, \ldots, q_S)$ – вектор стоимостей факторов производства. Тогда пространство управлений i-й производственной единицы имеет вид

$$\tilde{X}_i(p) = \{(x_i, y_i) \mid qx_i + py_i \le K_i,\ x_i \ge 0,\ y_i \ge 0\}.$$

После подстановки $y_i = (y_{i1}, \ldots, y_{ij}, \ldots, y_{im}) = (\gamma_{i1}x_i, \ldots, \gamma_{ij}x_i, \ldots, \gamma_{im}x_i) = (\sum_{s=1}^{S} \gamma_{i1s} x_{is}, \ldots, \sum_{s=1}^{S} \gamma_{ijs} x_{is}, \ldots, \sum_{s=1}^{S} \gamma_{ims} x_{is})$ имеем

$$py_i = p_1 \sum_{s=1}^{S} \gamma_{i1s} x_{is} + \ldots + p_j \sum_{s=1}^{S} \gamma_{ijs} x_{is} + \ldots + p_m \sum_{s=1}^{S} \gamma_{ims} x_{is} = \sum_{j=1}^{m} p_j \sum_{s=1}^{S} \gamma_{ijs} x_{is}.$$

Это эквивалентно

$$py_i = \sum_{j=1}^{m} p_j \sum_{s=1}^{S} \gamma_{ijs} x_{is} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=1}^{S} p_j \gamma_{ijs} x_{is} = \sum_{s=1}^{S} \sum_{j=1}^{m} p_j \gamma_{ijs} x_{is} = \tilde{p} x_i,$$

где $\tilde{p} = (\sum_{j=1}^{m} p_j \gamma_{ij1}, \ldots, \sum_{j=1}^{m} p_j \gamma_{ijs}, \ldots, \sum_{j=1}^{m} p_j \gamma_{ijS})$.

Пространство управлений i-й производственной единицы примет вид

$$X_i(p) = \{x_i \mid Px_i \le K_i,\ x_i \ge 0\},\ i=1,\ \ldots,\ n,$$

где

$$P = (q_1 + \tilde{p}_1, \ldots., q_s + \tilde{p}_s, \ldots, q_S + \tilde{p}_S) =$$
$$= (q_1 + \sum_{j=1}^{m} p_j \gamma_{ij1}, \ldots, q_s + \sum_{j=1}^{m} p_j \gamma_{ijs}, \ldots, q_S + \sum_{j=1}^{m} p_j \gamma_{ijS}).$$

Выпуск каждого предприятия определяется векторной производственной функцией $f_i(x_i)$, для которой выполняются условия

$$f_i(0) = 0,\ \frac{\partial f_i(x_i)}{\partial x_{is}} > 0,\ \xi \frac{\partial^2 f_{ik}(x_i)}{\partial x_i^2} \xi < 0 \quad \forall \xi \ne 0\,,$$

где $f_{ik}(x_i)$ – k-я компонента векторной функции $f_i(x_i)$.

Если c_i – вектор цен на соответствующие виды продукции i-го предприятия, то задачу максимизации валового выпуска $G_i(x_i)$ каждого предприятия можно записать в виде

(9) $\quad G_i(x_i) = c_i f_i(x_i) \to \max\limits_{x_i \in X_i(p)}$.

Решение задачи i-го предприятия есть вектор $x_i^0(p)$. Выбор в качестве целевой функции предприятия валового дохода обоснован тем, что его затраты K_i фиксированы, т.е. максимизация валового дохода эквивалентна максимизации прибыли. Заметим, что эта целевая функция не зависит от p, т.е. управление центра p влияет на оптимальный выбор нижнего уровня только через ограничения.

Пусть центр стремится к увеличению суммарного валового выпуска предприятий, т.е. целевая функция центра есть

$$F(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i G_i(x_i)\,,$$

где α_i – положительные весовые коэффициенты, означающие, например, налоговые отчисления в региональный бюджет. Также предполагается, что центр заинтересован в рациональном использовании ресурсов региона (энергетических, природных, трудовых). Тогда задача центра имеет вид

(10) $\quad F(x^0(p)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i G_i(x_i^0(p)) \to \max\limits_{p \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^0(p_i) \le X}$,

где X – ограничение по объемам ресурсов. Решением задачи (10) является вектор p^0.

В [4] рассмотрена близкая по математической постановке задача потребления и доказано, что, управляя вектором цен на ресурсы и финансовыми средствами K_i, $i = 1, \ldots, n$, можно достичь идеальной согласованности интересов уровней иерархии. В [4] также показано, что управляя только едиными ценами на ресурсы при неизменных финансовых средствах, центр, вообще говоря, не может достичь идеальной согласованности. В рассматриваемых далее задачах не предполагается управление финансовыми средствами. Поэтому центр, управляя едиными экологическими платежами при фиксированных финансовых средствах предприятий, не может достичь идеальной согласованности.

Как будет показано ниже, устанавливая для предприятий дифференцированные платежи, можно добиться идеальной согласованности.

Рассмотрим задачу централизованного управления

$$(11)\quad F(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i G_i(x_i) \to \max_{x \mid \sum_{i=1}^{n} x_i \le X},$$

решение которой есть вектор $x^* = (x_1^*, \ldots, x_i^*, \ldots, x_n^*)$.

Введем функцию Лагранжа для задачи (11):

$$(12)\quad L(x, \mu) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i G_i(x_i) + \mu(X - \sum_{i=1}^{n} x_i),$$

где $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_S)$ – вектор множителей Лагранжа, и рассмотрим для i-го элемента нижнего уровня систему $S + 1$ линейных уравнений относительно $m + 1$ неизвестных k_i, $p_i = (p_{i1}, \ldots, p_{im})$:

$$k_i \mu_s = q_s + \tilde{p}_{is},\ s = 1, \ldots, S, \quad K_i = k_i \mu x_i^*$$

или более подробно

$$(13)\quad k_i \mu_s = q_s + \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \gamma_{ijs},\ s = 1, \ldots, S, \quad K_i = k_i \mu x_i^*.$$

Обозначим p_{0i} вектор экологических платежей для i-го предприятия, определяемый законодательством РФ.

Теорема 2. Пусть функции $G_i(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, непрерывны и строго вогнуты по совокупности переменных и имеют непрерывные положительные производные по x_{is}, система линейных уравнений (13) имеет положительное решение такое, что $p_i \le p_{0i}$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда выбором дифференцированных экологических платежей p_i для элементов нижнего уровня в задаче (10) центр достигает глобального максимума, т.е. интересы в такой системе идеально согласуемы.

Доказательство. При любом i функция $G_i(x_i)$ имеет на компактном выпуклом множестве $X_i(p)$ при фиксированном p единственный глобальный максимум. Составим для задачи на условный экстремум (9) функцию Лагранжа:

$$L_i(x_i, \lambda_i) = G_i(x_i) + \lambda_i(K_i - Px_i), \tag{14}$$

где $\lambda_i \ge 0$ – множитель Лагранжа. Для того чтобы точка $x_i^0 = (x_{i1}^0, \ldots, x_{is}^0, \ldots, x_{iS}^0)$ была точкой максимума, необходимо и достаточно, чтобы для каждой переменной x_{is}^0 выполнялись условия

$$\begin{gathered} \frac{\partial L_i(x_i^0, \lambda_i)}{\partial x_{is}} \le 0, \quad \frac{\partial L_i(x_i^0, \lambda_i)}{\partial x_{is}} x_{ij}^0 = 0, \quad \lambda_i \frac{\partial L_i(x_i^0, \lambda_i)}{\partial \lambda_i} = 0, \\ \frac{\partial L_i(x_i^0, \lambda_i)}{\partial \lambda_i} \ge 0, \quad x_{is}^0 \ge 0, \lambda_i \ge 0, s = 1, \ldots, S. \end{gathered} \tag{15}$$

Возьмем производные функции Лагранжа (14) и запишем условия (15) в виде

$$\frac{\partial(c_i f_i(x_i^0))}{\partial x_{is}} - \lambda_i P_s \le 0, \quad \left(\frac{\partial(c_i f_i(x_i^0))}{\partial x_{is}} - \lambda_i P_s\right) x_{is}^0 = 0, \tag{16}$$

$$\lambda_i(K_i - Px_i^0) = 0, \quad K_i - Px_i^0 \ge 0, x_{is}^0 \ge 0, \lambda_i \ge 0, s = 1, \ldots, S.$$

Функция

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i G_i(x_i)$$

как линейная комбинация непрерывных строго вогнутых и монотонных функций также является непрерывной строго вогнутой и монотонной, поэтому она имеет единственный глобальный максимум на множестве, определяемом ограничением $\sum_{i=1}^{n} x_i \le X$. Причем это ограничение в точке максимума выполняется как равенство.

Пусть $x^* = (x_1^*, \ldots, x_i^*, \ldots, x_n^*)$ доставляют глобальный максимум функции

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i G_i(x_i)\,.$$

Тогда, дифференцируя функцию Лагранжа (12), получаем необходимые и достаточные условия экстремума:

$$\alpha_i \frac{\partial(c_i f_i(x_i^*))}{\partial x_{is}} - \mu_s \le 0, \quad (\alpha_i \frac{\partial(c_i f_i(x_i^*))}{\partial x_{is}} - \mu_s) x_{is}^* = 0,$$

(17)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* = X, \quad x_{is}^* \ge 0,\ \mu_s \ge 0,\ i = 1, \ldots, n,\ s = 1, \ldots, S.$$

Для того чтобы доказать утверждение теоремы, достаточно показать, что центр может выбрать такие p, что для нижнего уровня $x_i^0 = x_i^*$, $i = 1, \ldots, n$.

Так как $X > 0$ и $\sum_{i=1}^{n} x_i^* = X$, то $\sum_{i=1}^{n} x_{is}^* > 0$ $\forall j$, т.е. $\forall s\ \exists i$ такое, что $x_{is}^* > 0$ и из (17) $\alpha_i(\partial(c_i f_i(x_i^*))/\partial x_{is}) = \mu_s$. По условию теоремы $\alpha_i > 0$, $\partial(c_i f_i(x_i^*))/\partial x_{is} > 0$, $\forall x_i$, то $\mu_s > 0$, $s = 1, \ldots, S$.

Определим компоненты экологического платежа так: $P_{is} = k_i \mu_s$, где k_i такие, что имеет место равенство $K_i = P_i x_i^*$. Тогда из (16) и (17) имеем равенство $\lambda_i k_i \mu_s = \mu_s / \alpha_i$, из которого получаем $\lambda_i = 1 / (k_i \alpha_i)$.

Значит, x_i^* удовлетворяет условиям (16), т.е. x_i^* является оптимумом для нижнего уровня при данных дифференцированных платежах $p_i = (p_{i1}, \ldots, p_{im})$, определяемых из (13), что и требовалось доказать.

Для нахождения управления центра, обеспечивающего идеальное согласование интересов, нужно решить системы (17) и (13). Однако если система (13) не имеет решения, то идеальная согласованность недостижима. В этом случае центр должен решать задачу оптимального управления в иерархической системе (4) или (5). Для этого можно использовать условия (8). Применительно к модели с дифференцированными экологическими платежами они принимают вид

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i c_i \frac{\partial(f_i(x_i^0(p^0))}{\partial x_i} - \mu)\cdot\left[\frac{\partial x_i^0(p^0)}{\partial p}\right]^T = 0,\quad \sum_{i=1}^{n} x_i^0(p^0) = X \text{ , где}$$

$$\begin{pmatrix} \left[\dfrac{\partial x_i^0(p)}{\partial p}\right]^T \\ \left[\dfrac{\partial \lambda_i(p)}{\partial p}\right]^T \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \left[\alpha_i c_i \dfrac{\partial^2 f_i(x_i^0(p))}{\partial x_i^2}\right] & [-P] \\ [\lambda_i(p)][-P]^T & \left[K_i - Px_i^0(p)\right] \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} -\left[\dfrac{\partial^2 f_i(x_i^0(p))}{\partial x_i \partial p}\right] \\ [\lambda_i(p)][\gamma_{is}]^T \end{pmatrix}.$$

4. Региональная модель с едиными экологическими платежами и с назначением лимитов и штрафов

Предположим, что центр имеет возможность назначать только единые экологические платежи p, но при этом штрафовать предприятия за превышение допустимых уровней загрязнений, установленных для каждого предприятия. Размеры штрафов z_{ij} за единицу превышения по j-му виду загрязнения и лимиты $\beta_i = (\beta_{i1}, \ldots, \beta_{ij}, \ldots, \beta_{im})$ для каждого предприятия определяются центром и удовлетворяют условиям $z_{ij} \ge 0$, $\beta_i \ge 0$, $i = 1, \ldots, n$,

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} = B_j ,$$

где B_j – фиксированная величина, означающая максимально допустимый уровень загрязнений по j-му показателю для всего региона. Обозначим $z_i = (z_{i1}, \ldots, z_{im})$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_i, \ldots, \beta_n)$. Целевая функция центра, как и ранее, имеет вид

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i G_i(x_i) .$$

В качестве функции штрафа возьмем суммарное превышение по всем видам загрязнения. Тогда каждое предприятие решает задачу

(18) $c_i f_i(x_i) \to \max\limits_{x_i \in X_i'(p, z_i, \beta_i)}$,

$$X_i'(p, z_i, \beta_i) = \{x_i \mid Px_i + \sum_{j=1}^{m} z_{ij} \max(0, \gamma_{ij} x_i - \beta_{ij}) \le K_i, x_i \ge 0\}.$$

Введем вектор превышений допустимых уровней $w_i = (w_{i1}, \ldots, w_{im})$. Задача (18) эквивалентна следующей задаче

(19) $G_i(x_i) = c_i f_i(x_i) \to \max\limits_{(x_i, w_i) \in X_i(p, z_i, \beta_i)}$,

$$X_i(p, z_i, \beta_i) = \{(x_i, w_i) \mid \gamma_{ij} x_i - \beta_{ij} \le w_{ij}, \quad Px_i + \sum_{j=1}^{m} z_{ij} w_{ij} \le K_i,$$

$$x_i \ge 0,\ w_{ij} \ge 0,\ j = 1, \ldots, m\}.$$

Решение этой задачи есть вектор $x_i^0(p, z_i, \beta_i)$.

Задача центра принимает вид

(20) $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i G_i(x_i^0(p, z_i, \beta_i)) \to \max\limits_{(p, z, \beta) \in Q}$,

$$Q = \{(p, z, \beta) \mid \beta \ge 0, \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} = B_j, j = 1, \ldots, m,$$

$$p \ge 0, z \ge 0, \sum_{i=1}^{n} x_i^0(p, z_i, \beta_i) \le X\}.$$

Обозначим оптимальное управление центра (p^0, z^0, β^0).

Исследуем вопрос, при каких условиях в региональной модели с назначением штрафа возможна идеальная согласованность интересов уровней иерархии.

Составим для задачи на условный экстремум (19) функцию Лагранжа

(21)
$$\begin{aligned}&\tilde{L}_i(x_i, w_i, \lambda_{i1}, \lambda_{i2}) = G_i(x_i, w_i, p, z_i, \beta_i) + \\ &+ \lambda_{i1}(K_i - Px_i - \sum_{j=1}^{m} z_{ij} w_{ij}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij2}(w_{ij} + \beta_{ij} - \gamma_{ij} x_i),\end{aligned}$$

где $\lambda_{i1} \ge 0$, $\lambda_{i2} \ge 0$ – множители Лагранжа, λ_{i2} – m-мерный вектор.

Задача централизованного управления имеет вид

$$(22)\quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i G_i(x_i)) \to \max_{x \in Q_1},$$

$$Q_1 = \{x \mid \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} x_i \le B_j, j = 1, ..., m, \sum_{i=1}^{n} x_i \le X\}.$$

Обозначим через $x_i^* = (x_{i1}^*, \ldots, x_{is}^*, \ldots, x_{iS}^*)$ решение задачи (22). Рассмотрим систему $ns + n$ уравнений относительно $2mn + m + n$ неизвестных $p = (p_1, \ldots, p_m)$, $\lambda_1 = (\lambda_{11}, \ldots, \lambda_{n1})$, $\lambda_{i2} = (\lambda_{i12}, \ldots, \lambda_{im2})$, $\beta_i = (\beta_{i1}, \ldots, \beta_{im})$, $i = 1, \ldots, n$:

$$(23)\quad \begin{aligned} &\lambda_{i1} P x_i^* + \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij2}(\beta_{ij} - \gamma_{ij} x_i^*) = \lambda_{i1} K_i, \quad \lambda_{i1} P_s = \mu_{1s} / \alpha_i, \\ &\sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij2} \gamma_{ijs} = (\sum_{j=1}^{m} \mu_{2j} \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ijs}) / \alpha_i = 0, \quad i = 1, ..., n,\ s = 1, ..., S. \end{aligned}$$

Обозначим через p_0 вектор экологических платежей для предприятий, определяемый законодательством РФ.

Теорема 3. Пусть функции $G_i(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, непрерывны и строго вогнуты по совокупности переменных и имеют непрерывные положительные производные по x_{is}; система уравнений (23) имеет положительное решение λ_1, λ_{i2}, p, β такое, что $p \le p_0$. Тогда выбором единых экологических платежей p, штрафов z и лимитов β для элементов нижнего уровня в задаче (20) центр достигает глобального максимума, т.е. интересы в такой системе идеально согласуемы.

Доказательство. При любом i функция $G_i(x_i)$ имеет на компактном выпуклом множестве $X_i(p, z_i, \beta_i)$ при фиксированных p, z_i, β_i единственный глобальный максимум.

Для того чтобы точка $x_i^0 = (x_{i1}^0, \ldots, x_{is}^0, \ldots, x_{iS}^0)$ была точкой максимума, необходимо и достаточно, чтобы для каждой переменной x_{is}^0 и w_i^0 выполнялись условия

$$\frac{\partial \widetilde{L}_i(x_i^0, w_i^0, \lambda_{i1}, \lambda_{i2})}{\partial x_{is}} \le 0, \quad \frac{\partial \widetilde{L}_i(x_i^0, w_i^0, \lambda_{i1}, \lambda_{i2})}{\partial w_{ij}} \le 0,$$

$$\frac{\partial \widetilde{L}_i(x_i^0, w_i^0, \lambda_{i1}, \lambda_{i2})}{\partial x_{is}} x_{is}^0 = 0, \quad \frac{\partial \widetilde{L}_i(x_i^0, w_i^0, \lambda_{i1}, \lambda_{i2})}{\partial w_{ij}} w_{ij}^0 = 0,$$

$$(24) \quad \lambda_{i1} \frac{\partial \widetilde{L}_i(x_i^0, w_i^0, \lambda_{i1}, \lambda_{i2})}{\partial \lambda_{i1}} = 0, \quad \lambda_{i2j} \frac{\partial \widetilde{L}_i(x_i^0, w_i^0, \lambda_{i1}, \lambda_{i2})}{\partial \lambda_{ij2}} = 0,$$

$$\frac{\partial \widetilde{L}_i(x_i^0, w_i^0, \lambda_{i1}, \lambda_{i2})}{\partial \lambda_{i1}} \ge 0, \quad \frac{\partial \widetilde{L}_i(x_i^0, w_i^0, \lambda_{i1}, \lambda_{i2})}{\partial \lambda_{ij2}} \ge 0,$$

$$x_{is}^0 \ge 0,\ w_i^0 \ge 0,\ \lambda_{i1} \ge 0,\ \lambda_{i2} \ge 0,\ j = 1, \ldots, m,\ s = 1, \ldots, S.$$

Возьмем производные функции Лагранжа (21) и запишем условия (24) в виде

$$\frac{\partial (c_i f_i(x_i^0))}{\partial x_{is}} - \lambda_{i1} P_s - \sum_{j=1}^m \lambda_{ij2} \gamma_{ijs} \le 0, \quad -\lambda_{i1} z_{ij} + \lambda_{ij2} \le 0,$$

$$\left(\frac{\partial (c_i f_i(x_i^0))}{\partial x_{is}} - \lambda_{i1} P_s - \sum_{j=1}^m \lambda_{ij2} \gamma_{ijs}\right) x_{is}^0 = 0,$$

$$(25) \quad (-\lambda_{i1} z_{ij} + \lambda_{ij2}) w_{ij}^0 = 0,$$

$$\lambda_{i1}\left(K_i - P x_i^0 - \sum_{j=1}^m z_{ij} w_{ij}^0\right) = 0, \quad \lambda_{ij2}(w_{ij}^0 + \beta_{ij} - \gamma_{ij} x_i^0) = 0,$$

$$K_i - P x_i^0 - \sum_{j=1}^m z_{ij} w_{ij}^0 \ge 0, \quad w_{ij}^0 + \beta_{ij} - \gamma_{ij} x_i^0 \ge 0,$$

$$x_{is}^0 \ge 0,\ w_i^0 \ge 0,\ \lambda_{i1} \ge 0,\ \lambda_{i2} \ge 0,\ j = 1, \ldots, m,\ s = 1, \ldots, S.$$

Функция

$$F(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i G_i(x_i)$$

как линейная комбинация непрерывных строго вогнутых и монотонных функций также является непрерывной, строго вогнутой и монотонной, поэтому она имеет единственный глобальный максимум на множестве Q_1.

Пусть $x^* = (x_1^*, \ldots, x_i^*, \ldots, x_n^*)$ доставляют глобальный максимум функции

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i G_i(x_i)$$

на множестве Q_1. Тогда, дифференцируя функцию Лагранжа

$$L_0(x,\mu) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i G_i(x_i) + \mu_1 (X - \sum_{i=1}^{n} x_i) + \sum_{j=1}^{m} \mu_{2j} (B_j - \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} x_i),$$

получаем необходимые и достаточные условия экстремума:

$$\alpha_i \frac{\partial (c_i f_i(x_i^*))}{\partial x_{is}} - \mu_{1s} - \sum_{j=1}^{m} \mu_{2j} \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ijs} \le 0,$$

$$(\alpha_i \frac{\partial (c_i f_i(x_i^*))}{\partial x_{is}} - \mu_{1s} - \sum_{j=1}^{m} \mu_{2j} \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ijs}) x_{is}^* = 0,$$

$$(26) \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^* \le X, \quad \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} x_i^* \le B_j,$$

$$\mu_1 (X - \sum_{i=1}^{n} x_i^*) = 0, \quad \sum_{j=1}^{m} \mu_{2j} (B_j - \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} x_i^*) = 0,$$

$$x_{is}^* \ge 0,\ \mu_1 \ge 0,\ \mu_{2j} \ge 0, i = 1, ..., n, s = 1, ..., S.$$

Для того чтобы доказать утверждение теоремы, достаточно показать, что центр может выбрать такие p, z_i, β_i, что для нижнего уровня $x_i^0 = x_i^*$, $i = 1, \ldots, n$.

Так как $X > 0$ и $\sum_{i=1}^{n} x_i^* = X$, то $\sum_{i=1}^{n} x_{is}^* > 0 \ \ \forall j$, т.е. $\forall s \ \exists i$ такое, что $x_{is}^*{>}0$ и из (26)

$$\alpha_i \frac{\partial (c_i f_i(x_i^*))}{\partial x_{is}} = \mu_{1s} + \sum_{j=1}^{m} \mu_{2j} \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ijs}.$$

Определим λ_{i1}, λ_{i2}, p, β согласно системе (23), из которой следует, что $\lambda_{i1} > 0$, а $\lambda_{i2} > 0$ по предположению теоремы. Положим $z_{ij} = \lambda_{i2j} / \lambda_{i1}$, $w_{ij} = -\beta_{ij} + \gamma_{ij} x_i^*$, тогда из первого уравнения системы (23) имеем

$$K_i - P x_i^* - \sum_{j=1}^{m} z_{ij} w_{ij} = 0.$$

Из второго и третьего уравнений системы (23)

$$\frac{\partial(c_i f_i(x_i^*))}{\partial x_{is}} - \lambda_{i1} P_s - \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij2} \gamma_{ijs} = 0\,.$$

Значит, в точке x_i^* выполнены все условия (25) и x_i^* является решением задачи нижнего уровня, т.е. $x_i^* = x_i^0$. Теорема доказана.

Для нахождения управления центра, обеспечивающего идеальное согласование интересов, нужно решить системы (26) и (23). Однако если система (23) не имеет решения, то идеальная согласованность недостижима. В этом случае центр должен решать задачу оптимального управления в иерархической системе (4) или (5). Для этого предлагается использовать условия (8), конкретный вид которых может быть получен аналогично тому, как это сделано в предыдущем разделе.

Возможен также случай, когда центр управляет величинами штрафов z_i и лимитов β_i, $i = 1, \ldots, n$, но не может управлять платежами p. Такая ситуация возникает, когда экологические платежи установлены на государственном уровне и у регионального центра нет возможности менять их. Из доказательства теоремы 3 вытекает, что идеальная согласованность в этом случае может быть достигнута при условии, что система (23) имеет решение при фиксированных единых платежах $\bar{p}$. Это весьма жесткое условие, поэтому в общем случае идеальной согласованности нет, а оптимальное управление центра определяется на основании условий (8).

5. Заключение

Предложенные математические методы исследования позволяют определять оптимальное управление в иерархических моделях региональных систем охраны окружающей природной среды и в некоторых случаях согласовывать интересы регионального центра и предприятий, сочетая эффективности промышленного производства и экологические ограничения.

Литература

1. БУРКОВ В.Н., НОВИКОВ Д.А. *Как управлять организациями*. – М.: Синтег, 2004. – 400 с.
2. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. *Игры с непротивоположными интересами*. – М: Наука, 1976. – 338 с.
3. ГОРЕЛИК В.А., ГОРЕЛОВ М.А., КОНОНЕНКО А.Ф. *Анализ конфликтных ситуаций в системах управления*. – М.: Радио и связь, 1991. – 286 с.
4. ГОРЕЛИК В.А., КОНОНЕНКО А.Ф. *Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах*. – М.: Радио и связь, 1982. – 144 с.
5. ЗОЛОТОВА Т.В. *Вопросы согласования интересов в региональной иерархической модели сохранения природных ресурсов* // Управление большими системами. – 2009. – №26. – С. 81–101.
6. МОИСЕЕВ Н.Н., АЛЕКСАНДРОВ В.В., ТАРКО А.М. *Человек и биосфера.* – М.: Наука, 1985. – 271 с.
7. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами*. – М.: Физматлит, 2007. – 583 с.

HIERARCHICAL REGIONAL MODELS OF ENVIRONMENT PROTECTION

Viktor Gorelik, Computer Center of the name A.A.Dorodnitsyn of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Doctor of Science, professor (gorelik@ccas.ru)
Tatiana Zolotova, Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Doctor of Science, assistant professor (tgold11@mail.ru)

Abstract: We study a fan-shaped hierarchical system with one top-level element and n elements at the lower level. Necessary and sufficient conditions for the optimal strategy of the upper level are formulated, which are used to study a hierarchical model of regional environmental protection. Several control mechanisms for environmental payments, limits, and penalties are suggested, which allow perfect coordination of interests of the upper and lower hierarchical levels.

Keywords: hierarchical system, perfect coordination of interests, environmental payments, limits, penalties.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии М.В. Губко

Поступила в редакцию 08.01.2015.
Опубликована 31.05.2015.