УДК 519.6:532.5

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ ПРЕДОТВРАЩЕНИЯ ЗАМОРОВ В МЕЛКОВОДНЫХ ВОДОЕМАХ[1]

Никитина А. В.[2], Пучкин М. В.[3], Семенов И. С.[4], Сухинов А. И.[5], Угольницкий Г. А.[6], Усов А. Б.[7], Чистяков А. Е.[8]

(*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*)

Статья посвящена построению и исследованию дифференциально-игровой модели предотвращения заморов в мелководных водоемах. Предложены алгоритмы исследования модели в случае информационных регламентов динамических игр Гермейера Γ_{1x} *и* Γ_{2x}*. Задача решается численно с помощью разработанного параллельного алгоритма, учитывающего архитектуру суперЭВМ с распределенной памятью. Предлагаемый алгоритм численного решения поставленной задачи на суперЭВМ с использованием метода k-средних позволит существенно сократить время работы программного комплекса, численно реализующего модельную задачу динамики взаимодействующих популяций в Азовском море. Разработанные модели используются для прогнозирования изменения биомассы*

---

[1] *Работа выполнена при поддержке Южного федерального университета, проект №213.01-07.2014/07ПЧВГ.*

[2] *Алла Валерьевна Никитина, к.ф.-м.н., доцент* (nikitina.vm@mail.ru).

[3] *Максим Валентинович Пучкин, ст. преп.* (mpuchkin@mail.ru).

[4] *Илья Сергеевич Семенов, аспирант*.

[5] *Александр Иванович Сухинов, д.ф.-м.н., профессор* (sukhinov@gmail.com).

[6] *Геннадий Анатольевич Угольницкий, д.ф.-м.н., профессор* (ougoln@mail.ru).

[7] *Анатолий Борисович Усов, д.т.н., доцент* (tol151968@yandex.ru).

[8] *Александр Евгеньевич Чистяков, к.ф.-м.н., доцент* (cheese_05@mail.ru).

биологических популяций в мелководных водоемах с учетом требований устойчивого развития.

Ключевые слова: дифференциально-игровая модель, динамические игры Гермейера, принуждение, замор, эффективность, *k*-средние, Азовское море.

1. Введение

Одна из составляющих экологического благополучия мелководных водоемов – предотвращение заморов в них. Замору в той или иной степени подвержены практически все мелководные водоёмы, в которых отсутствует течение. Массовая ежегодная гибель промысловой рыбы наносит значительный ущерб рыбному хозяйству. Поэтому актуальна разработка математических моделей предотвращения заморов в мелководных водоемах, выработка научно-обоснованных предложений по предотвращению заморных явлений. Из первых работ в этой области выделим, например, [1, 4], а из последних – цикл работ [5, 7, 11, 13, 15]

В настоящей статье, в отличие от этих работ, анализ проводится на основе теоретико-игрового подхода [3, 17–19, 21]. Предлагаются механизмы управления для системы контроля экосистем мелководных водоемов. С содержательной точки зрения такие механизмы могут представлять собой, например, процедуры штрафов и поощрений, налоговые льготы, торговлю квотами и т.п. Исследование предложенной динамической модели предотвращения заморов в мелководных водоемах проводится численно с использованием высокоэффективных параллельных алгоритмов. При переходе от непрерывных моделей к дискретным возникает необходимость в решении систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) большой размерности. В работе представлены методы решения СЛАУ вариационного типа, а также их параллельная реализация на многопроцессорной вычислительной системе с распределенной памятью.

2. Постановка задачи

Для моделирования системы контроля состояния мелководных водоемов и предотвращения заморов целесообразно трактовать данную систему как иерархически управляемую динамическую систему (УДС) [17–19, 21], схема которой представлена на рис. 1.

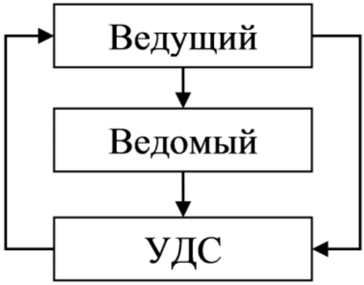

Рис. 1. Иерархически управляемая динамическая система

Основной смысл введения понятия иерархически управляемой динамической системы в связи с требованием поддержания экосистемы в заданном состоянии заключается в следующем. Воздействуя на эколого-экономическую систему, Ведомый (A (Agent) – природопользователь, промышленное предприятие) преследует собственные цели, в общем случае не отвечающие требованиям поддержания системы в заданном состоянии (как правило, он стремится максимизировать доход, полученный в результате производственной деятельности, или минимизировать издержки). Нужен Ведущий (S (Supervisor) – государственный регулирующий орган), способный воздействовать на Ведомого для достижения целей поддержания системы в заданном состоянии (требований устойчивого развития).

Поскольку цель поддержания системы в заданном состоянии может достигаться различными способами, то возникает дополнительный вопрос о выборе наилучшего из этих способов с точки зрения Ведущего. Иначе говоря, при обеспечении условий поддержания системы в заданном состоянии Ведущий руководствуется одним или несколькими критериями оптимальности, отражающим(и) его предпочтения на множестве допустимых управлений.

Взаимоотношения внутри такой иерархической системы устроены следующим образом [19, 21]: Ведущий воздействует на Ведомого, Ведомый – только на УДС. Влияя на УДС, Ведомый преследует свои частные цели. УДС является пассивным объектом, поэтому нужен Ведущий, который, используя различные методы иерархического управления (принуждение, побуждение, убеждение), способен, воздействуя на Ведомого, обеспечить выполнение условий, гарантирующих устойчивое развитие УДС.

Разные методы иерархического управления отличаются по направлению воздействия одного субъекта управления на другого [19, 21]. Основной задачей любого метода управления считается создание условий, при которых субъекты стремятся к поддержанию динамической системы в заданном состоянии. При принуждении субъект управления верхнего уровня воздействует на области допустимых управлений остальных субъектов. Побуждение предполагает воздействие субъекта управления верхнего уровня на целевые функции остальных субъектов. При убеждении все субъекты управления объединяют свои усилия и сообща стремятся к поддержанию динамической системы в заданном состоянии.

В предлагаемой модели для описания динамики экологической системы используется нелинейная пространственно-неоднородная 3D-модель взаимодействия планктона и популяции промысловой рыбы пеленгас: «рыба – фитопланктон – зоопланктон – питательные вещества – детрит». Эта модель описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных в области *G*, представляющей собой замкнутый бассейн, ограниченный невозмущенной поверхностью водоёма Σ_0, дном $\Sigma_H = \Sigma_H(x, y)$ и цилиндрической поверхностью, для интервала $0 < t \le T_0$, $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_H \cup \sigma$ – кусочно-гладкая граница области *G* [8–10, 12].

Таким образом, предлагаемая модель представляет собой иерархическую дифференциальную игру двух лиц (S, A). Целевые функционалы субъектов и ограничения на управления возьмем в виде

– Ведущего (S):

(1) $$J_S = \int_0^{\infty}\int_G e^{-rt}[M(P(x,y,z,t) - P^0(x,y,z,t)) + \\ + C(q(x,y,z,t))]dvdt \to \min$$

(2) $$0 \le q(x,y,z,t) \le P(x,y,z,t);$$

– Ведомого (A):

(3) $$J_A = \int_0^{\infty}\int_G e^{-rt}[au(x,y,z,t) - \\ - \frac{bu^2(x,y,z,t)}{2}]P(x,y,z,t)dvdt \to \max$$

(4) $$0 \le u(x,y,z,t) \le q(x,y,z,t).$$

Здесь t – временная координата; (x, y, z) – пространственные координаты; $u(x, y, z, t)$ – доля вылова рыбы (управление ведомого игрока) в момент времени t в точке (x, y, z); $q(x, y, z, t)$ – квота вылова (в долях, управление ведущего игрока); $C(q)$ – выпуклая функция затрат на контроль выполнения квоты, для которой выполнены условия $C(P) = 0$; $C(0) = \infty$; a – цена единицы биомассы рыбы; b – коэффициент затрат на вылов; r – коэффициент дисконтирования; M – постоянная, влияющая на величину наказания при отклонении от оптимального значения концентрации пеленгаса; $P(x, y, z, t)$ – концентрация пеленгаса в момент времени t в точке (x, y, z); $P^0(x, y, z, t)$ – оптимальное значение концентрации пеленгаса с точки зрения предотвращения заморов (устанавливается экспертно).

Уравнения биологической кинетики имеют вид:

$$\frac{\partial X}{\partial t} + div(\mathbf{U}X) = \mu_X \Delta X + \frac{\partial}{\partial z}(v_X \frac{\partial X}{\partial z}) + \gamma_X \alpha_S XS - \\ - \delta_X XZ - \varepsilon_X X - \sigma_X XP,$$

$$
(5)\quad
\begin{aligned}
&\frac{\partial Z}{\partial t}+div(\mathbf{U}Z)=\mu_Z\Delta Z+\frac{\partial}{\partial z}(\nu_Z\frac{\partial Z}{\partial z})+\gamma_Z\delta_X XZ-\\
&-\varepsilon_Z Z-\delta_Z Z,\\
&\frac{\partial S}{\partial t}+div(\mathbf{U}S)=\mu_S\Delta S+\frac{\partial}{\partial z}(\nu_S\frac{\partial S}{\partial z})+\gamma_S\varepsilon_D D-\alpha_S XS+\\
&+B(S_p-S)+f,\\
&\frac{\partial D}{\partial t}+div(\mathbf{U}D)=\mu_D\Delta D+\frac{\partial}{\partial z}(\nu_D\frac{\partial D}{\partial z})+\varepsilon_X X+\varepsilon_Z Z-\\
&-\varepsilon_D D-\beta_D DP,\\
&\frac{\partial P}{\partial t}+div(\mathbf{U}_P P)=\mu_p\Delta P+\frac{\partial}{\partial z}(\nu_P\frac{\partial P}{\partial z})+\gamma_P\beta_D DP-\varepsilon_P P+\\
&+\xi_P\sigma_X XP-\delta_P P-uP,\\
&\frac{\partial \mathbf{u}_P}{\partial t}+div(\mathbf{U}_P\mathbf{u}_P)=\mu_u\Delta\mathbf{u}_P+\frac{\partial}{\partial z}(\nu_u\frac{\partial \mathbf{u}_P}{\partial z})-\alpha_u\mathbf{u}_P+\\
&+k_D gradD+k_X gradX,
\end{aligned}
$$

где X, Z, S, D – концентрации фитопланктона (Coscinodiscus), зоопланктона (Copepoda), биогенного вещества и детрита; α_S – коэффициент потребления биогенного вещества фитопланктоном; γ_X, γ_Z, γ_P – передаточные коэффициенты трофических функций; γ_S – доля питательного вещества, находящегося в биомассе фитопланктона; ε_Z, ε_P – коэффициенты элиминации (смертности) Z, P соответственно; ε_X – коэффициент, учитывающий смертность и метаболизм X; δ_X – убыль фитопланктона за счет выедания зоопланктоном; δ_Z – убыль зоопланктона за счет выедания рыбами; δ_P – убыль пеленгаса за счет выедания рыбами; S_P – предельно возможная концентрация биогенного вещества; $f = f(t, x, y, z)$ – функция источника загрязнения; B – удельная скорость поступления загрязняющего вещества; ε_D – коэффициент разложения детрита; β_D – скорость потребления органических остатков пеленгасом; σ_X – коэффициент убыли фитопланктона в результате потребления его пеленгасом; ξ_P – передаточный коэффициент роста концентрации пеленгаса за счет фитопланктона; μ_i, ν_i – диффузионные коэффициенты в горизонтальном и вертикальном направлениях субстанции i

соответственно; $i \in \{X, Z, S, D, P\}$; $\mathbf{u}$ – поле скоростей водного потока; $\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{u}_{0j}$ – скорость конвективного переноса вещества; $\mathbf{U}_P = \mathbf{u} + \mathbf{u}_P$ – скорость конвективного переноса пеленгаса; $\mathbf{u}_P$ – скорость движения рыбы относительно воды; k_D, k_X – коэффициенты таксиса; μ_u, ν_u – коэффициенты горизонтальной и вертикальной составляющей диффузии скорости таксиса; α_u – коэффициент инерционного движения рыбы; $\mathbf{u}_{0j}$ – скорость осаждения j-й субстанции под действием силы тяжести, $j \in \{X, Z, S, D\}$.

Зададим для этой модели начальные условия

$$(6) \quad \varphi(x,y,z,0) = \varphi_0(x,y,z), \varphi \in \{X,Z,S,D,P\},\ (x,y,z) \in \overline{G}, t = 0$$

и граничные условия

$$(7) \quad \varphi = 0 \text{ на } \sigma, \text{ если } u_n < 0;\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } \sigma, \text{ если } u_n \geq 0;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \text{ на } \Sigma_0;\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\varepsilon_i \varphi \text{ на } \Sigma_H,\ i = \overline{1,5}.$$

Здесь ε_1, ε_2, ε_3, ε_4, ε_5 – неотрицательные постоянные; ε_1, ε_3, ε_5 – учитывают опускание планктона и пеленгаса на дно и их затопление; ε_2, ε_4 – учитывают поглощение биогенного вещества и детрита донными отложениями.

Модель (1)–(7) представляет собой иерархическую дифференциальную игру при наличии фазовых ограничений.

3. Алгоритмы построения равновесия

Возможны разные информационные регламенты для иерархической игры двух лиц [19, 21, 22]: S может использовать принуждение или побуждение и сообщать A либо программную стратегию, либо позиционную. При использовании позиционных стратегий возникают динамические игры Гермейера Γ_{1x} и Γ_{2x} [3]. Приведем алгоритмы построения решений в позиционных стратегиях при принуждении (в случае игр Гермейера Γ_{1x} и Γ_{2x}). Метод побуждения исследуется аналогично.

Рассмотрим вначале случай, когда в системе реализуется информационный регламент игры Гермейера Γ_{2x}.

Определение 1. Пара функций ($q^*(x, y, z, t)$, $u^*(x, y, z, t)$) называется *равновесием принуждения в игре Гермейера* Γ_{2x} *с обратной связью по управлению*, если

$$J_S(q^*(t,P^*,u^*),u^*,P^*) = \sup_{0\le q(t)\le P} \inf_{u\in R_u(q)} J_S(q,u,P),$$

где P^*, P – траектории УДС, построенные по функциям u^*, u; $R_u(q) = \{0 \le u(t) \le q(t)\colon \quad \forall c{:}0 \le c(t) \le q(t) \quad J_A(u, P) \ge J_A(c, P)\}$ – множество оптимальных ответов Ведомого по переменной u на стратегию принуждения Ведущего q.

Алгоритм нахождения решения в этом случае состоит в следующем.

1) Вводится стратегия наказания Ведомого Ведущим

$$q^P(x,y,z,t): J_A(u(q^P(x,y,z,t),x,y,z,t),P(x,y,z,t)) =$$
$$= \inf_{0\le q(x,y,z,t)\le P(x,y,z,t)} J_A(u(q,x,y,z,t),P(x,y,z,t)).$$

Находится величина гарантированного выигрыша Ведомого, если он отказывается сотрудничать с Ведущим:

$$L_A = \sup_{u(x,y,z,t)\in R_u(q^P(x,y,z,t))} J_A(u(x,y,z,t),P(x,y,z,t)).$$

2) Решается задача оптимального управления (1), (2), (4) с дополнительным условием $L_A < J_A(u(x, y, z, t),\ P(x, y, z, t))$. Оптимизация проводится по двум функциям $q(x, y, z, t)$, $u(x, y, z, t)$. Решение указанной задачи оптимального управления обозначим $q^R(x, y, z, t)$, $u^R(x, y, z, t)$, где $q^R(x, y, z, t)$ – стратегия поощрения Ведомого Ведущим при принуждении.

3) Ведущий предъявляет Ведомому стратегию с обратной связью

$$\hat{q}(u,P,t) = \begin{cases} q^R(x,y,z,t), & \text{если } u(x,y,z,t) = u^R(x,y,z,t) \\ & \text{для } \forall\ t\in[0,\infty);(x,y,z)\in G, \\ q^P(x,y,z,t), & \text{иначе.} \end{cases}$$

4) При экономически разумном Ведомом решение в этом случае имеет вид ($q^R(x, y, z, t)$, $u^R(x, y, z, t)$).

В случае игры Гермейера Γ_{1x} информационный регламент следующий.

Определение 2. Пара функций (q^*, u^*) называется *равновесием принуждения в игре Гермейера* Γ_{1x}, если

$$J_S(q^*, u^*, P^*) = \sup_{0 \le q \le P} \inf_{u \in R(q)} J_S(q, u, P),$$

где $R(q) = \{0 \le u(x, y, z, t) \le q(x, y, z, t)$: $\forall w$: $0 \le w(x, y, z, t) \le q(x, y, z, t)$ $(t > 0;\ (x, y, z) \in G)$ $J_S(u, P) \ge J_S(w, P)\}$ – множество оптимальных ответов Ведомого на стратегию принуждения Ведущего q.

Алгоритм построения равновесия модели (1)–(7) в этом случае имеет вид:

1) В результате оптимизации функционала (3) с ограничениями (4) определяются оптимальные стратегии Ведомого в зависимости от управлений Ведущего, т.е. функция $u^*(x, y, z, t) = u^*(q(x, y, z, t, P(x, y, z, t)), t)$.

2) Найденная на первом шаге алгоритма функция $u^*(x, y, z, t) = u^*(q(x, y, z, t, P(x, y, z, t)), t)$ подставляется в (1). Решается задача оптимального управления (1), (2). Оптимальной для Ведущего является функция $q^*(x, y, z, t, P(x, y, z, t))$, которая доставляет максимум функционалу (1) при выполненных условиях (2).

3) Решение имеет вид $(q^*(x, y, z, t, P(x, y, z, t)), u^*(q^*(x, y, z, t, P(x, y, z, t)), x, y, z, t))$.

При реализации указанных выше алгоритмов для определенных наборов входных данных используется принцип максимума Понтрягина. В общем случае проводится переход от непрерывной дифференциальной модели системы управления к эквивалентной ей дискретной модели [20]. При этом принимается во внимание тот факт, что субъекты управления могут изменять свои стратегии поведения только в определенные моменты времени. В этом случае исследование проводится на основе метода сценариев. Остановимся подробнее на предложенном методе решения уравнений биологической кинетики.

Уравнения биологической кинетики решаются путем дискретизации с использованием неявной схемы с центральными разностями. Возникающие в результате сеточные уравнения можно записать в матричном виде:

(8) $Ax = f$,

где A – линейный положительно определенный оператор ($A > 0$). Для нахождения решения задачи (8) будем использовать неявный итерационный процесс [2]:

$$B\frac{x^{m+1}-x^m}{\tau_{m+1}}+Ax^m=f. \tag{9}$$

В уравнении (9) m – номер итерации, $\tau > 0$ – итерационный параметр, а B – некоторый обратимый оператор, который является предобуславливателем, или стабилизатором. Обращение оператора B должно быть существенно проще, чем непосредственное обращение исходного оператора A в (8).

Опишем использование метода минимальных поправок (ММП). Этот метод можно применять для решения уравнения с несамосопряженным, но положительно определенным оператором A. Требуется, чтобы оператор B был самосопряженным, положительно определенным и ограниченным. Метод минимальных поправок определяется следующим выбором оператора D: $D = A^*B^{-1}A$.

Формула для итерационного параметра τ_{k+1} в методе минимальных поправок имеет вид:

$$\tau_{k+1}=\frac{(A\omega_k,\omega_k)}{(B^{-1}A\omega_k,A\omega_k)},\quad k=0,1,... \tag{10}$$

При минимизации нормы поправки в H_B для выбранного оператора D получим

$$\|z_k\|_D^2=(Dz_k,z_k)=(A^*B^{-1}Az_k,z_k)=(\omega_k,r_k)=(B\omega_k,\omega_k)=\|\omega_k\|_B^2.$$

Норма поправки в H_B может вычисляться в итерационном процессе и использоваться для контроля его окончания.

4. Реализация ММП на многопроцессорной вычислительной системе с распределенной памятью

Для реализации ММП на суперЭВМ необходимо решить следующие задачи:

– равномерно распределить вычислительные ресурсы задачи по имеющимся вычислительным процессорам;

– организовать обмен данными между вычислителями и указать точки синхронизации [6].

Для равномерного распределения ресурсов задачи между вычислителями требуется передать каждому узлу подобласть расчетной области (провести декомпозицию расчетной области) [14, 16]. Стоит отметить, что декомпозиция области напрямую зависит от выбора метода решения СЛАУ. Представим алгоритм разбиения расчетной области для вариационных методов решения СЛАУ на примере ММП.

Расчет параметра τ_{m+1} осуществляется по формуле (10). Заметим, что вычисление числителя и знаменателя в формуле (10) может осуществляться параллельно в любой произвольной подобласти расчетной области. Это важное свойство позволяет использовать методы декомпозиции (кластеризации), в частности k-средних. Метод k-средних основан на минимизации функционала суммарной выборочной дисперсии разброса элементов (узлов расчетной сетки) относительно центра тяжести подобластей: $Q = Q^{(3)}$, где X_i – множество расчетных узлов сетки, входящих в i-ю подобласть, $i \in \{1, ..., m\}$, m – заданное количество подобластей.

$$Q^{(3)} = \sum_i \frac{1}{|X_i|} \sum_{x \in X_i} d^2(x, c_i) \to \min ,$$

где $c_i = \frac{1}{|X_i|} \sum_{x \in X_i} x$ – центр подобласти X_i, $d(x, c_i)$ – расстояние между расчетным узлом сетки x и центром подобласти c_i в эвклидовой метрике. Метод k-средних сходится только тогда, когда все подобласти примерно равны.

Алгоритм k-средних состоит из следующих шагов:

1. Выбираются начальные центры подобластей при помощи максиминного алгоритма.
2. Все расчетные узлы разбиваются на m клеток Вороного по методу ближайшего соседа, т.е. текущий расчетный узел сетки $x \in X_c$, где подобласть X_c выбирается из условия $\|x - s_c\| = \min_{1 \le i \le m} \|x - s_i\|$, где s_c – центр области X_c.
3. Рассчитываются новые центры по формуле

$$S_c^{(k+1)} = \frac{1}{\left|X_i^{(k)}\right|} \sum_{x \in X_i^{(k)}} x .$$

4. Проверяется условие остановки $S_c^{(k+1)} = S_c^{(k)}$ для всех $k = 1, \ldots, m$. Если условие остановки не выполняется, то осуществляется переход на пункт 2 алгоритма.

В качестве центров подобластей максиминный алгоритм выбирает расчетные узлы сетки следующим образом:

- первый центр – первый расчетный узел области;
- второй центр находится в расчетном узле сетки, расположенном на максимальном расстоянии от первого центра;
- если количество подобластей больше трех, то каждый следующий центр находится на максимальном удалении от ближайшего центра.

Для организации обмена данными требуется найти все точки, лежащие на границе каждой подобласти. Для этой цели используем алгоритм Джарвиса (задача построения выпуклой оболочки).

Необходимо сформировать список соседних подобластей для каждой подобласти и разработать алгоритм пересылки данных между подобластями.

При решении СЛАУ методом минимальных поправок для расчета итерационного параметра τ используем метод сдваивания. Синхронизация алгоритма решения задачи (5) требуется только в ММП при переходе на следующую итерацию.

5. Результаты счета

С использованием разработанного комплекса программ был изучен механизм образования заморных зон в мелководном водоеме. На рис. 2, 3 изображено распределение концентрации детрита и пеленгаса. Временной интервал T есть 56, 155 дней (после начала вегетационного периода фитопланктона). Управляющие воздействия указаны в примерах.

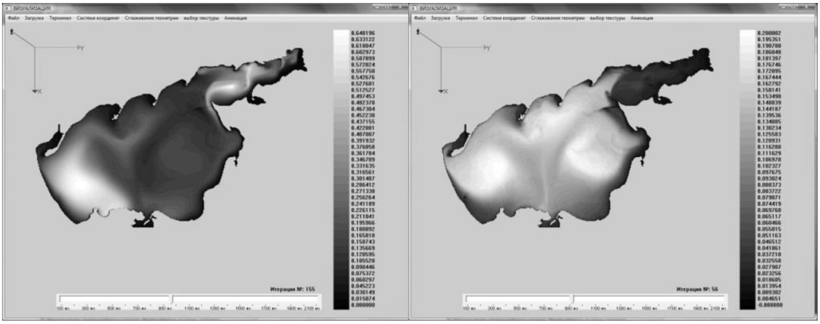

Рис. 2. Распределение концентрации детрита для модельного набора входных данных (*указан ниже в тексте*)

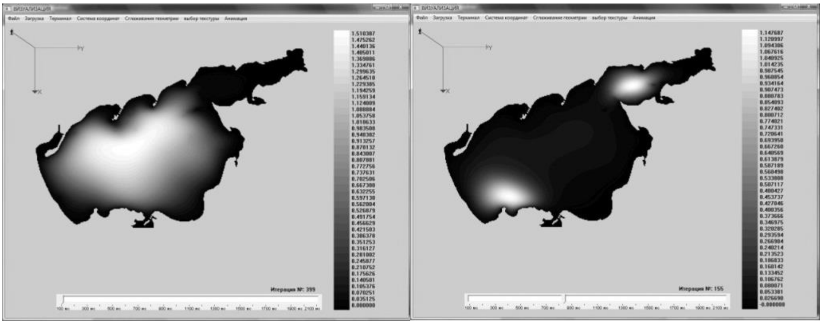

Рис. 3. Распределение концентрации пеленгаса для модельного набора входных данных (*указан ниже в тексте*)

В качестве входных данных использовалось начальное распределение полей течений в Азовском море при северном ветре. Расчеты проводились в случае $\mu_D = 5\cdot10^{-11}$; $\upsilon_D = 10^{-11}$; $\varepsilon_D = 1{,}9\cdot10^{-5}$; $\beta_D = 0{,}1$; $\varepsilon_4 = 0{,}4$; $\mu_P = 1{,}5\cdot10^{-3}$; $\upsilon_P = 1{,}6\cdot10^{-3}$; $\gamma_P = 0{,}125$; $\varepsilon_P = 1{,}16\cdot10^{-3}$; $\xi_P = 0{,}8$; $\varepsilon_5 = 0{,}47$; $\delta_P = 0{,}05$.

Проведено исследование задачи (1)–(5) с учетом управляющей настройки для указанного выше набора входных данных. Расчеты проводились в случае

$$C(q) = C\frac{p-q}{(p+\varepsilon)(q+\varepsilon)};\ C,\varepsilon = const;\ \varepsilon << 1.$$

При построении равновесий в игре Гермейера Γ_{1x} получено, что в любой момент времени в любой точке пространственной области оптимальная стратегия Ведомого определяется формулой

$$u^*(x,y,z,t)=\begin{cases} a/b, & \text{если} \quad a/b\le q(x,y,z,t),\\ q(x,y,z,t) & \text{иначе;}\end{cases}$$

а равновесие образуют стратегии Ведущего и Ведомого (q^*, u^*), определяемые формулой

$$(q^*,u^*)=\begin{cases} \{P(x,y,z,t),P(x,y,z,t)\}, & \text{если} \quad P(x,y,z,t)\le a/b,\\ \{P(x,y,z,t),a/b)\} & \text{иначе.}\end{cases}$$

При рассмотрении игры Гермейера Γ_{2x} в любой момент времени в любой точке пространственной области стратегия наказания Ведомого Ведущим имеет вид $q^P(x, y, z, t) = 0$ для $\forall(x,y,z)\in\overline{G}$. Для нахождения стратегии поощрения Ведомого Ведущим решается задача оптимального управления, указанная в пункте 2 соответствующего алгоритма.

Примеры модельных расчетов в случае игр Гермейера Γ_{1x} и Γ_{2x} приведены ниже.

Пример 1. В случае указанного ранее набора входных данных $a = 0{,}2$; $b = 0{,}01$; $\gamma = 0{,}001$; $M = 0{,}2$; $P^0(x, y, z, t) = 0{,}09$; $P(x, y, z, 0) = 0{,}05$ и для $\forall(x,y,z)\in\overline{G}$ получим, что затраты Ведущего и доход Ведомого в точке экстремума для игры Гермейера Γ_{1x} – $J_S^* = 4285$; $J_A^* = 6555$, а для игры Γ_{2x} – $J_S^* = 3688$; $J_A^* = 1993$.

Пример 2. При уменьшении оптимальной концентрации пеленгаса в случае входных данных примера 1 и $P^0(x, y, z, t) = 0{,}05$ – доход Ведомого падает, а расходы Ведущего растут. Для игры Γ_{1x} – $J_S^* = 4294$; $J_A^* = 5764$, Γ_{2x} – $J_S^* = 8665$; $J_A^* = 1754$.

Пример 3. В случае входных данных примера 1 и дальнейшего уменьшения оптимальной концентрации пеленгаса ($P^0(x, y, z, t) = 0{,}01$) – $J_S^* = 4302$; $J_A^* = 4976$ в случае игры Γ_{1x} и $J_S^* = 13642$; $J_A^* = 1324$ для Γ_{2x}.

Пример 4. С ростом расходов Ведущего при отклонении от оптимальной концентрации пеленгаса в случае входных данных примера 2 и $M = 10$ – общие расходы Ведущего растут и для игры Γ_{1x} – $J_S^* = 215020$; $J_A^* = 5764$, для Γ_{2x} – $J_S^* = 433276$; $J_A^* = 1476$.

В случае информационного регламента игры Гермейера Γ_{1x} оптимальная доля вылова рыбы больше, чем в игре Γ_{2x}, расходы Ведущего больше, а Ведомого – меньше.

6. Заключение

В работе предложена динамическая иерархическая теоретико-игровая модель управления борьбой с заморами в мелководных водоемах. В ней учитывается наличие двух иерархически связанных субъектов управления.

Рассмотрены различные информационные регламенты взаимоотношений между субъектами управления. В качестве метода иерархического управления используется метод принуждения. Дана конкретизация понятия решения в динамических играх Гермейера Γ_{1x} и Γ_{2x} [3] для модели борьбы с заморами в мелководных водоемах, указаны алгоритмы его построения.

При численной реализации предложенных алгоритмов используются многопроцессорные системы. Описан параллельный алгоритм численного решения модели взаимодействия планктона и рыб. Предлагаемый алгоритм численного решения поставленной задачи на суперЭВМ с использованием метода k-средних позволил существенно сократить время работы программного комплекса, численно реализующего описанную модельную задачу динамики взаимодействующих популяций в Азовском море. Приведены результаты численного решения задачи предотвращения заморов в мелководных водоемах.

Успешная борьба с заморами возможна или созданием условий, благоприятствующих росту оптимальной с точки зрения предотвращения заморов концентрации пеленгаса, или усилением наказания Ведущего при отклонении от оптимального с точки зрения предотвращения заморов значения концентрации пеленгаса. По сути дела, при этом посредством изменения интенсивности вылова решается задача компенсации неблагоприятных факторов, порождающих заморы.

Литература

1. АКИМОВ В.А., ГУЕНКО В.С., САВЧЕНКО Ю.Н. *Технические средства аэрации рыбоводных прудов.* – М.: Агропромиздат, 1990. – 79 с.
2. БАХВАЛОВ Н.С, ЖИДКОВ Н.П., КОБЕЛЬКОВ Г.М. *Численные методы.* – М.: Наука, 1987. – 600 с.
3. ГОРЕЛИК В.А., ГОРЕЛОВ М.А., КОНОНЕНКО А.Ф. *Анализ конфликтных ситуаций в системах управления.* – М.: Радио и связь, 1991. – 286 с.
4. ЛИННИК В.Я. И ДР. *Профилактика замора рыб*. – Мн.: Урожай, 1967. – 36 с.
5. НИКИТИНА А.В. *Модели биологической кинетики, стабилизирующие экологическую систему Таганрогского залива* // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – №8(97). – С. 130–134.
6. НИКИТИНА А.В., СЕМЕНОВ И.С. *Параллельная реализация модели динамики токсичной водоросли в Азовском море с применением многопоточности в операционной системе Windows* // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2013. – №1. – С. 130–135.
7. СУХИНОВ А.И, НИКИТИНА А.В. *Математическое моделирование и экспедиционные исследования качества вод в Азовском море* // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – №8(121). – С. 62–73.
8. СУХИНОВ А.И., ЧИСТЯКОВ А.Е., АЛЕКСЕЕНКО Е.В. *Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе* // Математическое моделирование. – 2011. – Т. 23, №3. – С. 3–21.
9. СУХИНОВ А.И., ЧИСТЯКОВ А.Е., ТИМОФЕЕВА Е.Ф. И ДР. *Математическая модель расчета прибрежных волновых процессов* // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, №8. – С. 32–44.
10. СУХИНОВ А.И. *Прецизионные модели гидродинамики и опыт их применения в предсказании и реконструкции чрезвычайных ситуаций в Азовском море* // Известия Южного

федерального университета. Технические науки. – 2006. – Т. 58, №3. – С. 228–235.

11. СУХИНОВ А.И., НИКИТИНА А.В., ЧИСТЯКОВ А.Е. И ДР. *Математическое моделирование условий формирования заморов в мелководных водоемах на многопроцессорной вычислительной системе* // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. – 2013. – Т. 14, №1. – С. 103–112.
12. СУХИНОВ А.И., ВАСИЛЬЕВ В.С. *Прецизионные двумерные модели мелких водоемов* // Математическое моделирование. – 2003. – Т. 15, №10. – С. 17.
13. СУХИНОВ А.И., НИКИТИНА А.В., ЧИСТЯКОВ А.Е. *Моделирование сценария биологической реабилитации Азовского моря* // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, №9. – С. 3–21.
14. СУХИНОВ А.И., ЧИСТЯКОВ А.Е., ФОМЕНКО Н.А. *Методика построения разностных схем для задачи диффузии-конвекции-реакции, учитывающих степень заполненности контрольных ячеек* // Известия Южного федерального университета. Технические науки. – 2013. – №4(141). – С. 87–98.
15. СУХИНОВ А.И., ЧИСТЯКОВ А.Е., ПРОЦЕНКО Е.А. *Математическое моделирование транспорта наносов в прибрежной зоне мелководных водоемов* // Математическое моделирование. – 2013. – Т. 25, №12. – С. 65–82.
16. СУХИНОВ А.И., ЧИСТЯКОВ А.Е., ШИШЕНЯ А.В. *Оценка погрешности решения уравнения диффузии на основе схем с весами* // Математическое моделирование. – 2013. – Т. 25, №11. – С. 53–64.
17. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Теоретико-игровое исследование некоторых способов иерархического управления* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2002. – №1. – С. 97–101.
18. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Теоретико-игровые принципы оптимальности иерархического управления устойчивым развитием* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2005. – №4. – С. 72–78.

19. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Иерархическое управление устойчивым развитием*. – М.: Физматлит, 2010. – 336 с.
20. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Исследование дифференциальных моделей иерархических систем управления путем их дискретизации* // Автоматика и телемеханика. – 2013. – №2. – С. 109–122.
21. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Трехуровневые системы управления эколого-экономическими объектами веерной структуры* // Проблемы управления. – 2010. – №.1. – С. 26–32.
22. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Динамические иерархические игры двух лиц в программных стратегиях и их приложения* // Математическая теория игр и ее приложения. – 2013. – Т. 5, вып.2. – С. 82–104.

DIFFERENTIAL GAME OF FISH KILL PREVENTION IN SHALLOW WATERBODIES

Alla Nikitina, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Candidate of Science, Associate Professor (nikitina.vm@gmail.com)
Maxim Puchkin, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Assistant Professor (mpuchkin@mail.ru)
Ilya Semenov, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Post-Graduate Student
Alexander Sukhinov, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Doctor of Science, Professor (sukhinov@gmail.com)
Guennady Ougolnitsky, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Doctor of Science, Professor (ougoln@mail.ru)
Anatoly Usov, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Doctor of Science, Associate Professor (tol151968@yandex.ru)
Alexander Chistyakov, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Candidate of Science, Associate Professor (cheese_05@mail.ru).

Abstract: *We build and investigate a differential game of fish kill prevention in shallow waterbodies. The algorithms are suggested for information structures Γ_{1x} and Γ_{2x} in dynamic Germeier games.*

The problem is solved numerically by the developed parallel algorithm, which considers the structure of a supercomputer with distributed memory. The proposed algorithm uses the k-means method and essentially reduces calculation time. The above models and routines are used to forecast the change in biomass volume of biological populations in shallow waterbodies considering the requirements of sustainable development.

Keywords: differential game model, dynamic Germeier games, compulsion, fish kill, k-means, efficiency, Azov sea.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии М.В. Губко

Поступила в редакцию 13.02.2015.
Опубликована 31.05.2015.