УДК 519.8
ББК 22.18

ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ РЫБНЫМ ПРОМЫСЛОМ В УСЛОВИЯХ КВОТИРОВАНИЯ

Иванко Н. С.[1]
(*Дальневосточный государственный технический рыбохозяйственный университет, Владивосток*),
Абакумов А. И.[2]
(*Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток*)

Предложены модельные варианты управления рыбным промыслом с помощью квот (*разрешений на вылов объектов промысла*). *Показаны варианты линеаризации начальных нелинейных задач или линеаризованные способы их исследования и решения. Сформулированы игровые задачи о рыбном промысле. Для задач оптимизации распределения квот и задач максимизации дохода от промысла приведены иллюстративные примеры.*

Ключевые слова: оптимальный сбор урожая, математическое моделирование, оптимизация.

1. Введение

Управление морскими рыбными промыслами содержит много аспектов. В статье рассматривается только процедура распределения разрешений (квот) на вылов рыб и других морских организмов. Рыбные промыслы отличаются от многих других процессов сбора урожая многовидовыми технологиями. Орудия промысла (тралы, сети, ловушки и т.п.) являются многовидовыми в смысле изымаемых ими особей многих биологиче-

---

[1] *Нина Сергеевна Иванко, преподаватель* (*ivns@mail.ru*).
[2] *Александр Иванович Абакумов, доктор физико-математических наук, профессор* (*abakumov@iacp.dvo.ru*).

ских видов. Субъекты промысла (будем далее для краткости называть их «рыбаками») обладают определенным набором орудий промысла, который далее будет именоваться способом промысла. Таким образом, каждый рыбак отождествлен с одним и только одним способом промысла.

Одним из способов управления промыслами является выдача рыбакам уполномоченными органами разрешений (квот) на определенные объемы вылова определенных биологических видов или групп близких видов в определенное время и в определенных промысловых районах. Эти виды или объединенные группы видов называются объектами промысла. Разрешения на промысел выдаются по объектам, а сам промысел из-за орудий лова является многовидовым, с выловом других, не предусмотренных разрешениями, объектов. Выловы непредусмотренных объектов будем называть приловами. Проблема учета приловов в математическом смысле приводит к задачам линейной и нелинейной (квадратичной) оптимизации. Задачи описывают способы распределения квот, при которых ожидаемый объем вылова по каждому виду будет близок к заранее определенному допустимому объему вылова. Каждый рыбак обладает определенными возможностями промысла, его доход индивидуален. Это приводит к игровой постановке задач о промысле, подобный подход тоже рассматривается в статье.

2. Постановка задачи

Задача оптимизации распределения квот сформулирована в статье [1]. Проблема формирования квот и соответствия результатов промысла заранее выданным квотам обсуждается нами в работе [2] на примере рыбных промыслов в прикамчатских водах. Здесь мы рассмотрим серию взаимосвязанных задач распределения квот для определенного морского промыслового района. Пусть имеется m объектов промысла и n способов промысла (предприятий-судовладельцев с определенными типами судов и орудий лова). Рассматривается выделенный промысловый период (например, 1 год). Индексы $i, j = 1, \ldots, m$ соответствуют объектам промысла, индекс $k = 1, \ldots, n$ – способам промысла. Адекватная рыбному промыслу задача имеет $m, n > 1$, что мы и предполагаем в дальнейшем.

Через α_{ijk} обозначены доли объекта i в вылове способом k при квоте на объект j (коэффициенты прилова). Эти коэффициенты вычисляются на основе ретроспективных данных о промыслах в этом районе.

Пусть $v = (v_1, \ldots, v_m)$ – заданный неотрицательный вектор допустимых уловов для каждого объекта промысла. Требуется найти расчётные оценки квот u_{jk} на вылов объекта j способом промысла k.

Приведем эту задачу к стандартным обозначениям. Для каждого способа промысла k введем матрицу приловов $A_k = (\alpha_{ijk})_{i,j=1}^{m}$ и вектор квот $x_k = (u_{1k}, \ldots, u_{mk})^*$ (здесь и далее символ «*» означает действие транспонирования). Переобозначим вектор допустимых уловов: $v = b$. Через $A = (A_1 \mid A_2 \mid \ldots \mid A_n)$ обозначим общую неотрицательную матрицу приловов, состоящую из матриц приловов для каждого способа промысла. Ее размерность равна $m \times s$, где $s = m \cdot n$. Общий вектор квот обозначаем $x = (x_1^*, \ldots, x_n^*)^*$.

Тогда задача принимает стандартный вид:

$$\text{(1)} \quad \begin{cases} \Phi(x) = \|Ax - b\|^2 \to inf, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Здесь под нормой понимается евклидова норма в конечномерном линейном пространстве R^m. Задачу (1) назовем задачей *мягкой* оптимизации.

Наряду с задачей (1) будем рассматривать такую же задачу с условием непревышения разрешенных объемов вылова для каждого объекта промысла:

$$\text{(2)} \quad \begin{cases} \|Ax - b\|^2 \to inf, \\ Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Задачу (2) назовем задачей *жесткой* оптимизации. В задаче (2) в дальнейшем будет удобнее использовать не евклидову, а ромбическую норму:

$$\|x\|_d = \sum_{j=1}^{q} |x_j| \text{ для } x = (x_1,\, x_2,\, ...,\, x_q)^* \in R^q \text{ [3].}$$

Эта норма на множестве неотрицательных векторов является линейной, чем мы и воспользуемся в дальнейшем.

С задачами (1) и (2) связаны два множества. Через G обозначим множество всех решений задачи (1). Ниже будет введено множество D «условных» решений задачи мягкой оптимизации (1), являющееся подмножеством множества G .

На множестве D «условных» решений задачи (1) можно рассматривать игровую задачу максимизации дохода от промысла для каждого рыбака. Обозначим для рыбака номер k через p_{jk} доход от реализации единицы объема квоты номер j без учета затрат, а c_{jk} – коэффициент затрат на организацию промысла по реализации этой квоты. Если через $p_k = (p_{1k}, \ldots, p_{mk})$ обозначить вектор коэффициентов удельного дохода от реализации продукции, а через $c_k = (c_{1k}, \ldots, c_{mk})$ – вектор коэффициентов затрат, то задача максимизации общего дохода для рыбака номер k примет вид

$$(3) \quad \begin{cases} \Psi_k(x_k) = p_k x_k - x_k^* C_k x_k \to sup, \\ x \in D. \end{cases}$$

Будем предполагать, что вектор p_k и диагональная матрица $C_k = diag\ c_k$ с вектором c_k по главной диагонали строго положительны.

Задача (3) формулируется для каждого рыбака. На ее основе можно рассматривать различные игровые постановки задач: искать арбитражные решения, рассматривать варианты коопераций и иерархий между игроками [8]. Для динамических систем такие задачи рассматривались, в частности, в работах [3, 9].

Здесь же мы рассмотрим ситуацию коалиции всех рыбаков с общим критерием оптимизации дохода (все рыбаки признаны равноправными):

$$(4) \quad \begin{cases} \Psi(x) = \sum_{k=1}^{n} \Psi_k(x_k) \to sup, \\ x \in D. \end{cases}$$

Задачу (4) будем называть задачей максимизации дохода. Эта задача также решается на множестве D «условных» решений задачи мягкой оптимизации (см. ниже).

3. Исследование задач

3.1. ЗАДАЧА МЯГКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В задаче (1) используем евклидову норму. Тогда

$$\Phi(x+\Delta x)=\Phi(x)+2\Delta x^{*}(A^{*}Ax-A^{*}b)+\left\|A\Delta x\right\|^{2}.$$

Из указанного равенства следует, что множество решений задачи (1) равно

(5) $$G=\left\{x\in R^{s}\,\middle|\,A^{*}Ax-A^{*}b\geq 0, x^{*}(A^{*}Ax-A^{*}b)=0, x\geq 0\right\}.$$

Множество G имеет нелинейное описание. Решение задачи (1) будем искать одним из численных методов поиска оптимального решения – методом градиентного спуска с переменным шагом [5]. Этот метод характеризуется невысокой гарантией сходимости даже для квадратичного функционала. Поэтому можно рассмотреть иные способы решения задачи (1).

Задача минимизации квадратичного функционала

(6) $$\Phi(x)=||Ax-b||^{2}$$

с евклидовой нормой без ограничения знака x имеет множество решений

$$D_0=\{x\in R^{s}\mid A^{*}Ax=A^{*}b\}.$$

В нашем случае матрица A имеет размерность $m\times s$, где $s = m{\cdot}n > m$. Ранг матрицы A $r = r(A)\leq m$, матрицы A^{*} и $A^{*}A$ имеют такой же ранг [4]. Система уравнений

(7) $$A^{*}Ax=A^{*}b$$

совместна, так как ранг расширенной матрицы $(A^{*}A\mid A^{*}b)$ также равен r. Обозначим через x_0 одно из решений системы (7). Тогда $D_0 = x_0 + L$, где L – подпространство решений однородной системы $A^{*}Ax = 0$. Размерность этого подпространства равна $s-r\geq 1$. Это означает, что множество D_0 континуально. Обозначим $D = D_0\cap R_{+}^{S}$. Очевидно, что $D\subset G$. Множество D назовем множеством «условных» решений задачи (1), так как оно появляется из множества D_0 решений задачи безусловной минимизации функционала (6) добавлением условия неотрицательности. Множество D описывается линейно, хотя бы один из элементов этого множества можно искать решением следующей задачи линейного программирования:

$$(8)\quad \begin{cases} \|y\|_d \to inf, \\ A^* A x - y = A^* b, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

(здесь $\|y\|_d$ – упомянутая выше ромбическая норма для соответствующего линейного пространства).

Если оптимальное решение $(\bar{x}, \bar{y})$ имеет $\bar{y} = 0$, то $\bar{x} \in D \subset G$ является решением задачи (1). Если же $\bar{y} \neq 0$, то множество $D = \varnothing$ и $\bar{x}$ можно рассматривать в качестве приближения к решению задачи (1). Таким образом, мы предлагаем решать задачу (1) двумя приближенными методами:

– методом градиентного спуска;

– решением вспомогательной задачи линейного программирования (8).

Решение задачи (8) будем называть линейным методом решения задачи мягкой оптимизации.

3.2. ЗАДАЧА ЖЕСТКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В задаче (2) будем использовать ромбическую норму. Эта норма на множестве неотрицательных векторов является линейной.

Вместо квадрата нормы будем минимизировать саму норму (оптимальные решения $\bar{x}$ при этом не меняются). Тогда задача (2) сводится к задаче линейного программирования следующего вида:

$$(9)\quad \begin{cases} \|Ax\|_d \to sup, \\ Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Переход от (2) к (9) справедлив из-за неотрицательности матрицы A.

3.3. ЗАДАЧА МАКСИМИЗАЦИИ ДОХОДА

Задача (4) является типичной задачей квадратичного программирования, широко известны ее свойства и численные методы решения [6, 7].

Все же попробуем провести свой анализ задачи, пользуясь ее специфичностью. Задача (4) может быть записана в виде

$$\begin{cases} x^* Cx - px \to inf, \\ A^* Ax = A^* b, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Для решения этой задачи можно использовать метод градиентного спуска. Составляем функцию Лагранжа

$$L(x, \lambda_0, \lambda, \mu) = \lambda_0 (x^* Cx - px) + \lambda \left[A^* Ax - A^* b \right] - \mu \cdot x$$

при $\lambda_0 = 1$ и $\mu \geq 0$ с условиями дополняющей нежесткости $\mu{\cdot}x = 0$ [7]. Затем переходим к дифференциальному условию минимизации функции Лагранжа по x, собираем все полученные условия и решаем эту систему относительно x, λ, μ.

4. Примеры применения моделей и методов

Расчеты проведены на примерах, построенных по аналогии с данными о морских рыбных промыслах. Первый и второй примеры условно названы малым и большим соответственно размерам таблиц исходных данных. Большой пример по объему данных соответствует реальным промыслам. Третий пример придуман специально для случая непустого множества D с ненулевым значением функционала Φ на нем. Во всех примерах по сравнению с начальной постановкой задачи квоты выдаются рыбакам (способам промысла) без детализации основного объекта промысла (индекс j опущен). В таблицах ниже центральную часть занимает матрица A, остальные части таблиц названы в соответствии с общей постановкой задачи. Все исходные данные и результаты приведены в условных единицах.

4.1. МАЛЫЙ ПРИМЕР

Таблица 1. Данные о промыслах малого примера

Объекты промыс-	Способы промысла								Допустимый вылов
	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	0,2	0,1	1,0	0,3	0,4	0,1	0,0	0,1	34,6
2	1,0	0,2	0,1	0,1	1,0	0,2	0,1	0,2	108,4
3	0,3	1,0	0,2	1,0	0,1	1,0	0,2	0,1	59,2
4	0,1	0,3	0,0	0,1	0,1	0,3	0,1	0,0	17,1
5	0,2	0,4	0,3	0,2	0,2	0,4	1,0	1,0	37,8
Коэффициенты затрат на вылов	0,001	0,005	0,003	0,009	0,002	0,004	0,006	0,008	
Коэффициенты удельного дохода	2	4	6	8	3	1,4	1	0,4	

Для задачи мягкой оптимизации представлено решение методом градиентного спуска. Причем оптимальный вектор $\overline{y}$ в задаче (8) ненулевой, т.е. множество *D* пусто, и поэтому задача максимизации дохода не имеет решения. Задача мягкой оптимизации дает решение (рис. 1), отклоняющееся по ряду объектов в большую сторону от допустимого улова. В задаче жесткой оптимизации таких отклонений не может быть, но разрешенный охват объектов промысла гораздо меньше. Этот пример демонстрирует такой набор исходных данных, при котором решения задач мягкой и жесткой оптимизации сильно различаются.

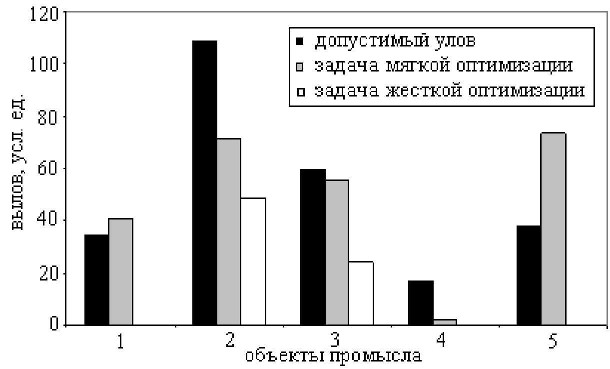

Рис. 1. Объемы выловов в задачах мягкой и жесткой оптимизации (малый пример)

4.2. БОЛЬШОЙ ПРИМЕР

Исходные данные приведены в таблице 2. Для задачи мягкой оптимизации решение получено методом градиентного спуска. Судя по решениям задач мягкой и жесткой оптимизации (рис. 2), большой пример лучше сбалансирован по исходной информации, чем малый.

Решения задач здесь гораздо ближе к допустимым уловам по сравнению с малым примером.

Таблица 2. Данные о промыслах в большом примере

Объекты промысла	Способы промысла							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	0,02	0,3	0,001	0,003	0
2	0,08	0,01	0,03	0,005	0,01	0	0,001	0
3	0,03	0,15	0,2	1	1	0,03	0,03	0,1
4	0	0	0	0,25	0,05	1	1	1
5	0,04	0	0	0,001	0,002	0	0	0
6	0	0	0	0,02	0,04	0,005	0,002	0
7	0,02	0,1	0,6	0,01	0,1	0,001	0,005	0
8	0,03	0,09	0,2	0,01	0,08	0,002	0,005	0

Объекты промысла	Способы промысла							
	1	2	3	4	5	6	7	8
9	0	0,05	0,3	0,005	0,04	0	0	0
10	0,01	0,002	0	0,003	0,001	0,001	0	0,01
11	0,02	0	0	0,001	0,002	0	0	0
12	0	0,03	0	0	0	0,002	0	0
13	0	0	0	0	0,003	0	0	0
14	0,002	0	0	0,01	0,001	0	0	0
15	0,001	0	0	0	0,001	0	0	0
Коэффициенты затрат на вылов	2	4	6	8	3	1,4	1	0,4
Коэффициенты удельного дохода	0,001	0,005	0,003	0,009	0,002	0,004	0,006	0,008

Таблица 2. Данные о промыслах в большом примере (*продолжение*)

Объекты промысла	Способы промысла							
	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0,2	0,05	0,02	0,05	0	0	0,05	0,01
2	0,05	0,01	1	1	1	1	0,02	0,03
3	0,25	0,05	0,01	0,05	0,15	0,02	0	0,17
4	0,04	0,005	0	0	0	0	0	0,05
5	0,1	0,001	0,2	0,04	0,07	0,06	0,03	0,02
6	0,08	0,02	0	0	0	0,08	1	1
7	1	1	0	0	0	0	0,05	0,04
8	0,15	0,07	0	0	0	0	0,08	0,2
9	0,2	0,05	0	0	0	0,04	0	0,02
10	0	0,004	0,05	0	0	0	0	0
11	0	0,005	0	0	0	0	0,06	0,1
12	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0

Объекты промысла	Способы промысла							
	9	10	11	12	13	14	15	16
14	0	0	0	0	0	0	0,1	0,02
15	0	0	0	0	0	0	0	0,005
Коэффициенты затрат на вылов	4	6	3	1,4	1	2	4	6
Коэффициенты удельного дохода	0,001	0,005	0,003	0,009	0,002	0,005	0,003	0,009

Таблица 2. Данные о промыслах в большом примере (*продолжение*)

Объекты промысла	Способы промысла				Допустимый вылов
	17	18	19	20	
1	0,02	0,01	0,08	0,002	10
2	0,03	0,04	0,04	0,005	1,5
3	0,04	0	0	0,02	120
4	0	0	0	0	75
5	0,01	0,001	0,001	0	0,08
6	0,06	0	0,002	0	2
7	0,05	0	0,15	0,1	15
8	0	0	1	1	5
9	0	0	0,1	0	3
10	0	0	0	0	1
11	1	1	0	0	2
12	0	0	0	0	4
13	0	0	0	0	0,5
14	0,004	0	0	0	12
15	0	0,05	0	0	0,3
Коэффициенты затрат	8	3	1	0,4	

Объекты промысла	Способы промысла				Допустимый вылов
	17	18	19	20	
на вылов					
Коэффициенты удельного дохода	0,002	0,004	0,006	0,008	

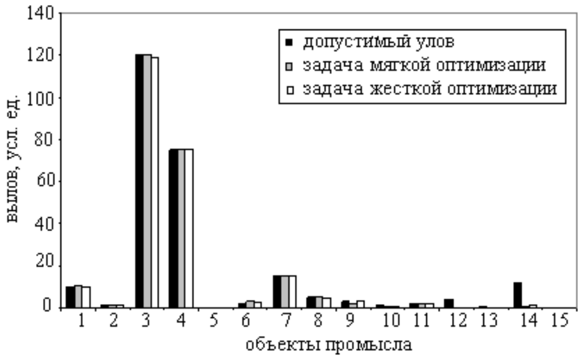

Рис. 2. Объемы выловов в задачах мягкой и жесткой оптимизации (большой пример)

4.3. УСЛОВНЫЙ ПРИМЕР

Данные подобраны так, что множество D непусто. В этом случае мы можем решать задачу (4) максимизации дохода.

Таблица 3. Данные о промыслах в условном примере

Объекты промысла	Способы промысла				Допустимый вылов
	1	2	3	4	
1	1/11	2/11	2/11	1/11	1,0
2	2/11	1/11	1/11	2/11	2,0
3	1/11	1/11	1/11	1/11	3,0
Коэффициенты затрат на вылов	0,2	0,1	0,1	0,2	

Объекты промысла	Способы промысла				Допустимый вылов
	1	2	3	4	
Коэффициенты удельного дохода	0,8	0,2	0,2	4,4	

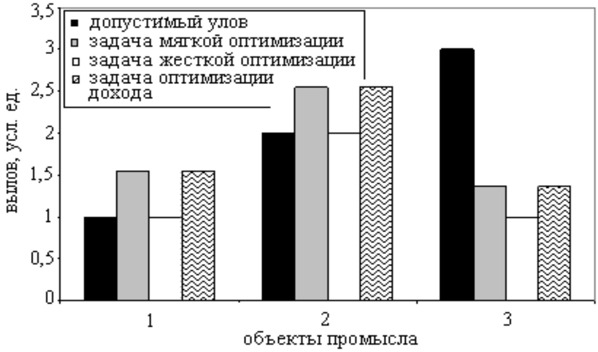

Рис. 3. Объемы выловов в задачах мягкой и жесткой оптимизации (условный пример)

Для сравнения всех примеров можно предложить некоторый критерий качества решений приведенных задач. В качестве такого критерия рассмотрим

$$q = \sqrt{\Phi/m} ,$$

где Ф – значение функционала (6). Этот критерий учитывает размерность задачи и квадратичность функционала Ф. Решение тем лучше, чем меньше значение q.

Из таблицы 4 видно, что в задаче мягкой оптимизации линейный метод может оказаться лучше градиентного. Задача жесткой оптимизации проигрывает по этому критерию задаче мягкой оптимизации по причине более жестких условий на решение.

Таблица 4. Сравнение качества результатов

	Задача мягкой оптимизации		Задача жесткой оптимизации	Задача максимизации дохода	
	метод градиентного спуска	линейный метод		q	Ψ
Малый пример	24,17	24,45	38,15	–	–
Большой пример	3,06	3,02	10,14	–	–
Условный пример	1,04	1,04	1,15	1,04	25,2

5. Заключение

В статье приведен анализ задач оптимального распределения квот при морском рыбном промысле. Несмотря на нелинейность ряда задач, удается их сводить к линейным или решать линейными методами. Представлена игровая задача об оптимизации доходов субъектов промысла. Для задач оптимизации распределения квот и максимизации общего дохода приведены примеры расчетов, иллюстрирующих модельные представления.

Литература

1. АБАКУМОВ А.И., БОЧАРОВ Л.Н., КАРЕДИН Е.П. *Модельный анализ многовидовых рыбных промыслов* // Известия ТИНРО. – 2004. – Т. 138. – С. 220–224.
2. АБАКУМОВ А.И., БОЧАРОВ Л.Н., КАРЕДИН Е.П. И ДР. *Модельный анализ и ожидаемые результаты оптимизации многовидовых промыслов прикамчатских вод* // Вопросы рыболовства. – 2007. – Т. 8, №1(29). – С. 93–109.
3. АБАКУМОВ А.И., ИЛЬИН О.И., ИВАНКО Н.С. *Игровые задачи сбора урожая в биологическом сообществе* // Математическая теория игр и ее приложения. – 2011. – Т. 3, вып. 2. – С. 3–17.

4. ГАНТМАХЕР Ф.Р. *Теория матриц*. – М.: Наука, 2010. – 559 с.
5. ИЗМАИЛОВ А.Ф. *Численные методы в оптимизации*. – М.: Физматлит, 2008. – 320 с.
6. ИОФФЕ А.Д., ТИХОМИРОВ В.М. *Теория экстремальных задач*. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
7. КАРМАНОВ В.Г. *Математическое программирование*. – М.: Физматлит, 2004. – 264 с.
8. МАЗАЛОВ В.В. *Математическая теория игр и приложения*. – Санкт-Петербург – Москва – Краснодар: Лань, 2010. – 446 с.
9. МАЗАЛОВ В.В., РЕТТИЕВА А.Н. *Об одной задаче управления биоресурсами* // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2002. – Т. 9, вып. 2. – С. 293–306.

FISHERY CONTROL PROBLEM WITH QUOTAS

Nina Ivanko, Far Eastern State Technical Fisheries University, Lecturer (Vladivostok, ivns@mail.ru).
Aleksandr Abakumov, Institute of Automation and Control Processes, FEB RAS, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor (Vladivostok, abakumov@iacp.dvo.ru).

Abstract. We study several models of fishery control with catch quotas. Alternative linear approximations of initial non-linear problems are suggested along with linearized routines for their study. We also suggest game-theoretic models of fishery and consider illustrative examples for optimal quota assignment problem and for the maximal profit problem.

Keywords: optimal harvesting, mathematical modeling, optimization.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Г.А. Угольницким

Поступила в редакцию 28.01.2015.
Опубликована 31.05.2015.