УДК 021.8 + 025.1
ББК 78.34

НОРМИРОВАНИЕ АНТРОПОГЕННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА ПРИРОДНУЮ СРЕДУ НА ОСНОВЕ ЭКОЛОГО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ[1]

Гурман В. И.[2],
(*Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН, Переславль-Залесский*)
Дамешек Л. Ю.[3],
(*ФГБОУ ВПО Иркутский государственный университет, Иркутск*)
Константинов Г. Н.[4]
(*НИУ Высшая школа экономики, Москва*)
Насатуева С. Н.[5]
(*ФГБОУ ВПО Бурятский государственный университет, Улан-Удэ*)
Расина И. В.[6],
(*Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН, Переславль-Залесский*)
Чемезова Т. В.[7],
(*ФГБОУ ВПО Иркутский государственный университет, Иркутск*)

---

[1] *Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №15-01-0192315 и РГНФ, грант №15-02-00314А.*

[2] *Владимир Иосифович Гурман, доктор технических наук, профессор (vig70@mail.ru).*

[3] *Лариса Юрьевна Дамешек, кандидат физико-математических наук, доцент (larisa.dameshek@yandex.ru).*

[4] *Геннадий Николаевич Константинов, доктор физико-математических наук, профессор (gkonstantinov@hse.ru).*

[5] *Соелма Номтоевна Насатуева, аспирант (soelmann@mail.ru).*

[6] *Ирина Викторовна Расина, доктор физико-математических наук (irinarasina@gmail.com).*

[7] *Татьяна Витальевна Чемезова, кандидат физико-математических наук, доцент (chetv2007@mail.ru).*

Дается краткий обзор эколого-экономических и социо-эколого-экономических математических моделей и рассматривается один из возможных подходов к проблеме реализации стратегий устойчивого развития регионов, родственный теоретико-игровым подходам — нормирование антропогенных воздействий на природную среду. Предлагается соответствующий математический аппарат применительно к моделям указанного типа как системам неоднородной структуры.

Ключевые слова: устойчивое развитие, математическая модель, динамические системы, антропогенные воздействия.

Введение

Социально-экономическое развитие регионов должно отвечать принципам устойчивого развития с учетом экологического фактора (sustainable development). Это особенно актуально для такой страны как Россия с ее огромным природно-ресурсным потенциалом, составляющим крупный экологический резерв планеты, за сохранение и рациональное использование которого эта исторически сложившаяся великая держава несет особую ответственность перед будущими поколениями.

Даже при самом талантливом государственном руководстве на всех уровнях (что весьма далеко от реальности) эффективность принимаемых управленческих решений, особенно в сложных современных геополитических условиях, невозможно обеспечить без сравнения многочисленных возможных вариантов, возникающих на практике, с оценкой их долгосрочных последствий (экономических, социальных, политических, экологических), что требует решения сложных междисциплинарных задач системного анализа. Однако соответствующей общепринятой практической методологии их решения и необходимых данных для комплексных оценок по критериям устойчивого развития на сегодня не существует, что приводит к односторонней направленности важных программ и проектов — преимущественно социально-экономической (таких, например, как Концепция долгосрочного социально-экономического развития Российской Федерации на период до 2020 года) либо природоохранной (таких как ФЦП «Охрана озера Байкал и социально-экономическое развитие природной территории на период до 2020 года»).

Для решения указанных проблем устойчивого развития наиболее подходящими представляются реализованные на современных компьютерах динамические модели, которые отражают эволюцию экономических, социальных и экологических компонент во взаимодействии при различных управленческих и внешних воздействиях, и методы их анализа, характерные для математической теории систем и управления. Это показали уже первые известные модели мировой динамики, содержащиеся в работах Дж. Форрестера и Д. Медоуза и др. [40, 44], выполненные в начале 1970-х годов под эгидой Римского клуба[8], где была количественно обоснована возможность наступления в сравнительно недалеком будущем глобального экологического кризиса при современных тенденциях мирового развития.

Они оказали большое влияние на «пробуждение экологического сознания» во всех слоях мирового сообщества вплоть до правительств, и тем самым на становление современной парадигмы устойчивого развития, сформулированной официально Конференцией ООН по окружающей среде и развитию (Рио-де-Жанейро, 3-14 июня 1992 года) в известном документе «Повестка дня на XXI век» (Agenda XXI), принятой ООН как программа действий для предотвращения экологического кризиса. Однако задолго до этого события необходимость разработки подоб-

---

[8] *Римский клуб — международная общественная организация, созданная итальянским промышленником Аурелио Печчеи и генеральным директором по вопросам науки Организации экономического сотрудничества и развития Александром Кингом в 1968 году, объединяющая представителей мировой политической, финансовой, культурной и научной элиты. Одной из главных своих задач Римский клуб считал привлечение внимания мировой общественности к глобальным проблемам посредством заказных докладов, отражающих перспективы развития биосферы и идеи гармонизации отношений человека и природы* (*Википедия*).

ных программ на различных уровнях была ясно осознана среди ученых самых разных специальностей, что привело к быстро нарастающему потоку междисциплинарных исследований в традиционных научных организациях и в новых, таких, например, как Международный институт прикладного системного анализа в Вене или Институт системного анализа Академии наук в Москве, и многих других в разных странах.

В этих исследованиях важную роль играют построение математических моделей регионов как социо-эколого-экономических систем и применение разнообразных математических методов, о чем свидетельствуют многочисленные публикации с середины 1970-х. Отметим лишь наиболее значимые, на наш взгляд, монографии и некоторые статьи последних лет [1, 2, 6, 7, 13, 16, 17, 24–29, 31, 33–38, 46] среди огромного вала работ, инициированного по существу работами [40, 44] и другими, выполненными по заказу Римского клуба.

Важным стимулом здесь послужило то обстоятельство, что модели, представленные в [40, 44], сами по себе уникальны и не могут быть непосредственно тиражированы и применены к многочисленным объектам, таким как отдельные страны, регионы, природные и производственные комплексы, изучение которых требуется для практического применения новых принципов взаимоотношений человека и природы. Будучи примерами эффективных междисциплинарных исследований, они в то же время не содержат методических материалов для организации таких исследований. С самого начала стало очевидным, что усилия должны быть направлены на развитие соответствующего информационно-компьютерного инструментария, включающего не только модели объектов различной сложности, но и эффективные методы их многовариантного анализа, соответствующее информационное и программное обеспечение. Иначе та или иная конкретная модель, в создание которой вложен большой труд, как правило, междисциплинарного коллектива, будет использоваться крайне неэффективно.

На этом пути возникают многие методологические проблемы, такие как:

- противоречие между растущей специализацией научных дисциплин и требованиями их интеграции при междисциплинарных исследованиях;
- идентификация моделей в условиях острого дефицита данных междисциплинарного характера и невозможности проведения натурных экспериментов над объектом;
- «антиинтуитивное» поведение сложных систем, препятствующее простому сценарному анализу, с одной стороны, а с другой — сложность и неоднородность математических моделей, препятствующая применению классических методов теории управления;
- отставание процессов создания алгоритмов и программ от прогресса вычислительной техники.

Эти проблемы и возможные подходы к их решению, апробированные в практических приложениях, в полной мере отражены в представленном списке публикаций.

В частности, в [24, 25] обосновывается целесообразность эволюционного развития необходимого класса моделей, начиная от известных классических моделей экономики, допускающих глубокий теоретический анализ путем их модификации и дополнения новыми блоками и описывающих поведение природных систем, что перекликается с работой группы известного экономиста В. Леонтьева [43], выполненной под эгидой ООН на основе обобщения соотношений экономического баланса. Однако для более глубокого анализа этого недостаточно; в [25] были сформулированы аналоги классических вариационных задач экономического роста как некоторых замыкающих вариационных принципов. Эти задачи были решены в общем виде, почти аналитически, с учетом их вырожденности эффективными методами теории вырожденных задач [9].

В [13] рассматриваются информационные проблемы и предлагаются подходы к идентификации в условиях дефицита информации, в частности, схема формирования новой статистики, содержащей данные о взаимодействии экономических, природных и социальных компонент. В [6, 28] содержатся результаты практического приложения предложенных моделей и методов к формированию стратегий устойчивого развития конкретных регионов. Заметим, что [13, 16] — коллективные монографии участников проведенных работ, и подобный «жанр», по-видимому, должен быть типичным для представления результатов междисциплинарных исследований.

Большое значение приобретают исследования, связанные с разработкой действенных механизмов реализации стратегий устойчивого развития в различных условиях взаимодействия агентов с различными интересами [1, 2, 5, 14, 16–18, 20, 21, 29, 31, 33–37, 42, 46], в том числе — с эффективным применением математических методов.

В [5, 26, 34–37] представлены результаты и исследования теоретико-игровых механизмов управления эколого-экономическими системами: комплексного оценивания интегрального риска и ущерба, штрафов, платы за риск, финансирования снижения уровня риска, компенсации затрат на снижение уровня риска, продажи квот на уровень риска, аудита, снижения ожидаемого ущерба, экономической мотивации, оптимизации региональных программ, согласования интересов органов управления.

Цель данной статьи — рассмотреть один из подходов к данной проблеме, близкий к теоретико-игровым, — нормирование антропогенных воздействий и предложить соответствующий математический аппарат применительно к эколого-экономическим моделям как системам неоднородной структуры.

1. Постановка и решение задачи нормирования

Рассматривается дискретно-непрерывная модель системы переменной структуры [15, 32]

$$\dot{x} = f(k,t,x,w), \;\; k \in \mathbf{K} = \{k_I, k_I+1, \ldots k_F\}, \;\; t \in [t_I(k), t_F(k)], \quad x \in \mathbb{R}^{n(k)}, \;\; w \in \mathbb{R}^{q(k)}, \;\; x(k_I) = x_I. \tag{1}$$

Здесь x_I — заданное начальное состояние. Функции $x(k,t)$ при каждом k описывают динамику состояния системы на отрезках $[t_I(k), t_F(k)]$, где $t_F(k) = t_I(k+1)$, и связаны между собой соотношениями

$$x(t_I(k+1)) = F(u(k+1))x(t_F(k)), \tag{2}$$

где $F(u(k+1))$ — матрица размера $n(k+1) \times n(k)$. Вектор $u(k) \in \mathbb{R}^{m(k)}$ и функция $w(k,t)$, $t \in [t_I(k), t_F(k)]$, характеризуют внешние воздействия на систему. При этом первое определяет начальное состояние $x(t_I)$ очередного отрезка, а второе изменяет эволюцию системы на этом отрезке.

Заданы параметрические семейства множеств $\mathbf{U}(k, \omega(k)) \subset \mathbb{R}^{m(k)}$, $\mathbf{W}(k, \nu(k)) \subset \mathbb{R}^{q(k)}$, $(\omega(k), \; \nu(k))\colon \omega(k) \in \mathbf{\Omega}(k) \subset \mathbb{R}^{m(k)}$, $\nu(k) \in N(k) \subset \mathbb{R}^{q(k)}$. При каждом k набор параметров $\omega(k)$, $\nu(k)$ порождает множество в фазовом пространстве в момент $t_F(k)$, соответствующее всевозможным воздействиям $u(k) \in \mathbf{U}(k, \omega(k))$, $w(k,t) \in \mathbf{W}(k, \nu(k))$, $t \in [t_I(k), t_F(k)]$ на систему (1)–(2), которое обозначим $\Xi(k, \omega, \; \nu)$. Пусть заданы множества $\mathbf{X}(k) = \{x \in \mathbb{R}^{n(k)} : Q(k,x) \geqslant 0\}$ и скалярная функция $\xi(\omega(k_I) \ldots \omega(k_F), \nu(k_I) \ldots \nu(k_F))$ и требуется максимизировать эту функцию при ограничениях

$$\Xi(k, \omega, \; \nu) \subset X(k), \; (\omega(k), \; \nu(k)) \in \mathbf{\Omega}(k) \times \mathbf{N}(k), \; k \in \mathbf{K}. \tag{3}$$

Содержательный смысл задачи нормирования состоит в определении управлений w, обеспечивающих попадание состояния социо-эколого-экономической системы в нужную область X, отвечающую требованиям устойчивого развития, путем оптимального (по экономическим критериям) ограничения множества антропогенных воздействий $\mathbf{U}$. Это некоторый вариант теоретико-игровой постановки, где с одной стороны выступают субъекты — источники антропогенных воздействий и в то же время экономических и иных благ (предприятия, население), а с другой — административный орган, определяющий нормы (квоты) отрицательных воздействий.

Эта постановка является обобщением задачи нормирования, исследованной в [3], где размерности всех величин на протяжении всего дискретно-непрерывного процесса принимались неизменными.

Для решения задачи исключим связи между состояниями на границах отрезков (2) и введем в соотношение вместо $x(t_F(k))$ дополнительное воздействие $y(k{+}1)$, удовлетворяющее условиям

$$y(k) \in \mathbf{Y}(\alpha(\mathbf{k}),\ \beta(\mathbf{k})),$$

$$\mathbf{Y}(\alpha(k),\ \beta(k)) = \{y(k) \in \mathbb{R}^{n(k)} : \alpha(k) \leqslant y(k) \leqslant \beta(k)\},\ k \in \mathbf{K}.$$

Дальнейшее исследование будем вести поэтапно. На первом этапе, считая k фиксированным, опишем всевозможные значения параметров $\alpha(k),\ \beta(k),\ \alpha(k) \leqslant \beta(k)$ и $(\omega(k),\ \nu(k)) \in \mathbf{\Omega}(k) \times \mathbf{N}(k),\ k \in \mathbf{K}$, при которых выполняется условие: всякое решение системы (1), соответствующее всевозможным $u(k) \in \mathbf{U}(k, \omega(k)),\ u(k+1) \in \mathbf{U}(k+1, \omega(k+1)),\ t \in [t_I(k), t_F(k)],\ y(k) \in \mathbf{Y}(\alpha(k),\ \beta(k))$ с начальным условием $x(k, t_I(k)) = F(u(k))y(k)$ удовлетворяет неравенствам

$$\alpha(k+1) \leqslant x(k, t_F(k)) \leqslant \beta(k+1), \tag{4}$$

$$Q(k+1, F(u(k+1))x(k, t_F(k))) \geqslant 0. \tag{5}$$

Неравенство (5) получено из (3) с учетом условия (2).

На втором этапе, объединяя эти задачи и исключая дополнительные переменные $\alpha(k),\ \beta(k),\ k \in \mathbf{K}$, перейдем к задаче дискретной оптимизации с ограничениями, в которой роль управлений будут играть параметры $\omega(k),\ \nu(k),\ k \in \mathbf{K}$. При этом будем опираться на принцип расширения [11, 22].

Введем в рассмотрение вспомогательные непрерывно дифференцируемые при каждом k функции $\varphi(k, t, x)$ и определим с их помощью следующие конструкции (аналоги конструкций

В.Ф. Кротова в соответствующих достаточных условиях оптимальности):

$$R^j(k,t,x,w) = \varphi_x^{j\mathrm{T}}(k,t,x)f(k,t,x,w) + \varphi(k,t,x)_t^j,$$
$$t \in [t_I(k), t_F(k)], \quad j = 1,\ 2,\ 3,$$

$$G^1(t_I(k), t_F(k), x(k), u(k), y(k)) = x(k) - \alpha(k-1) +$$
$$+\varphi^1(k, t_F(k), x) - \varphi^1(k, t_I(k), F(k, u(k))y(k)),$$

$$G^2(t_I(k), t_F(k), x(k), u(k), y(k)) = -x(k) + \beta(k+1) +$$
$$+\varphi^2(k, t_F(k), x) - \varphi^2(k, t_I(k), F(k, u(k))y(k)),$$

$$G^3(t_I(k), t_F(k), x(k), u(k), u(k+1), y(k)) =$$
$$= Q(k+1, F(u(k+1))x(k, t_F(k))) +$$
$$+\varphi^3(k+1, t_F(k), x(k)) - \varphi^3(k, t_I(k), F(k, u(k))y(k)),$$

$$\mu^j(k) = \int\limits_{t_I(k)}^{t_F(k)} \sup[\varphi_x^{j\mathrm{T}}(k,t,x)f(k,t,x,w) + \varphi(k,t,x)_t^j]dt,$$

$$x(k) \in \mathbb{R}^{n(k)},\ w(k) \in \mathbf{W}(k, \nu(k)),$$

$$m^1(k, \alpha(k), \beta(k), \omega(k)) = \inf\{x(k) + \varphi^1(k, t_F(k), x) -$$
$$-\varphi^1(k, t_I(k), F(k, u(k))y(k))\colon x(k) \in \mathbb{R}^{n(k)},$$
$$u(k) \in \mathbf{U}(k, \omega(k)),\ \alpha(k) \leqslant y(k) \leqslant \beta(k),\ Q(k, y(k), u(k)) \geqslant 0\},$$

$$m^2(k, \alpha(k), \beta(k), \omega(k)) = \inf\{-x(k) + \varphi^2(k, t_F(k), x) -$$
$$-\varphi^2(k, t_I(k), F(k, u(k))y(k))),\ x(k) \in \mathbb{R}^{n(k)},$$
$$u(k) \in \mathbf{U}(k, \omega(k)),\ \alpha(k) \leqslant y(k) \leqslant \beta(k),\ Q(k, y(k), u(k)) \geqslant 0\},$$

$$m^3(k,\alpha(k),\beta(k),\omega(k),\omega(k+1)) = \inf Q(k+1,F(u(k+1))x(k,t_F(k)))$$
$$+\varphi^3(k+1,t_I(k+1),x(k)) - \varphi^3(k,t_I(k),F(k,u(k))y(k)),$$
$$x(k)\in\mathbb{R}^{n(k)},\ u(k)\in\mathbf{U}(k,\omega(k)),\ u(k+1)\in\mathbf{U}(k+1,\omega(k+1)),$$
$$\alpha(k)\leqslant y(k)\leqslant\beta(k),\ Q(k,y(k),u(k))\geqslant 0.$$

Теорема 1. *Пусть существуют функции $\varphi^j(k,t,x)$ и векторы $\alpha(k)$, $\beta(k)$, такие, что при всех $k\in\mathbf{K}$ функции $\mu^j(k)$ интегрируемы на отрезке $[t_I(k),t_F(k)]$ и справедливы неравенства*

(6) $\quad m^1(k,\alpha(k),\beta(k),\omega(k)) - \alpha(k+1) - \mu^1(k,\nu(k))\geqslant 0,$

(7) $\quad m^2(k,\alpha(k),\beta(k),\omega(k)) + \beta(k+1) - \mu^2(k,\nu(k))\geqslant 0,$

(8) $\quad m^3(k,\alpha(k),\beta(k),\omega(k)) - \mu^3(k,\nu(k))\geqslant 0,$

(9) $\quad \sup Q_1(F_1(u_1))x_I\geqslant 0:\ u^1\in\mathbf{U_1}(\omega_{\mathbf{1}}),\ x_I=\alpha_1=\beta_1.$

Тогда $\boldsymbol{\Xi}(k,\omega(k),\nu(k))\subset\mathbf{X}(k)$ *при всех* $k\in\mathbf{K}$.

Доказательство. Покажем сначала, что из неравенств (6), (7), (9) для любого процесса $\overline{x}(k,t)$ системы (1)–(2), порожденного допустимыми воздействиями $u(k)$, $w(k,t)$, следует выполнение неравенств

(10) $\quad \alpha(k+1)\leqslant x(k,t_F(k))\leqslant\beta(k+1).$

Вдоль данного процесса из определения $m^j(k)$ и $\mu^j(k)$ вытекают неравенства

$$m^1(k,\alpha(k),\beta(k),\omega(k)) - \mu^1(k,\nu(k))\leqslant\overline{x}(k,t_F(k))+$$
$$+\varphi^1(k,t_F(k),x) - \varphi^1(k,t_I(k),F(k,u(k))y(k))-$$
$$\int\limits_{t_I(k)}^{t_F(k)}\sup[\varphi_x^{1\mathrm{T}}(k,t,\overline{x}(t))f(k,t,\overline{x}(k),w(k)) + \varphi^1(k,t,\overline{x}(t))_t]dt,$$
$$x(k)\in\mathbb{R}^{n(k)},\ w(k)\in\mathbf{W}(k,\nu(k)).$$

Если $x(k-1,t_I(k))$ удовлетворяет неравенствам

(11) $\quad \alpha(k)\leqslant x(k-1)\leqslant\beta(k),$

то, положив $y(k) = \overline{x}(k-1, t_I(k))$, с учетом соотношения (2), получаем

$$m^1(k, \alpha(k), \beta(k), \omega(k)) - \mu^1(k, \nu(k)) \leqslant \overline{x}(k, t_F(k)) +$$
$$+\varphi^1(k+1, t_F(k), \overline{x}(k, t_F(k))) - \varphi^1(k, t_I(k), \overline{x}(k, t_I(k))) -$$
$$\int\limits_{t_I(k)}^{t_F(k)} \sup[\varphi_x^{1\mathrm{T}}(k, t, \overline{x}) f(k, t, \overline{x}, w) + \varphi^1(k, t, \overline{x})_t] dt,$$
$$w(k) \in \mathbf{W}(k, \nu(k)),$$

где подынтегральное выражение есть полная производная функции $\varphi^1(k)$ в силу системы (1) при данном k. Поэтому из последнего неравенства получаем

$$m^1(k, \alpha(k), \beta(k), \omega(k)) - \mu^1(k, \nu(k)) \leqslant \overline{x}(k, t_F(k)).$$

Отсюда и из (6) имеем

$$\overline{x}(k, t_F(k)) \geqslant \alpha(k+1).$$

Аналогично из (7) будем иметь $\overline{x}(k, t_F(k)) \leqslant \beta(k+1)$. Если же $\overline{x}(k-1, t_I(k))$ не удовлетворяет условию (11), а выполняется, например, условие $\overline{x}(k-1) \geqslant \beta(k)$, тогда можно показать, что не будут выполнены аналогичные условия и для $\overline{x}(k-l, t_I(k-l)+1),\ l = 1, 2, \dots k$, что в итоге приведет к неравенству $x_I \geqslant \beta_1$, которое противоречит условию $x_I = \alpha_1 = \beta_1$. Следовательно, неравенства (10) имеют место. Из (8) аналогичным образом получим $Q(k+1,\ F(u(k+1))\ \overline{x}(k, t_F(k))) \geqslant 0$. Так как параметры $u(k) \in \mathbf{U}(k, \omega(k)),\ w(k,t) \in \mathbf{W}(k, \nu(k))$ и $y(k) \in \mathbf{Y}(k)$ выбраны из соответствующих множеств произвольно, то имеет место включение $\Xi(k, \omega(k), \nu(k)) \subset \mathbf{X}(k)$ при всех k. Теорема доказана.

Выберем параметры $\alpha(k+1),\ \beta(k+1)$ таким образом, чтобы неравенства (6) – (7) выполнялись как равенства. Тогда

(12) $\qquad \alpha(k+1) = m^1(k, \alpha(k), \beta(k), \omega(k)) - \mu^1(k, \nu(k)),$

(13) $\qquad \beta(k+1) = -m^2(k, \alpha(k), \beta(k), \omega(k)) + \mu^2(k, \nu(k)),$

(14) $$\alpha_1 = \beta_1 = x_I.$$

Равенства (12)–(14) можно рассматривать как дискретную управляемую систему, где фазовыми переменеными являются $\alpha(k),\ \beta(k)$, а управлениями — $\omega(k)),\ \nu(k),\ k \in \mathbf{K}$. Если подходящий набор функций $\varphi^j(k)$ найден, то исходная задача нормирования может быть заменена дискретной задачей оптимального управления: на траекториях системы (12)–(14) максимизировать функцию $\xi(\omega(k_I)\ldots\omega(k_F), \nu(k_I)\ldots\nu(k_F))$ при наличии фазовых ограничений (8), (9) и ограничений на управление $\omega(k) \in \mathbf{\Omega}(k),\ \nu(k) \in \mathbf{N}(k),\ k \in \mathbf{K}$. В результате решение задачи нормирования распадается на два этапа: поиск подходящих функций $\varphi^j(k)$ и решение исходной задачи оптимального управления.

Несколько замечаний о первой задаче. Произвольный набор функций $\varphi^j(k)$ и совместность неравенств (6)–(9) гарантирует непустоту множества управлений, обеспечивающих выполнение всех ограничений задачи дискретного оптимального управления. Однако при неудачном выборе функций $\varphi^j(k)$ в это множество могут не попасть параметры $\omega(k),\ \nu(k),\ k \in \mathbf{K}$, являющиеся решением задачи нормирования. Используя результаты, полученные в [11, 19], можно найти условие для определения функций $\varphi^j(k)$, при которых решение задачи нормирования всегда будет попадать в множество допустимых решений дискретной задачи оптимального управления. При этом для поиска таких функций потребуется решать уравнения в частных производных первого порядка типа уравнения Беллмана [11, 22].

Второй путь решения задачи связан с построением алгоритмов последовательного улучшения, когда на каждом шаге решаются две задачи — улучшение функций $\varphi^j(k)$, приводящее к расширению множества допустимых значений в дискретной задаче, и собственно решение дискретной задачи оптимального управления при заданных $\varphi^j(k)$. Для решения первой из них могут применяться алгоритмы, разработанные в [10, 23] для непрерывных задач оптимального управления.

2. Задача нормирования для линейных систем

В этом разделе для избежания громоздкости изложения будем считать размерности всех объектов не зависящими от k. В случае, когда системы (1)–(2) линейны

$$\dot{x}(k) = A(k,t)x(k) + B(k,t)w(k),\ t \in [t_I(k),\ t_F(k)], \tag{15}$$

$$x(t_I(k)) = D(k)x(k-1, t_F(k-1)) + P(k)u(k), \tag{16}$$

$$x(t(k_I)) = x_I,\ Q(k,x) = C(k)x(k) + d(k),$$

возможно построение замкнутых алгоритмов решения задачи нормирования. При этом условие (5) примет вид

$$C(k+1)D(k+1)x(k, t_F(k)) + C(k+1)P(k+1)u(k+1) \geqslant 0. \tag{17}$$

Рассмотрим неравенства (6)–(8) из теоремы, полагая $\varphi^j(k, x(k)) = S^j(k,t)x(k),\ j = 1, 2, 3,\ k \in \mathbf{K}$. Пусть матричные функции $S^1(k),\ S^2(k),\ S^3(k)$ удовлетворяют на отрезках $[t_I(k),\ t_F(k)]$ матричному дифференциальному уравнению

$$\frac{dS^j(k,t)}{dt} = -S^j(k,t)A(k,t),\ j = 1,\ 2,\ 3, \tag{18}$$

с условиями

$$S^1(k, t_F(k)) = -E, \tag{19}$$

$$S^2(k, t_F(k)) = E, \tag{20}$$

$$S^3(k, t_F(k)) = -C(t_F(k))D(t_F(k)). \tag{21}$$

Тогда неравенства (6)–(8) будут иметь вид:

(22)

$$-\alpha(k+1) - |S^1(k, t_I(k))D(k)|^+\beta(k) - |S^1(k, t_I(k))D(k)|^-\alpha(k) -$$
$$-|S^1(k, t_I(k))P(k)|^+\omega(k) - n^+(k) \geqslant 0,$$

(23)

$$\beta(k+1) + |S^1(k, t_I(k))D(k)|^-\beta(k) - |S^1(k, t_I(k))D(k)|^+\alpha(k) -$$
$$-|S^1(k, t_I(k))P(k)|^-\omega(k) - n^-(k) \geqslant 0$$

$$\begin{aligned} &|C(k+1)P(k+1)|^+\omega(k+1) + d(k+1) - \\ &-|S^3(k, t_I(k))P(k)|^-\alpha(k) - n^+(k) \geqslant 0, \end{aligned} \tag{24}$$

$$D_1\alpha_1 + P_1\omega_1 \geqslant 0. \tag{25}$$

Здесь через $|M|^+$ обозначена матрица, полученная из матрицы M заменой отрицательных элементов нулями, через $|M|^-$ — заменой положительных элементов нулями, через $n^+(k),\ n^-(k)$ обозначены соответственно интегралы

$$\int\limits_{t_I(k)}^{t_F(k)} |S^j(k,t)B(k)|^+\nu(k)dt, \quad \int\limits_{t_I(k)}^{t_F(k)} |S^j(k,t)B(k)|^-\nu(k)dt,$$

$j = 1,\ 2,\ 3$. При этом учтено равенство $S^1(k) = -S^2(k)$, следующее из условий (18)–(20). Дискретная управляемая система (12)–(14) преобразуется к виду:

(26)
$$\alpha(k+1) = |S^1(k,t_I(k))D(k)|^+\beta(k) - |S^1(k,t_I(k))D(k)|^-\alpha(k) - \\ -|S^1(k,t_I(k))P(k)|^+\omega(k) - n^+(k),$$

(27)
$$\beta(k+1) = -|S^1(k,t_I(k))D(k)|^-\beta(k) - |S^1(k,t_I(k))D(k)|^+\alpha(k) - \\ -|S^1(k,t_I(k))P(k)|^-\omega(k) - n^-(k).$$

Таким образом, исходная задача нормирования сведена к дискретной линейной задаче оптимального управления (24)–(27), целевая функция которой имеет вид

$$\xi(\omega,\ \nu) \to \max, \quad (\omega,\ \nu) \in \mathbf{\Omega} \times \mathbf{N}.$$

При этом матрицы $S^1(k,t_I(k)),\ S^3(k,t_I(k))$ определяются из соотношений (19) и (21). Заметим, что для линейного процесса условия (6)–(9) являются достаточными и необходимыми условиями выполнения включения $\mathbf{\Xi}(k,\omega(k),\ \nu(k)) \subset \mathbf{X}(k)$ при всех $k \in \mathbf{K}$.

3. Задача нормирования выбросов загрязняющих веществ вдоль русла реки

Пусть имеется K источников выбросов загрязняющих веществ с интенсивностью $u(k)$, расположенных вдоль русла реки в точках (k), $\quad k = 1, 2, \ldots, K$. Требуется определить предельно допустимые выбросы (ПДВ) (интенсивность $\omega(k)$) каждого источника при соблюдении предельно допустимых концентраций

(ПДК) загрязняющих веществ в контрольных створах $x(k)^{\overline{k}}$, которые расположены в зоне неполного перемешивания. Интенсивность $\omega(k), \quad k = 1, 2, \ldots, K$, должна быть такой, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{k=1}^{K} \xi(k, \omega(k)) \longrightarrow max,$$

где $\xi(k, \omega(k))$ – максимальная возможная прибыль, получаемая предприятием в п. k, если предельные выбросы загрязняющих веществ равны $\omega(k)$.

Распространение неконсервативного вещества вдоль русла будем описывать системой дифференциальных уравнений на этапе k, $k = 1, 2, \ldots, K$:

$$S(k,x) = -\frac{1}{Q(x)}\frac{dQ(x)}{dx}S(k,x) - \frac{\overline{k}S_t(k,x)}{v(k)}, \tag{28}$$
$$x \in [x(k) + l(k), x(k+1)],$$

связанных между собой отношениями

$$S(k, x(k)) = S(k-1, x(k-1)) + \frac{1}{M(k)}\cdot$$
$$\cdot \iint_{M(k)} u(k) \exp(f(k,y,z))/l(k)\mathbf{D}_y\mathbf{D}_z\times \tag{29}$$
$$\times erf(z_{1k}) \times erf(z_{2k})dydz,$$
$$S_I(x_1) = S_\Phi,$$

где

$$f(k,y,z) = -y^2v^2/4\mathbf{D}_y l(k)) - z^2 v(k)/4\mathbf{D}_z l(k) - \overline{k}l(k)/v(k),$$

(30)

$$z_{1k} = B(k)\sqrt{v(k)}/4\sqrt{\mathbf{D}_y l(k)}, \quad z_{2k} = H(k)\sqrt{v(k)}/4\sqrt{\mathbf{D}_z l(k)},$$
$$erf(z) = \int_0^z e^{-\xi^2}d\xi$$

$u(k)$ – интенсивность k-го источника; S_Φ – фоновая концентрация вещества для первого источника; $Q(x(k))$ – расход воды в точке $x(k)$; $S(k, x(k))$ – концентрация загрязняющего вещества в точке $x(k)$; $v(k), B(k), H(k)$ – скорость, ширина и глубина реки в створе полного перемешивания k-го источника, т. е. в точке

$x(k) + l(k)$ ($l(k)$ — длина зоны достаточно полного перемешивания k-го источника); $\mathbf{D}_y, \mathbf{D}_z$ — коэффициенты турбулентной дисперсии; $M(k)$ — площадь живого сечения реки в створе полного перемешивания k-го источника; $\overline{k}$ — коэффициент, характеризующий деструкцию загрязняющего вещества. Второе слагаемое в (29) получено из точного решения уравнений турбулентной диффузии [30]. Условие (5) задачи нормирования в данном случае будет иметь вид

(31) $$\text{ПДК} - \bar{S}(k+1, x^{\overline{k}}(k+1)) \geqslant 0,$$

(32)

$$\bar{S}(k+1, x^{\overline{k}}(k+1)) = S(x(k+1)) + \max_{y,z \in M(k, x^{\overline{k}}(k+1))} u(k+1)\times,$$

$$\times \exp f^{\overline{k}}(k+1, y, z)/erf(z^{\overline{k}}(k+1)) \times erf(\bar{z}^{\overline{k}}(k+1)),$$

$$f^{\overline{k}}(k+1)(y,z) = -y^2\sqrt{v(k+1)}/4\mathbf{D}_y(x^{\overline{k}}(k+1) - x(k+1)) -$$

$$-z^2\sqrt{v(k+1)}/4\mathbf{D}_z(x^{\overline{k}}(k+1) - x(k+1)) -$$

$$-\overline{k}(x^{\overline{k}}(k+1) - x(k+1))/v(k),$$

$$z^{\overline{k}}(k+1) = B(k+1)\sqrt{v(k+1)}/4\sqrt{\mathbf{D}_y(x^{\overline{k}}(k+1) - x(k+1))},$$

$$\bar{z}^{\overline{k}}(k+1) = H(k+1)\sqrt{v(k+1)}/4\sqrt{\mathbf{D}_z(x^{\overline{k}}(k+1) - x(k+1))}.$$

Дополнительные ограничения (4) перепишем так: $\alpha(k+1) \leqslant S(k, t_F(k)) \leqslant \beta(k+1)$.

Задача нормирования выбросов загрязняющих веществ сводится к задаче линейного программирования.

В (28) обозначим

$$-\frac{1}{Q(k,x)}\frac{dQ(k,x)}{dx} - \frac{\overline{k}}{v(k)} = A(k,x).$$

В выражении (29) во втором слагаемом $u(k)$ не зависит от y, z поэтому $u(k)$ вынесем за знак двойного интеграла и введем обозначение

$$P(k) = \frac{1}{M(k)} \cdot \iint_{M(k)} u(k)\exp(f(k,y,z))/l(k)\mathbf{D}_y\mathbf{D}_z \times$$

$$\times erf(z_{1k}) \times erf(z_{2k})dydz.$$

Тогда выражения (28)–(30) можно записать следующим образом:

$$\frac{dS(k,x)}{dx} = A(k,x)S(k,x), \quad x \in [x(k), x(k+1)], \tag{33}$$

$$S(k, x(k)) = S(k-1, x(k)) + P(k)u(k), \tag{34}$$

$$S_I(x_1) = S_\Phi. \tag{35}$$

Учитывая, что второе слагаемое в (32) линейно относительно $u(k)$, обозначим

$$\mathbf{D}(k+1) = \max_{y,z \in M(k, x^{\overline{k}}(k+1))} \left[\frac{1}{(x^{\overline{k}}(k+1) - x(k+1))\sqrt{\mathbf{D}_y \mathbf{D}_z}} \times \right.$$
$$\left. \times \exp(f^{\overline{k}}(k+1)(y,z))/erf(z^{\overline{k}}(k+1)) \times erf(\bar{z}^{\overline{k}}(k+1)) \right]$$

и представим его в виде $\mathbf{D}(k+1)u(k+1)$. Тогда из (32) получим

$$\bar{S}(k+1, x^{\overline{k}}(k+1)) = S(k, x(k+1)) + \mathbf{D}(k+1)u(k+1),$$

а из (31) –

$$Q(k+1, S(k)) = \text{ПДК} - S(k, x(k+1)) - \\ - \mathbf{D}(k+1)u(k+1) \geqslant 0. \tag{36}$$

Если задача нормирования выбросов загрязняющих веществ решается с условием соблюдения ПДК в створе достаточно полного перемешивания, то условие (31) можно переписать:

$$Q(k+1, S(k)) = \text{ПДК} - S(k, x(k+1)) - P(k+1)u(k+1) \geqslant 0,$$

где

$$P(k+1) = \frac{1}{M(k+1, x(k+1) + l(k+1))} \times$$
$$\iint_{M(k+1, x(k+1)+l(k+1))} \exp(f(k+1,y,z))/l(k+1)\sqrt{\mathbf{D}_y \mathbf{D}_z} \times$$
$$\times erf(z(k+1)) \times erf(\bar{z}(k+1)) dydz.$$

На описанной модели проведены расчеты ПДС для источников загрязнения на р. Селенге; исходная информация приведена в таблице 2 и 3. Результаты расчетов приведены в таблице 4. Расчеты проводились с условием соблюдения ПДК в контрольном створе $x^{\overline{k}}(k) = x(k) + l(k)$ где $l(k)$ — длина зоны достаточного перемешивания — принята равной 5 км.

Таблица 1. Гидрологическая информация

Гидрологический пункт	Расстояние до источника, км	Расход года 95%-й обеспеченности, $м^3/с$
Наушки	0	18,2
Ново-Селенгинск	116	29,2
Мостовой	252	43,4
Кабанск	396	44,9

Таблица 2. Гидрохимическая информация

Загрязняющее вещество	ПДК, $мг/м^3$	Коэффициент деструкции, 1/сут	Начальная концентрация, $мг/м^3$
Фенол	0,001	0,5	0,0
СПАВ	0,1	0,6	0,0

Таблица 3. Значения предельно допустимых веществ (лето)

Пункт сброса	Расстояние от п. Наушки, км	ПДВ, кг/ч	
		Фенол	СПАВ
Наушки	0	0,021	2,148
Селендума	100	0,038	3,853
Иволгинск	220	0,0768	7,724
Улан-Удэ	244	0,057	5,84
Татаурово	290	0,073	7,414
Селенгинск	344	0,0702	7,131
Кабанск	396	0,049	5,03

Заключение

Созданные на сегодня многочисленные модели взаимодействия человеческой деятельности и природной среды позволяют разрабатывать на их основе математическими методами разнообразные административные и экономические механизмы реализации стратегий устойчивого развития с учетом отношений различных агентов, принимающих решения. Среди них важное практическое значение имеет нормирование антропогенных воздействий на природные объекты, которое может быть использовано как самостоятельно, так и в комбинации с другими механизмами — экономическими (например, торговля квотами) и процедурами согласования интересов.

Рассмотренный выше метод нормирования для дискретно-непрерывных динамических систем может быть обобщен на более сложные иерархические модели сетевой структуры. Об этом говорит исследованная в [2] задача нормирования применительно к модели бассейна реки как дерева операторов.

Литература

1. АКОПОВ А.С., БЕКЛАРЯН Л.А., БЕКЛАРЯН А.Л. И ДР. *Укрупненная модель эколого-экономической системы на*

примере Республики Армения // Компьютерные исследования и моделирование. – 2014. – Т. 6, №4. – С. 621–631.

2. АНОХИН Ю.А., ГОРСТКО А.Б., ДАМЕШЕК Л.Ю. И ДР. *Математические модели и методы управления крупномасштабным водным объектом.* – Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1987. – 198 с.
3. БАТУРИН В.А., ДЫХТА В.А., МОСКАЛЕНКО А.И. И ДР. *Методы решения задач теории управления на основе принципа расширения.* – Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1990. – 190 с.
4. БУДАЕВА Д.Ц., ГУСЕВА И.С., НАСАТУЕВА С.Н. *Влияние инвестиций и прямых инновационных затрат на оптимальные стратегии развития региона* // Программные системы: теория и приложения: электрон. научн. журн. – 2012. – Т. 3, №5(14). – С. 23–32. – URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2012_5_23-32.pdf (дата обращения: 27.01.2015).
5. БУРКОВ В.Н., НОВИКОВ Д.А., ЩЕПКИН А.В. *Механизмы управления эколого-экономическими системами* / Под ред. академика С.Н. Васильева. – М.: Издательство физико-математической литературы, 2008. – 244 с.
6. ВИКУЛОВ В.Е., ГУРМАН В.И., ДАНИЛИНА Е.В. И ДР. *Эколого-экономическая стратегия развития региона: Математичеокое моделирование и системный анализ на примере Байкальского региона.* – Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1990. – 184 с.
7. ГИМЕЛЬФАРБ А.А., ГИНЗБУРГ Л.Р., ПОЛУЭКТОВ Р.А. И ДР. *Динамическая теория биологических популяций.* – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1974. – 456 с.
8. ГОРСТКО А.Б., УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Введение в моделирование эколого-экономических систем.* – Изд-во РГУ, 1990. – 112 с.
9. ГУРМАН В.И. *Вырожденные задачи оптимального управления*. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
10. ГУРМАН В.И. *Принцип расширения в задачах управле-*

ния. – М.: Наука, 1985. – 288 с.

11. ГУРМАН В.И. *Принцип расширения в задачах управления*. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Физматлит, 1997. – 288 с.
12. ГУРМАН В.И., БУДАЕВА Д.Ц., НАСАТУЕВА С.Н. *Оптимальное управление биопопуляцией с учетом инноваций на модели с возрастной структурой* // Вестник Бурятского государственного университета. Математика и информатика. – 2012. – №2. – С. 15–25.
13. ГУРМАН В.И., ДЫХТА В.А., КАШИНА П.Ф. И ДР. *Эколого-экономические системы: модели, информация, эксперимент.* – Новосибирск: Наука, 1987. – 216 с.
14. ГУРМАН В.И., РАСИНА И.В., ЛИБЕНСОН И.Р. И ДР. *Приложение социо-эколого-экономической модели к оценке эффективности инвестиционных проектов* // Известия Института экономических исследований Бурятского государственного университета. (электронный научный журнал ISSN 2305-3453). – 2013. – №2. – URL: http://www.inser.pro/upload/iblock/68e/Gurman[1].pdf (дата обращения: 27.01.2015).
15. ГУРМАН В.И., РАСИНА И.В., ТРУШКОВА Е.А. И ДР. *Иерархическая модель неоднородной дискретной системы и ее приложения* // Управление большими системами. – 2013. – №41. – С. 249–269.
16. ГУСЕВ А.А., МАРТЫНОВ А.С., МОТКИН Г.А. И ДР. *Новые финансовые механизмы сохранения биоразнообразия.* – М.: ИПР РАН, 2002. — 204 с.
17. ДАНИЛОВ-ДАНИЛЬЯН В.И., ХРАНОВИЧ И.Л. *Управление водными ресурсами. Согласование стратегий водопользования.* – М.: Научный мир, 2010. – 232 с.
18. ДЕНИСОВ В.И. *Народнохозяйственные модели оптимального развития природных комплексов.* – М.: Наука, 1978. – 191 с.
19. ДЕНХЭМ В., БРАЙСОН А. *Задачи оптимального программирования при наличии ограничений типа неравен-*

ства // Ракетная техника и космонавтика. – 1964. – Т. 2, №1. – С. 34–47.

20. ДУМОВА И.И. *Социально-экономические основы управления природопользованием в регионе.* – Новосибирск: Наука, 1996. – 163 с.
21. КОНСТАНТИНОВ Г.Н. *Нормирование воздействий на динамические системы.* – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1983. – 188 с.
22. КРОТОВ В.Ф., ГУРМАН В.И. *Методы и задачи оптимального управления.* – М.: Наука, 1973. – 446 с.
23. КРОТОВ В.Ф., ФЕЛЬДМАН И.Н. *Итерационный метод решения задач оптимального управления* // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1983. – №2. – С. 160–168.
24. *Модели природных систем* / Под ред. В.И. Гурмана, И.П. Дружинина. – Новосибирск: Наука, 1978. – 224 с.
25. *Модели управления природными ресурсами* / Под ред. В.И. Гурмана. – М.: Наука, 1981. – 264 с.
26. *Моделирование и управление процессами регионального развития* / Под ред. С.Н. Васильева. – М.: Физматлит, 2001. – 432 с.
27. *Моделирование процессов в природно-экономических системах* / Отв. ред. В.И. Гурман, А.И. Москаленко. – Новосибирск: Наука, 1982. – 176 с.
28. *Моделирование социо-эколого-экономической системы региона* / Под ред. В.И. Гурмана, Е.В. Рюминой. – М.: Наука, 2003. – 175 с.
29. МОТКИН Г.А. *Основы экологического страхования.* – М.: Наука, 1996. – 192 с.
30. *Основы прогнозирования качества поверхностных вод*. – М.: Наука, 1985. – 179 с.
31. *Охрана окружающей среды (модели управления чистотой природной среды)* / Под ред. К.Г. Гоффмана, А.А. Гусева. – М: Экономика, 1977. – 231 с.
32. РАСИНА И.В. *Иерархические модели управления системами неоднородной структуры.* – М.:Физматлит, 2014. –

160 с.
33. РЮМИНА Е.В. *Экологический фактор в экономико-математических моделях.* – М.: Наука, 1980. – 165 с.
34. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Управление эколого-экономическими системами.* – М.: Вузовская книга, 1999. – 132 с.
35. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Теоретико-игровые принципы оптимальности иерархического управления устойчивым развитием* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2005. – №4. – С. 72–78.
36. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Равновесия в моделях иерархически организованных динамических систем управления с учетом требований устойчивого развития* // Автоматика и телемеханика. – 2014. – №6. – С. 86–102.
37. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Управление сложными эколого-экономическими системами* // Автоматика и телемеханика. – 2009. – №5. – С. 169–179.
38. *Agenda XXI. An Action Plan for the Next Century, endorsed by United Nations Committee on Environment and Development.* – Rio de Janeiro: United Nations Association, 1992. – 300 p.
39. DALY H.E., COBB J.B. *For the Common Good: Redirecting the Economy toward the Community, the Environment and a Sustainable Future.* – Boston: Beacon Press, 1994. – 534 p.
40. FORRESTER J.W. *World dynamics.* – 1st edition. – Cambridge, Mass.: Wright-Allen Press Inc., 1971. – 142 p.
41. GURMAN V.I. *The extension principle in the problems of sustainable development.* – Moscow: Fizmatlit, 2005. – 128 p.
42. HUETING R. *Correcting National Income for Environmental Losses: a Practical Solution for a Theoretical Dilemma* // Ecological economics: The science and management of sustainability. – New York: Columbia University Press, 1991. – P. 194–213.
43. LEONTIEF W.W. *The future of the world economy* // A UN study by Wassily Leontief et al. – New York: Oxford

University Press, 1977. – 118 p.

44. MEADOWS D.H. *The Limits to growth: A report for the Club of Rome's Project on the Predicament of Mankind.* – 1st edition. – New York: Universe Books, 1972. – 205 p.
45. *Operations research and environmental management* / Eds. C. Carraro, A. Haurie. – Dordrecht: Kluwer academic publishers, 1996. – 259 p.
46. OTT W.R. *Environmental Indices: Theory and Practice.* – Michigan: Ann Arbour Science Publishers Inc., 1978. – 371 p.

QUOTING ANTHROPOGENIC ENVIRONMENTAL IMPACTS ON THE BASIS OF ECOLOGICAL AND ECONOMIC MODELS

Vladimir Gurman, Program Systems Institute of RAS, Pereslavl-Zalessky, Doctor of Science, professor (vig70@mail.ru).
Larisa Dameshek, Irkutsk State University, Irkutsk, Candidate of Sciences, associate professor (larisa.dameshek@yandex.ru).
Gennady Konstantinov, National Research University – Higher School of Economics, Moscow, Doctor of Science, professor (gkonstantinov@hse.ru).
Soelma Nasatueva, Buryat State University, Ulan-Ude, postgraduate (soelmann@mail.ru).
Irina Rasina, Program Systems Institute of RAS, Pereslavl-Zalessky, Doctor of Science (irinarasina@gmail.com).
Tatyana Chemesova, Irkutsk State University, Irkutsk, Candidate of Sciences, associate professor (chetv2007@mail.ru).

Abstract: We briefly survey the mathematical models of ecological-economical and social-ecological-economical systems and introduce an approach to the problem of implementation of regional sustainable development, which is related to the game-theoretic philosophy, and consists in assigning quotas on anthropogenic impact. We consider a system as heterogenous one and suggest appropriate mathematical tools.

Keywords: sustainable development, mathematical model, dynamic systems, anthropogenic impacts.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Г.А. Угольницким

Поступила в редакцию 01.02.2015.
Дата опубликования 31.05.2015.