

УДК 519.83+519.86

## **ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ ТРЕХУРОВНЕВОЙ МАРКЕТИНГОВОЙ СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ ТРЕБОВАНИЙ<sup>1</sup>**

**Назиров А. Э.<sup>2</sup>, Угольницкий Г. А.<sup>3</sup>, Усов А. Б.<sup>4</sup>**  
(Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону)

*Представлена математическая модель, описывающая деятельность различных субъектов вертикальной маркетинговой системы с учетом экологических требований. В роли субъектов управления выступают: производитель, посредник, с которым у производителя заключен договор комиссии, и торговое предприятие, реализующее в розничной сети продукцию производителя. Предполагается, что основной целью производителя является выполнение экологических требований. Предложен алгоритм построения равновесия Штакельберга в игре трех лиц с учетом требования гомеостаза экологической подсистемы. В качестве метода иерархического управления используется метод побуждения. Приведен ряд характерных примеров с последующей интерпретацией полученных результатов.*

Ключевые слова: иерархия, трехуровневая система управления, метод побуждения, гомеостаз, равновесие Штакельберга.

---

<sup>1</sup> Работа поддержана Южным федеральным университетом, проект №213.01-07-2014/07ПЧВГ.

<sup>2</sup> Адалят Эльшанович Назиров, аспирант (aenazirov@gmail.com).

<sup>3</sup> Геннадий Анатольевич Угольницкий, доктор физико-математических наук, профессор (ougoln@mail.ru).

<sup>4</sup> Анатолий Борисович Усов, доктор технических наук, профессор (usov@math.rsu.ru).

## **1. Введение**

В последние десятилетия наблюдается усиление воздействия техногенных процессов на экологическую систему. Это создает опасность истощения как невозобновляемых, так и возобновляемых ресурсов и может привести к экологической катастрофе. Поэтому разработка механизмов управления сложными эколого-экономическими системами является одной из актуальных задач, которой посвящено значительное количество работ [1, 7, 9, 10, 14].

Моделирование эколого-экономических систем начиналось с использования одноуровневых моделей. Системы такого рода содержат только один субъект управления. Экологическая подсистема выступает в роли объекта управления. В таких моделях не учитывается многообразие связей экономической и экологической подсистем, всевозможные виды воздействий на окружающую среду со стороны субъектов управления. Поэтому в последние десятилетия при анализе эколого-экономических систем используется теория иерархических систем управления [11, 14], в концепции которых учитывается специфика механизмов управления реальными эколого-экономическими объектами. Простейшей иерархически организованной системой управления является двухуровневая система, включающая в себя управляющую подсистему, состоящую из двух иерархически соподчиненных субъектов управления (Ведущий, Ведомый), а также экологическую систему в роли объекта управления [10, 14]. Но существует множество экономических объектов, эффективное функционирование которых невозможно при использовании системы управления двухуровневой структуры. В этих случаях необходимо учитывать потребности в дополнительных субъектах управления, относящихся к разным, иерархически соподчиненным уровням. Поэтому наряду с двухуровневыми системами управления эколого-экономическими объектами распространены трехуровневые системы, в состав которых входят субъекты управления верхнего, среднего и нижнего уровней. Такие системы управления более точно отражают структуру взаимоотношений между хозяйствующими субъектами [11].

Хозяйствующие субъекты могут формировать маркетинговые системы (каналы) с целью обеспечения конкурентоспособности, оптимизации производства и уменьшения издержек [2]. Моделирование маркетинговых каналов началось с использования систем, в состав которых входило только два субъекта управления: производитель и торговое предприятие [16]. Исследование таких систем базировалось на использовании двух основных информационных регламентов: согласованного (кооперативного) и несогласованного (некооперативного). Существуют различные способы взаимодействия субъектов управления, входящих в маркетинговые каналы. Одним из таких способов является иерархическая соподчинённость.

Исследование маркетинговых систем, как правило, не учитывает характер деятельности субъектов управления. Однако нередко активность производственных компаний базируется на использовании природных ресурсов, чрезмерное употребление которых может привести к экологической катастрофе. Отсюда возникает необходимость перехода к рассмотрению эколого-экономической системы в рамках концепции управления устойчивым развитием [9].

В соответствии с действующим законодательством выброс вредных (загрязняющих) веществ в атмосферный воздух стационарным источником допускается на основании разрешения, выданного территориальным органом федерального органа исполнительной власти в области охраны окружающей среды [1]. Под стационарными источниками выброса вредных (загрязняющих) веществ в атмосферный воздух понимаются все источники, относящиеся к конкретной территории предприятия. Разрешением на выброс вредных (загрязняющих) веществ в атмосферный воздух устанавливаются предельно допустимые выбросы и другие условия, которые обеспечивают охрану атмосферного воздуха.

Выброс вредных веществ в атмосферный воздух или вредное физическое воздействие на него без специального разрешения, а также нарушение его условий влечет наложение административного штрафа или приостановление деятельности предприятия. Поэтому с определенной степенью условности предположим, что основной целью производственной компании,

в процессе производства загрязняющей окружающую среду, является выполнение экологических нормативов и, тем самым, поддержание системы в гомеостазе. Компания стремится к максимизации собственной прибыли при условии обязательного выполнения экологических требований.

Успешное исследование любых экономических объектов невозможно без комплексного подхода к проблеме управления. Изучение различного рода систем управления проходит в рамках теории активных систем [6], теории иерархических игр [3], а также теории контрактов [8]. Большое количество результатов при исследовании иерархических систем получено для статической постановки задачи. Полученные результаты основаны на понятии равновесия по Штакельбергу [5] и принципе гарантированного результата Гермейера [3].

В данной работе строится и исследуется трехуровневая модель, описывающая взаимодействие субъектов вертикальной маркетинговой системы: производителя (ПР), посредника (ПС) и торгового предприятия (ТП) [2]. Взаимоотношения ПР и ПС происходят в соответствии с договором комиссии или агентским договором.

Наличие иерархии в отношениях между субъектами управления обусловлено порядком принятия ими решений. Этот факт определяет инструментарий исследования построенной модели [13]. Предполагается, что основной целью ПР является поддержание системы в заданном состоянии [1, 9]. Строится равновесие Штакельберга с учетом требования поддержания системы в заданном состоянии. В качестве метода иерархического управления в предложенной модели используется побуждение [9].

## **2. Математическая постановка задачи**

Основная цель любого экономического субъекта состоит в увеличении собственной прибыли. Важную роль в достижении этой цели играет способ движения товара от производителя к конечному потребителю. Система, включающая в себя ряд организаций, которые принимают на себя или помогают передать другому право собственности на конкретный товар на пути от производителя к потребителю, называется каналом распре-

ления продукции [2]. Выделяют традиционные каналы распределения, вертикальные маркетинговые системы и горизонтальные маркетинговые системы.

Ниже рассматривается трехуровневая модель управления вертикальной маркетинговой системой с учетом экологических требований, включающая:

- производителя (ПР);
- посредника (ПС);
- торговое предприятие (ТП).

В качестве объекта управления выделяются потребители. Взаимоотношения между субъектами управления данной системы носят следующий характер: ПР воздействует на ПС, ПС – на ТП [9].

Исследование основано на концепции равновесия по Штакельбергу с учетом требования устойчивого развития системы [10–11], а именно, предполагается, что принята следующая совокупность правил относительно поведения и информированности различных субъектов управления:

1. ПР выбирает свою стратегию поведения первым и сообщает ее субъекту управления среднего уровня, т.е. ПС; при этом он максимизирует свою прибыль с учетом оптимального ответа ПС на множестве тех стратегий, которые позволяют поддержать всю систему в заданном состоянии. Предполагается, что ПР известны целевые функции ПС и ТП.

2. ПС выбирает свою стратегию, когда выбор ПР известен; он стремится к достижению своих целей. После того как выбор сделан, он сообщает свое решение ТП. ПС действует от имени ПР.

3. ТП выбирает свою стратегию, когда выбор ПР и ПС известен; он стремится к достижению экономических целей, не обращая внимания на состояние окружающей среды.

Деятельность ПР связана с производством строительных материалов из древесины. Данное производство сопровождается выбросом загрязняющих веществ в атмосферный воздух. В соответствии с действующим законодательством для осуществления деятельности, сопровождающейся выбросом ЗВ в атмосферу, производственная компания нуждается в получении

специального разрешения и обязуется выполнять его условия. В противном случае деятельность компании может быть приостановлена или повлечь за собой административное наказание в виде штрафа. Поэтому предположим, что основной целью ПР является поддержание системы в заданном состоянии (состоянии гомеостаза). Будем считать, что система находится в гомеостазе, если количество загрязняющих веществ (ЗВ), поступающих в атмосферу при производстве строительных материалов, соответствует требованиям, описанным в специальном разрешении. ТП действует от собственного имени, но используя товары и товарные знаки ПР. ТП занимается продажей строительных материалов, приобретаемых у ПР через ПС. ТП стремится к максимизации своей прибыли, управляя размером своей наценки на стоимость продукции, по которой оно приобретает товар у ПР.

Подобная организация взаимоотношений обуславливает иерархию в отношениях между субъектами управления системы, в соответствии с которой ПР выступает в качестве субъекта управления верхнего уровня, ПС – среднего, а ТП – нижнего уровня.

Основной целью ПР является выполнение экологических требований. Данное условие может быть выполнено не единственным образом, поэтому, кроме того, ПР стремится к максимизации прибыли, полученной в результате реализации произведенной продукции. Он реализует продукцию через ПС, с которым у него заключен договор комиссии. В соответствии с данным договором ПР выступает в роли комитента, а ПС – комиссионера.

ПР предоставляет ПС товар по базовой цене, которой ПР может управлять. ПС может менять (увеличивать или уменьшать) цену, установленную ПР, в пределах, оговоренных договором комиссии. ПС управляет величиной собственной наценки или скидки к цене ПР. Согласно договору комиссии ПС за оказанные им услуги получает комиссионное вознаграждение, величина которого зависит от объема проданной им продукции.

Пусть ПР производит и продает товары одного типа. Кроме того, имеется одно ТП, которому ПР через ПС продает свой товар.

ТП стремится к максимизации своей прибыли. При этом оно несет фиксированные и переменные затраты. Фиксированные затраты, в отличие от переменных, не зависят от объема продаваемой продукции.

Целостное отражение любой реальной системы управления возможно лишь в рамках динамической модели, описывающей процесс развития иерархически управляемой системы и позволяющей учесть требование устойчивого развития. Однако в рамках данной работы в качестве модельной рассматривается статическая поставка задачи, на примере которой удобно продемонстрировать методы иерархического управления и способы учета экологических требований.

Целевая функция ТП имеет вид

$$(1) \quad J_{ТП} = (c_{ТП} - s \cdot P_{ТП} - S_{RS}) \cdot V(P_{ТП}) \rightarrow \max_{c_{ТП}}$$

$$(2) \quad P_{ТП} = P_{ПС} + c_{ТП},$$

$$(3) \quad V(P_{ТП}) = \frac{A}{(P_{ТП})^\alpha},$$

где  $P_{ПС}$ ,  $P_{ТП}$  – цена единицы продукции у ПС и ТП соответственно;  $c_{ТП}$  – наценка ТП;  $V(P_{ТП})$  – объем продаваемой ТП продукции; он зависит от цены  $P_{ТП}$  с постоянным коэффициентом эластичности  $\alpha$ ;  $c_{ТП} \cdot V(P_{ТП})$  – доход ТП от реализации продукции;  $s = const$  – доля выручки ТП, выделяемая в фонд заработной платы ( $s \in (0, 1)$ );  $S_{RS} = const$  – средства, которые ТП тратит на хранение единицы продукции ( $S_{RS} > 0$ ).

Предполагается, что товар, который продает ТП, является эластичным, т.е.  $|\alpha| > 1$ ;  $A$ ,  $\alpha = const$ .

ПС получает от ТП заказ на товар в количестве  $V(P_{ТП})$  и направляет его на исполнение ПР. ПР поставляет готовую продукцию ПС, а тот, в свою очередь, ТП. ПС тратит собственные средства на повышение своей квалификации, аренду офиса и использование средств связи. Целевая функция ПС имеет вид

$$(4) \quad J_{ПС} = (1 - \text{cost}_{ПС}) \cdot b \cdot P_{ПР} \cdot V(P_{ТП}) \rightarrow \max_{c_{ПС}}$$

$$(5) \quad P_{ПС} = P_{ПР} \cdot (1 + c_{ПС}).$$

Здесь  $c_{ПС}$  – наценка ПС;  $c_{ПСmin}$  – размер минимальной наценки ПС, указанный в договоре комиссии;  $b$  – величина комиссионных за единицу проданной продукции;  $P_{ПС}$  – цена единицы продукции у ПС;  $b \cdot P_{ПП} \cdot V(P_{ТП})$  – комиссионные, получаемые от ПР, за единицу проданного товара; они зависят от количества реализованной продукции;  $cost_{ПС}$  – доля средств от общей выручки ПС, которую составляют переменные затраты.

Основной целью ПР, следуя [9], является поддержание системы в гомеостазе. Будем считать, что система находится в гомеостазе, если выполнено неравенство

$$(6) \quad M_{II}(V) < M_{II\max};$$

$$M_{II}(V) = \frac{K_0 \cdot Y \cdot T(V)}{10^3} \left(1 - \frac{\mu}{100}\right); \quad T(V) = t_0 \cdot V,$$

где  $M_{II\max}$  – максимальный возможный объем сброса ЗВ в окружающую среду, установленный государством;  $M_{II}(V)$  – количество попадающих в окружающую среду загрязнений, определяется количеством выбросов деревообрабатывающего производства при изготовлении  $V$  единиц продукции;  $K_0$  – коэффициент эффективности местных отсосов, принимается равным 0,9 (при необходимости уточняется на основе инструментальных замеров);  $Y$  – удельный показатель пылеобразования на единицу оборудования (кг/ч);  $T$  – время работы технологического оборудования (ч);  $\mu$  – степень очистки воздуха пылеулавливающим оборудованием;  $t_0$  – время работы технологического оборудования для производства единицы продукции.

Выполнения условия (6) ПР может добиться не единственным образом, поэтому, кроме того, он стремится к увеличению собственного дохода. ПР управляет базовой стоимостью продукции  $P_{ПП}$ . ПР расходует средства на оплату услуг связи, рекламу и аренду склада. Эти затраты не зависят от объема продаж. Кроме того, ПР тратит средства на выплату комиссионных ПС, зарплату сотрудникам, а также закупку сырья. Эти затраты зависят от объема проданной продукции.

Целевая функция ПР имеет вид

$$(7) \quad J_{PP} = (P_{ПС} - (cost_{ПП} + b) \cdot P_{ПП} - z_s) \cdot V(P_{ТП}) \rightarrow \max_{P_{ПП}},$$



где  $FC_{PP} = \text{const}$  – фиксированные затраты ПР;  $cost_{PP}$  – размер переменных затрат;  $z_s$  – стоимость хранения одной единицы продукции у ПР.

Описанная выше задача решается при следующих ограничениях на управления:

ПР

$$(8) \quad P_{PP\min} \leq P_{PP} \leq P_{PP\max};$$

ПС

$$(9) \quad c_{ПС\min} \leq c_{ПС} \leq c_{ПС\max};$$

ТП

$$(10) \quad c_{ТП\min} \leq c_{ТП} \leq c_{ТП\max};$$

где  $P_{PP\min}$ ,  $P_{PP\max}$  – размер минимальной и максимальной цены единицы продукции у ПР;  $c_{ПС\min}$ ,  $c_{ПС\max}$  ( $c_{ТП\min}$ ,  $c_{ТП\max}$ ) – размер минимальной и максимальной наценки ПС (ТП) на единицу продукции.

### 3. Методы исследования модели

Исследуемая модель описывается системой уравнений и неравенств (1)–(10) и представляет собой иерархическую игру трех лиц [9]. Выделяют две основные группы методов управления в иерархических структурах [13]:

Принуждение, при котором субъект заставляет его способствовать достижению цели субъекта, не принимая во внимание цели и интересы объекта. Субъект воздействует на множество допустимых стратегий объекта.

Побуждение, при котором субъект создает объекту такие условия, что ему выгодно способствовать достижению цели субъекта и не выгодно обратное. Субъект воздействует на функцию выигрыша объекта с обратной связью

Таким образом, возникают четыре информационных регламента для иерархической игры трех лиц: 1) ПР и ПС используют принуждение; 2) ПР использует принуждение, ПС – побуждение; 3) ПР использует побуждение, ПС – принуждение; 4) ПР и ПС используют побуждение [13].

Исследование проводится для случая, когда субъекты управления верхнего и среднего уровней используют побуждение в качестве метода иерархического управления. Предлагается следующий алгоритм нахождения равновесия побуждения в описанной системе.

Решается задача (1)–(3), (10). Определяется оптимальная для ТП наценка, которая зависит от стоимости единицы продукции у ПС, т.е. от  $P_{ПС}$  и  $c_{ПР}$ . Обозначим ее через  $c_{ТП}^*(P_{ПР}, c_{ПС})$ .

Решается задача (4)–(5), (9) при  $c_{ТП} = c_{ТП}^*(P_{ПР}, c_{ПС})$ . Определяется оптимальное управление ПС в зависимости от величины  $P_{ПР}$ . Обозначим его  $c_{ПС}^*(P_{ПР})$ .

Найденные на первом и втором шагах алгоритма величины  $c_{ТП}^*(P_{ПР}, c_{ПС}^*(P_{ПР}))$  и  $c_{ПС}^*(P_{ПР})$  подставляются в (6)–(8). Определяется оптимальная для ПР стоимость единицы продукции  $P_{ПР}^*$ .

Решение модели (1)–(10)  $\{P_{ПР}^*, c_{ПС}^*(P_{ПР}^*), c_{ТП}^*(P_{ПР}^*, c_{ПС}^*(P_{ПР}^*))\}$  назовем равновесием Штакельберга в игре трех лиц.

Задачи, сформулированные на 1–3 шагах алгоритма, представляют собой нелинейные задачи условной оптимизации, решаемые с учетом иерархии в отношениях между субъектами управления.

Пусть наложены следующие ограничения на входные параметры субъектов управления:

ТП

$$0 \leq s < 1; 0 < S_{RS}; 0 < A; \alpha > 1;$$

ПС

$$0 < b < 1; 0 < \text{cost}_{ПС} < 1; -1 < c_{ПС\min};$$

ПР

$$(1 + c_{ПС\min}) > \text{cost}_{ПР} + b.$$

Тогда равновесие Штакельберга с учетом требования поддержания системы в заданном состоянии, а также при полной информированности игроков, строится аналитически методом множителей Лагранжа.

В соответствии с первым шагом алгоритма, ТП максимизирует свою целевую функцию (1) с учетом полученной от ПР и ПС информации, а именно, значений базовой цены ПР и наценки ПС. Используя метод множителей Лагранжа, получим, что оптимальное управление ТП выглядит следующим образом:

$$c_{ТП}^* = \begin{cases} c_{ТП\min}, & \text{если } c_{ПС} < c_{01}, \\ c_{ТП}^0, & \text{если } c_{ПС} \in [c_{01}, c_{02}), \\ c_{ТП\max}, & \text{если } c_{ПС} \geq c_{02}; \end{cases}$$

где

$$c_{01} = \frac{c_{ТП\min}(\alpha - 1)(1 - s) - \alpha S_{RS}}{(1 - s + \alpha s) \cdot P_{ПП}} - 1;$$

$$c_{02} = \frac{c_{ТП\max}(\alpha - 1)(1 - s) - \alpha S_{RS}}{(1 - s + \alpha s) \cdot P_{ПП}} - 1;$$

$$c_{ТП}^0 = \frac{(1 - s + \alpha s) \cdot P_{ПП}(1 + c_{ПС}) + \alpha S_{RS}}{(\alpha - 1)(1 - s)}.$$

На следующем шаге алгоритма ПС максимизирует свою целевую функцию (4), опираясь на значение базовой стоимости единицы продукции, полученной от ПР, а также на управление ТП, определенное на предыдущем шаге. При решении данной задачи область допустимых управлений ПС разбивается на несколько непересекающихся подмножеств, в зависимости от значений входных параметров.

Например, если выполняется следующая система неравенств

$$\begin{cases} c_{01} < c_{ПС\min}, \\ c_{ПС\min} < c_{02} \leq c_{ПС\max}; \end{cases}$$

то область допустимых управлений делится на два отрезка:  $[c_{ПС\min}, c_{02})$  и  $[c_{02}, c_{ПС\max}]$ .

Если выполняются система неравенств

$$\begin{cases} c_{ПС\min} < c_{01}, \\ c_{ПС\max} \geq c_{02}; \end{cases}$$

то – на три отрезка:  $[c_{ПС\min}, c_{01})$ ,  $[c_{01}, c_{02})$  и  $[c_{02}, c_{ПС\max}]$ .

Однако оптимальное управление ПС, вне зависимости от значений входных параметров, имеет вид  $c_{ПС}^* = c_{ПС\min}$ .

Задача ПР исследуется аналитически методом множителей Лагранжа. На данном этапе определяется базовая стоимость единицы продукции с учетом значений параметров управления

ПС и ТП, а также требования поддержания системы в заданном состоянии. Ниже приведено несколько примеров.

Введем обозначения

$$P_{01} = \frac{c_{ТП\min}(\alpha-1)(1-s) - \alpha \cdot S_{RS}}{(1-s + \alpha s) \cdot (c_{ПС\min} + 1)},$$

$$P_{02} = \frac{c_{ТП\max}(\alpha-1)(1-s) - \alpha \cdot S_{RS}}{(1-s + \alpha s) \cdot (c_{ПС\min} + 1)},$$

$$P_0^0 = \frac{z_s \alpha (1 + c_{ПС\min}) + ((1 + c_{ПС\min}) - (\mathbf{cost}_{ПП} + b)) c_{ТП\min}}{(1 + c_{ПС\min})(\alpha - 1)((1 + c_{ПС\min}) - (\mathbf{cost}_{ПП} + b))},$$

$$P_1^0 = \frac{\frac{\alpha S_{RS}}{(\alpha-1)(1-s)} \cdot ((1 + c_{ПС\min}) - (\mathbf{cost}_{ПП} + b)) + \alpha z_s L}{(\alpha-1) \cdot L \cdot ((1 + c_{ПС\min}) - (\mathbf{cost}_{ПП} + b))},$$

$$P_2^0 = \frac{c_{ТП\max} \cdot ((1 + c_{ПС\min}) - (\mathbf{cost}_{ПП} + b)) + \alpha z_s (1 + c_{ПС\min})}{(\alpha-1)(1 + c_{ПС\min}) \cdot ((1 + c_{ПС\min}) - (\mathbf{cost}_{ПП} + b))},$$

$$L = (1 + c_{ПС\min}) + \frac{(1-s + \alpha s)(1 + c_{ПС\min})}{(\alpha-1)(1-s)}.$$

Если выполняется ограничение на область допустимых управлений ПР

$$P_{ПП\max} \leq \frac{c_{ТП\min}(\alpha-1)(1-s) - \alpha S_{RS}}{(1-s + \alpha s) \cdot (c_{ПС\min} + 1)},$$

то управление ПР принимает вид

$$P_{ПП}^* = \begin{cases} P_{ПП\max}, P_0^0 \geq P_{ПП\max} \text{ и } P_{ПП\max} < P_{01}, \\ P_0^0, P_{ПП\min} \leq P_0^0 < P_{ПП\max} \text{ и } P_{ПП\max} < P_{01}, \\ P_{ПП\min}, P_{ПП\min} > P_0^0 \text{ и } P_{ПП\max} < P_{01}. \end{cases}$$

Если

$$\begin{cases} \frac{c_{ТП\min}(\alpha-1)(1-s) - \alpha S_{RS}}{(1-s + \alpha s) \cdot (c_{ПС\min} + 1)} \leq P_{ПП\min}, \\ P_{ПП\max} < \frac{c_{ТП\max}(\alpha-1)(1-s) - \alpha S_{RS}}{(1-s + \alpha s) \cdot (c_{ПС\min} + 1)}; \end{cases}$$

ТО

$$P_{PP}^* = \begin{cases} P_{PP\max}, P_1^0 \geq P_{PP\max} \text{ и } P_{PP\max} < P_{02} \text{ и } P_{PP\min} > P_{01}, \\ P_1^0, P_{PP\min} \leq P_1^0 < P_{PP\max} \text{ и } P_{PP\max} < P_{02} \text{ и } P_{PP\min} > P_{01}, \\ P_{PP\min}, P_{PP\min} > P_1^0 \text{ и } P_{PP\max} < P_{02} \text{ и } P_{PP\min} > P_{01}. \end{cases}$$

При ограничениях вида

$$P_{PP\min} \geq \frac{c_{ТП\max}(\alpha - 1)(1 - s) - \alpha S_{RS}}{(1 - s + \alpha s) \cdot (c_{ПС\min} + 1)}$$

оптимальное управление ПР принимает вид

$$P_{PP}^* = \begin{cases} P_{PP\max}, P_2^0 \geq P_{PP\max} \text{ и } P_{PP\min} \geq P_{02}, \\ P_2^0, P_{PP\min} \leq P_2^0 < P_{PP\max} \text{ и } P_{PP\min} \geq P_{02}, \\ P_{PP\min}, P_{PP\min} > P_2^0 \text{ и } P_{PP\min} \geq P_{02}. \end{cases}$$

Таким образом, оптимальная стратегия ПР  $P_{PP}^*$  принимает одно из девяти значений в зависимости от значений входных параметров:  $P_{PP\min}, P_{PP\max}, P_0^0, P_1^0, P_2^0, P_{01}, (P_{01} - \varepsilon), P_{02}, (P_{01} - \varepsilon)$ .

Равновесие Штакельберга имеет вид:  $\{P_{PP}^*, c_{ПС}^*, c_{ТП}^*\}$ .

#### 4. Результаты расчетов

Приведем несколько примеров численного исследования модели (1)–(10).

*Пример 1.* В системе для следующего набора входных параметров (у.е. – стоимость в условных единицах; т – тонна):

$A = 10000$ ;  $\alpha = 1,35$ ;  $c_{ТП\min} = 2$  у.е.;  $c_{ТП\max} = 50$  у.е.;  
 $FC_{ТП} = 50$  у.е.;  $s = 0,1$ ;  $S_{RS} = 0,3$  у.е.;  $c_{ПС\min} = -0,2$ ;  $c_{ПС\max} = 1,5$ ;  
 $cost_{ПС} = 0,3$ ;  $b = 0,3$ ;  $P_{PP\min} = 10$  у.е.;  $P_{PP\max} = 200$  у.е.;  
 $M_{П\max} = 10$  т;  $cost_{ПП} = 0,2$ ;  $FC_{ПП} = 100$  у.е.;  $z_s = 0,5$  у.е.

оптимальные стратегии субъектов управления имеют вид:

$c_{ТП}^* = c_{ТП\max} = 50$  у.е.;  $c_{ПС}^* = c_{ПС\min} = -0,2$ ;  $P_{PP}^* = P_2^0 = 185$  у.е.

Доходы субъектов управления в равновесии равны

$J_{PP} = 285,9$  у.е.;  $J_{ПС} = 262,0$  у.е.;  $J_{ТП} = 159,1$  у.е.

Здесь  $J_{PP}, J_{ПС}, J_{ТП}$  – доходы ПР, ПС и ТП соответственно.

*Пример 2.* В случае входных данных примера 1 и  $\alpha = 1,55$  получим, что

$c_{ТП}^* = c_{ТП}^0 = 18$  у.е.;  $c_{ПС}^* = c_{ПС\min} = -0,2$ ;  $P_{PP}^* = P_{PP\min} = 10$  у.е.;

$$J_{\text{ПР}} = 51,3 \text{ у.е.}; J_{\text{ПС}} = 114,4 \text{ у.е.}; J_{\text{ТП}} = 780,1 \text{ у.е.}$$

Следовательно, с ростом коэффициента эластичности прибыль ТП растет, а ПР и ПС – падает. Таким образом, увеличение спроса на продукцию побуждает ПР к увеличению объема производства, и как следствие, увеличение объемов выбросов ЗВ в атмосферу. Деятельность ПР может быть приостановлена за нарушение условий разрешения на выброс ЗВ.

*Пример 3.* В случае входных данных примера 1 и  $P_{\text{ПРmax}} = 50$  у.е. имеем:

$$c_{\text{ТП}}^* = c_{\text{ТПmax}} = 50 \text{ у.е.}; c_{\text{ПС}}^* = c_{\text{ПСmin}} = -0,2;$$

$$P_{\text{ПР}}^* = P_{\text{ПРmax}} = 50 \text{ у.е.};$$

$$J_{\text{ПР}} = 198,5 \text{ у.е.}; J_{\text{ПС}} = 205,3 \text{ у.е.}; J_{\text{ТП}} = 753,3 \text{ у.е.}$$

С уменьшением максимально возможной стоимости единицы товара у ПР для него оптимальным становится именно это значение цены единицы продукции. Прибыль ТП в этом случае возрастает по сравнению с примером 1, прибыли ПС и ПР – падают.

*Пример 4.* В случае входных данных примера 1 и  $A = 5000$ :

$$c_{\text{ТП}}^* = c_{\text{ТПmax}} = 50 \text{ у.е.}; c_{\text{ПС}}^* = c_{\text{ПСmin}} = -0,2; P_{\text{ПР}}^* = P_2^0 = 185 \text{ у.е.};$$

$$J_{\text{ПР}} = 100,5 \text{ у.е.}; J_{\text{ПС}} = 131,0 \text{ у.е.}; J_{\text{ТП}} = 58,3 \text{ у.е.}$$

Снижение объема производства у ПР влечет за собой снижение прибыли всех субъектов управления системы.

*Пример 5.* В случае входных данных примера 1 и  $c_{\text{ТПmax}} = 5$  у.е. получим:

$$c_{\text{ТП}}^* = c_{\text{ТПmax}} = 5 \text{ у.е.}; c_{\text{ПС}}^* = c_{\text{ПСmin}} = -0,2; P_{\text{ПР}}^* = P_2^0 = 50 \text{ у.е.};$$

$$J_{\text{ПР}} = 686,5 \text{ у.е.}; J_{\text{ПС}} = 579,9 \text{ у.е.}; J_{\text{ТП}} = 214,1 \text{ у.е.}$$

Снижение величины максимально допустимой наценки ТП влечет увеличение прибыли ПР и ПС и снижение прибыли ТП.

## 5. Заключение

В работе на основе теоретико-игрового и иерархического подходов:

– предложена математическая модель системы управления вертикальной маркетинговой системой;

– введено понятие равновесия Штакельберга в игре трех лиц с учетом требований поддержания системы в заданном состоянии, указан алгоритм его построения.

Исследование предложенной модели проводится аналитически методом множителей Лагранжа. Выявлены основные закономерности функционирования системы при учете экологических требований, а именно:

1. Увеличение объема продаж влечет за собой увеличение прибыли всех субъектов управления, однако при большом объеме производства происходит нарушение экологических требований. С ростом коэффициента эластичности ( $\alpha$ ) происходит снижение прибыли ПС и ПР.
2. Уменьшение максимально допустимой скидки, предоставляемой ПС, приводит к увеличению прибыли ПР. ПС выгодно предоставить ТП максимально возможную скидку. При увеличении размера комиссионных прибыль ПС увеличивается, а ТП и ПР – снижается.
3. Для ПР выгоднее платить комиссионные ПС, исходя не из собственной цены, а из цены ПС; ТП выгодно, чтобы комиссионные рассчитывались исходя из цены ПР. При низкой эластичности товара суммарная прибыль всех субъектов управления выше при расчете комиссионных исходя из цены ПС.

Отметим, что исследованный в работе механизм взаимодействия субъектов управления в той или иной мере находит отражение во взаимодействии ряда мебельных фабрик, их региональных представителей, дилеров и индивидуальных предпринимателей Ростовской области.

### **Литература**

1. БУРКОВ В.Н., НОВИКОВ Д.А., ЩЕПКИН А.В. *Механизмы управления эколого-экономическими системами*. – М.: Физматлит, 2008. – 208 с.
2. ГОЛУБКОВ Е.П. *Основы маркетинга*. – М.: Издательство «Финпресс», 1999. – 656 с.
3. ГОРЕЛИК В.А., ГОРЕЛОВ М.А., КОНОНЕНКО А.Ф. *Анализ конфликтных ситуаций в системах управления*. – М.: Радио и связь, 1991. – 288 с.
4. ЗЕНКЕВИЧ Н.А., ПЕТРОСЯН Л.А., ЯНГ Д.В.К. *Динамические игры и их приложение в менеджменте*. – СПб.: Изд-во Высшая школа менеджмента, 2009. – 415 с.

5. МУЛЕН Э. *Теория игр с примерами из математической экономики*. – М.: Мир, 1985. – 200 с.
6. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами*. – М.: Физматлит, 2012. – 584 с.
7. МАСЛЕННИКОВА И.С., КУЗНЕЦОВ Л.М., ПШЕНИН В.Н. *Экологический менеджмент*. – СПб.: СПбГИЭУ, 2005. – 200 с.
8. ТАМБОВЦЕВ В.Л. *Введение в экономическую теорию контрактов: Учебное пособие*. – М.: Инфра-М, 2004. – 144 с.
9. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Иерархическое управление устойчивым развитием*. – М.: Физматлит, 2010. – 336 с.
10. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Математическая формализация методов иерархического управления эколого-экономическими системами // Проблемы управления*. – 2007. – №4. – С. 64–69.
11. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Управление сложными эколого-экономическими системами // Автоматика и телемеханика*. – 2009. – №5. – С. 169–179.
12. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Исследование дифференциальных моделей иерархических систем управления посредством их дискретизации // Автоматика и телемеханика*. – 2013. – №2. – С. 109–123.
13. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Равновесия в моделях иерархически организованных динамических систем управления с учетом требований устойчивого развития // Автоматика и телемеханика*. – 2014. – №6. – С. 86–102.
14. УСОВ А.Б. *Модели иерархического управления качеством водных ресурсов*. – Ростов-на-Дону: ЦВВР, 2006. – 256 с.
15. BASAR T., OLSDER G.J. *Dynamic Noncooperative Game Theory, 2<sup>nd</sup> ed.* – Academic Press, London, 1999. – 428 p.
16. JORGENSEN S., ZACCOUR G. *Differential Games in Marketing*. – International Series in Quantitative Marketing, Kluwer Academic Publishers, 2004. – 176 p.
17. LEE E., STAELIN R. *Vertical Strategic Interaction: Implications for Channel Pricing Strategy // Marketing Science*. – 1997. – No.16. – P. 185–207.



## **GAME-THEORETICAL MODEL OF THREE-LEVEL MARKETING SYSTEM CONSIDERING ENVIRONMENTAL REQUIREMENTS**

**Adalyat Nazirov**, Southern Federal University, Rostov-on-Don,  
postgraduate student (aenazirov@gmail.com)

**Gennady Ougolnitsky**, Southern Federal University, Rostov-on-  
Don, Doctor of Sciences, Professor (ougoln@mail.ru)

**Anatoly Usov**, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Doctor  
of Sciences, Professor (usov@math.rsu.ru)

*Abstract. A novel mathematical model is introduced to express activities of parties in a vertical marketing system. The parties are represented with a manufacturer, a mediator, and a trading enterprise. The relationship between the manufacturer and the mediator is governed by a commission contract. The manufacturer produces goods while the mediator represents her interests to the trading enterprise, and the trading enterprise sells products. The model is based on the game-theoretic and hierarchical approaches. A Stackelberg equilibrium considering the requirements of sustainable development is found. The impulsion method is used as a tool of hierarchical control when solving this model. A number of typical examples followed by the interpretation are presented.*

**Keywords:** hierarchy, three-level control system, Stackelberg equilibrium, impulsion equilibrium.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Д.А. Новиковым*

*Поступила в редакцию 13.02.2015.  
Опубликована 31.05.2015.*