УДК 519.179.2
ББК 22.176 + 65.23

СТОХАСТИЧЕСКИЕ СЕТЕВЫЕ ГРАФИКИ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

Иванов Н. Н.[1]
(*ФГБУН Институт проблем управления РАН, Москва*)

Известное понятие обобщенного стохастического сетевого графика с заданной многомерной плотностью распределения времен прохождения дуг дополнено механизмом вероятностного преобразования его структуры. Предложена методика аналитико-имитационного моделирования подобных графиков, имеющего целью вычисление верхних и нижних оценок времени их выполнения.

Ключевые слова: обобщенный стохастический сетевой график, критический путь, среднее время выполнения сетевого графика, метод Монте-Карло.

1. Введение

Сетевые графики, применяемые для моделирования сложных взаимосвязанных временных процессов, известны с начала 60-х годов прошлого столетия [5]. Благодаря прозрачным изобразительным возможностям таких графиков они нашли широкое применение при моделировании процессов выполнения проектной документации, строительства зданий, сборочных процессов, процессов выполнения в реальном времени управляющих программ в вычислительных системах и т.п. В настоящее время эти графики рассматривается в более общих предположениях, нежели в их первоначальной редакции, основанных на рассмот-

[1] *Николай Николаевич Иванов, доктор технических наук, доцент* (*ivanov.nni@yandex.ru*).

рении отдельных работ, как случайных величин с известными распределениями [1–4].

В работе рассматривается обобщенный вариант стохастических сетевых графиков, названный ОССГ и имеющий своим отличием допущение двойственных дисциплин возбуждения вершин (классическая дисциплина «И» и альтернативная дисциплина «ИЛИ», которой соответствует возбуждение вершины в результате прохождения первой из входящих в нее дуг) [4]. Кроме того, в отличие от классического сетевого графика принимается допущение о том, что случайные времена прохождения дуг могут быть взаимозависимыми и описываться, соответственно, многомерными распределениями [4]. Эта конструкция в работе дополнена введением особых дуг, которые могут включаться или исключаться из графика (возможно, с заданными вероятностями). Подобная особенность при разработке программ, структурированных в виде ОССГ, может служить средством моделирования управляющего алгоритма, видоизменяемого в зависимости от внешних факторов или в иных целях, связанных с контролем времени выполнения программ.

Основной целью, поставленной в настоящей работе, явилось создание простого инструмента вычисления точечных верхних и нижних оценок среднего времени выполнения ОССГ, базирующегося на разработанных автором методах моделирования [4]. Дополнительной возможностью для анализа подобных ОССГ явилось приписывание особым дугам вероятностей, что позволило вычислять точечные и интервальные оценки среднего времени выполнения ОССГ и его среднеквадратического отклонения.

Перспективной представляется также возможность использования предлагаемого аппарата для аналитико-имитационного моделирования сетевых диаграмм, строящихся в соответствии с методологией IDEF3 [6], в которых присутствуют вершины-соединители с возбуждением по дисциплинам «И», «ИЛИ» и «ИСКЛЮЧЕННОЕ ИЛИ» (в последнем случае требуется назначение дополнительных попарно взаимоисключающих друг друга условий, регламентирующих инициализацию дуг, являющихся входными для вершин этого типа) и вершиныразветвители с синхронизацией по дисциплине «И». Отметим также, что предлагаемый в работе аппарат предоставляет дополнительные возможности, связанные с включением в эти сетевые диаграммы упомянутых выше особых дуг.

2. Основные положения

Существенным отличием рассматриваемых ОССГ в данной работе является допущение в процессе функционирования добавления или исключения отдельных дуг. Для управляющих программ подобное обобщение может быть продиктовано тем обстоятельством, что в процессе выполнения программ может возникнуть необходимость либо добавлять к вычислительному алгоритму соответствующие работы, либо, наоборот, их исключать. Это обобщение регламентируется путем включения в ОССГ *особых* дуг, для которых предусмотрена подобная возможность: особые дуги типа I, которые ведут в вершины типа ***И***, и особые дуги типа II, которые ведут в вершины типа ***ИЛИ***. Ограничением служит лишь следующее правило: множества неособых входных и выходных дуг для каждой вершины не пусты (за исключением начальной и конечной вершин, у которых не пусты множества выходных и входных дуг соответственно).

Поскольку подобные ОССГ нацелены на моделирование управляющих программ, выполняемых в режиме реального времени и многократно используемых, включение или исключение особых дуг типа I должно определяться до начала функционирования ОССГ (например, в зависимости от внешних факторов, влияющих на выбор алгоритма управления). Это правило не распространяется на особые дуги типа II.

На рис. 1 представлен образец ОССГ, на котором особые дуги 23 и 14 (обозначения дуг соответствуют номерам соединяемых ими вершин) являются, соответственно, дугами I и II типов.

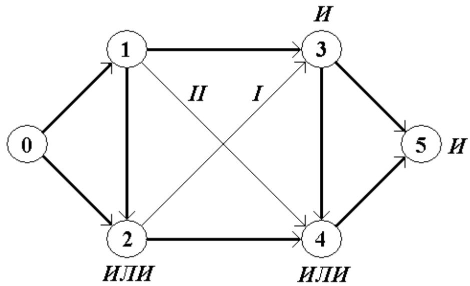

Рис. 1. Пример ОССГ I

В работе [4] изложена методика аналитико-имитационного моделирования ОССГ, не содержащего особых дуг, основанная на достаточном для этих целей уровне детализации в виде совокупности всех его путей[1]. Основой этой методики служило построение для каждого пути систем неравенств/совокупностей, образующих для всего ОССГ набор, на основании которого для каждого случайного вектора, составленного из вырабатываемых генератором значений времен выполнения работ, находился критический путь[2] и время его выполнения. Затем для достаточно большого числа статистических прогонов находилось среднее время выполнения, среднеквадратическое отклонение этого времени и вероятности критических путей. Это в итоге позволяло найти точечные оценки (ниже просто оценки) первых двух моментов времени выполнения ОССГ.

Для анализа ОССГ с особыми дугами задачи определения оценок первых двух моментов времени прохождения критических путей и их вероятностей теряют смысл. По этой причине целью настоящей работы является нахождения интервала,

[1] *Путь – это любая цепочка дуг, соединяющих начальную вершину с заключительной и проходимых без простоев в соответствии правилами функционирования вершин* (*кроме заключительной*).

[2] *Критическим является путь, время прохождения которого является наибольшим для заключительных вершин типа* ***И*** *и наименьшим для заключительных вершин типа* ***ИЛИ***.

внутри которого могут находиться оценки среднего времени выполнения ОССГ при произвольном сочетании в нем дуг обоих типов.

Как и в [4], на случайные времена выполнения работ накладываются следующие ограничения: распределения этих времен предполагаются абсолютно-непрерывными, заданными на конечных промежутках и, возможно, зависимыми (определяемыми заданием многомерных распределений).

Наличие в ОССГ k особых дуг порождает 2^k вариантов ОССГ, в которых особые дуги уже отсутствуют. Если число этих простых ОССГ достаточно велико, то непосредственный анализ их совокупности с помощью упомянутой методики может оказаться достаточно громоздким и трудоемким. Отсюда возникает задача нахождения этих оценок без построения совокупности простых ОССГ.

Пусть в ОССГ имеется k_1 дуг типа I и k_2 дуг типа II. Назовем ОССГ *базовым*, если в нем активированы p дуг типа I при условии $0 \le p \le k_1$ и q дуг типа II при условии $0 \le q \le k_2$.

В основу предлагаемого подхода в работе положены следующие утверждения.

Утверждение 1. 1) Оценка среднего времени выполнения базового ОССГ не понижается, если в него будет добавлена некоторая особая дуга типа I при условии $p \le k_1$.

2) Оценка среднего времени выполнения базового ОССГ не понижается, если из него будет исключена некоторая особая дуга типа II при условии $q > 0$.

Доказательство этого утверждения находится в приложении.

Из этого утверждения вытекает следующее логическое следствие.

Следствие 1. Оценка среднего времени выполнения базового ОССГ не повышается, если из него будет исключена некоторая особая дуга типа I при условии $p > 0$.

Следствие 2. Оценка среднего времени выполнения базового ОССГ не повышается, если в него будет добавлена некоторая особая дуга типа II при условии $q < k_2$.

Утверждение 2. 1) Верхняя оценка среднего времени выполнения базового ОССГ может быть получена путем включения в него всех особых дуг типа I и исключения из него всех особых дуг типа II.

2) Нижняя оценка среднего времени выполнения базового ОССГ может быть получена путем исключения из него всех особых дуг типа I и включения в него всех особых дуг типа II.

Доказательство утверждения 2 на основе утверждения 1 и следствий из него очевидно.

Для ОССГ, представленного на рис. 1, как это следует из утверждения 2, для нахождения верхней оценки среднего времени его выполнения нужно рассматривать ОССГ, изображенный на рис. 2, а для нахождения нижней оценки – ОССГ, изображенный на рис. 3. В разделе 4 приведены данные аналитико-имитационного моделирования ОССГ, показанных на рис. 2 и 3, с целью нахождения оценок времени их выполнения для указанных там вероятностных параметров времен прохождения дуг.

Очевидно, вычисление нижних и верхних оценок среднего времени выполнения ОССГ с особыми дугами может быть заменено вычислением среднего времени выполнения ОССГ и его среднеквадратического отклонения, если эти дуги будут нагружены вероятностями π_j их включения в график. Число возможных вариантов генерации попарно различающихся между собой ОССГ, как отмечено выше, будет равно 2^k (k – число особых дуг). Для небольших значений k число вариантов может быть таковым, что не составит труда рассмотреть их все с целью вычисления среднего времени m_i выполнения i-го ОССГ, после чего получить статистическую оценку среднего времени выполнения ОССГ в соответствии с равенством $\mu = \sum m_i p_i$, где p_i – вероятность i-го ОССГ, вычисляемая в соответствии с равенством $p_i = \prod \pi_l \prod(1 - \pi_m)$, π_l – вероятность включения l-й дуги в ОССГ, $1 - \pi_m$ – вероятность исключения m-й дуги из ОССГ.

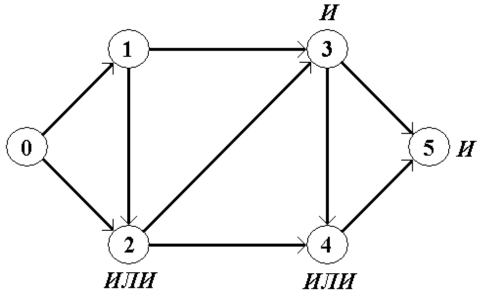

Рис. 2. ОССГ для нахождения верхней оценки

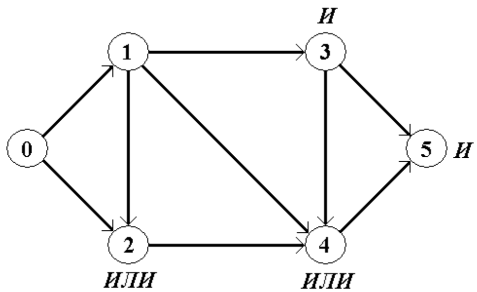

Рис. 3. ОССГ для нахождения нижней оценки

Если же k велико, то существенно упростить ситуацию может дисциплина включения/исключения дуг в ОССГ, при которой некоторые непересекающиеся подмножества особых дуг одновременно либо включаются в ОССГ, либо исключаются из него. Выражение для μ будет аналогично приведенному выше с той только разницей, что m_i в этом случае будет представлять собой среднеарифметическое оценок времени выполнения всех ОССГ, получаемых при рассматриваемых сочетаниях состояний особых дуг.

3. Примеры

Во всех приводимых ниже примерах моделирование производилось, как и в [4], для многомерных нормальных распределений времени прохождения дуг, заданных наборами средних значений и корреляционных матриц при уровнях значимости, определяемых «правилом трех сигм» (m_{ij} представляют собой в условных единицах математические ожидания времен прохождения дуг, соединяющих вершины с номерами i и j):

$m_{01} = m_{12} = m_{23} = m_{34} = m_{35} = m_{45} = 3$,

$m_{02} = m_{14} = m_{24} = 4{,}243$,

$m_{13} = 6$,

$$K_{01,02,23} = K_{34,24,45} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 2 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$K_{12,13,14,35} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \\ -0{,}5 & -2 & 2 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Методика генерации случайных векторов по приведенным вероятностным параметрам подробно описана в [4].

Пример 1. Для графов, изображенных на рис. 2 и 3, в которых вероятности включения дуг не определены, оценки среднего времени выполнения оказались равными 13,01 и 12,36 соответственно, а для ОССГ, в котором отсутствуют обе особых дуги, $\mu = 12{,}86$. При расчетах этих величин из корреляционных матриц удалялись соответствующие строки и столбцы. В то же время оценка времени выполнения ОССГ, изображенного на рис. 1, оказалось равной $\mu = 12{,}52$ [4].

Пример 2. Для этого же ОССГ рассматривался случай, когда особыми считались дуги 02, 13, 14, 24 и 35. Соответствующие вероятности их включения указаны на дугах (рис. 4). При этом дуги 13, 14 и 35 образовывали подмножество, в котором одновременно с включением в ОССГ II дуг 13 и 35 происходило исключение дуги 14 и наоборот. Дуги 02 и 24 также образовывали подмножество одновременно активируемых дуг.

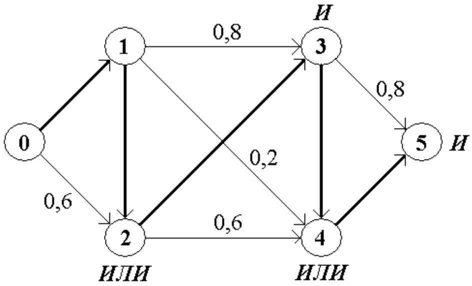

Рис. 4. Пример ОССГ II

Нормальные распределения времен прохождения дуг считались независимыми и определяемыми приведенными выше равенствами для математических ожиданий времен прохождения дуг и корреляционных матриц, в которых все диагональные элементы были те же, а недиагональные элементы были равны нулю.

Из четырех вариантов ОССГ, получаемых включением/исключением особых дуг, приведем один, показанный на рис. 5. Вероятность его генерации равна 0,32. Оценка времени выполнения ОССГ, изображенного на рис. 5, оказалось равной 15,72.

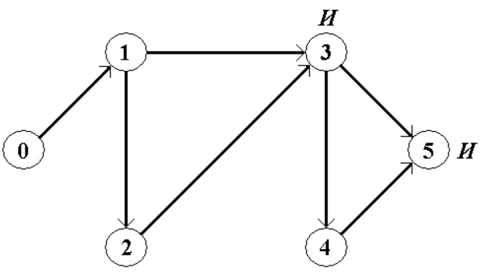

Рис. 5. Вариант трансформации ОССГ II

ОССГ II, приведенный на рис. 4, имел верхнюю оценку среднего времени выполнения, равную 15,72, нижнюю – 9,89 (эти оценки являются достижимыми), оценку среднего времени выполнения $\mu = 13{,}12$ и среднеквадратическое отклонение этого времени – 2,62.

Проведенные имитационные эксперименты могут быть достаточно просто дополнены вычислением интервальных оценок времен выполнения рассмотренных ОССГ с задаваемым пользователем уровнем значимости. Так, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ и $N = 5 \cdot 10^6$ ширина интервала доверия составила для последней из приведенных выше оценок величину $4{,}59 \cdot 10^{-3}$.

4. Заключение

В работе рассмотрено расширение понятия ОССГ, получаемое путем введения в него особых дуг двух типов. Для ОССГ с введенным расширением предложен метод вычисления верхних и нижних точечных оценок времени их выполнения. Рассмотрен также случай, когда заданы вероятности включения/исключения особых дуг, что в определенных условиях дает возможность находить точечные и интервальные оценки времени выполнения ОССГ и их среднеквадратические отклонения.

5. Приложение

Доказательство утверждения 1. 1) Рассмотрим ОССГ $\boldsymbol{\Gamma}_1$, в котором активирована особая дуга L типа I, являющаяся входной для некоторой вершины $\boldsymbol{P}$ типа ***И*** базового ОССГ $\boldsymbol{\Gamma}$. Пусть X – случайный фиксированный вектор, составленный из времен выполнения отдельных работ ОССГ $\boldsymbol{\Gamma}_1$. Если в результате активирования дуги L время возникновения события, связанного с вершиной $\boldsymbol{P}$, не увеличивается, то активирование дуги L не приведет к изменению временных процессов в $\boldsymbol{\Gamma}_1$ по сравнению с $\boldsymbol{\Gamma}$, и критические пути в обоих графиках совпадут, в результате чего времена их выполнения окажутся равными. В противном случае время возникновения событий во всех непосредственных вершинах-последователях вершины $\boldsymbol{P}$ либо остается неизменным, либо увеличивается. Если некоторая вершина-последователь $\boldsymbol{Q}$ имеет тип ***И***, то увеличение времени окончания прохождения $\boldsymbol{P}$ по сравнению с ОССГ $\boldsymbol{\Gamma}$ может либо не привести к изменению времени свершения ***Q***, либо вызвать его увеличение. Если же вершина-последователь ***Q*** имеет тип ***ИЛИ***, то в этом случае изменение времени свершения ***Q*** не произойдет. Если эта волна возмущения времен возникновения событий дойдет до заключительной вершины, то время выполнения ОССГ $\boldsymbol{\Gamma}_1$ в сравнении со временем выполнения ОССГ ***Г*** либо не изменится, либо увеличится.

Теперь, вычисляя соответствующие средние по суммам времен выполнения базового ОССГ ***Г*** и ОССГ $\boldsymbol{\Gamma}_1$ по N векторам X, получаем требуемое неравенство.

2) Пусть теперь в базовом ОССГ ***Г*** вершина ***P*** – типа ***ИЛИ***, и в ***Г*** активирована по крайней мере одна дуга L типа II, входящая в ***P***. Если в результате исключения дуги L время возникновения события, связанного с вершиной ***P***, не увеличится, то активирование дуги L не приведет к изменению временных процессов в $\boldsymbol{\Gamma}_1$ по сравнению с ***Г***, и критические пути в обоих графиках совпадут, в результате чего времена их выполнения окажутся равными. В противном случае время возникновения событий во всех непосредственных вершинах-последователях вершины ***P*** либо остается неизменным, либо увеличится. Аналогично сказанному выше в 1), если эта волна возмущения времен возникновения событий дойдет до заключительной вершины, то время выполнения ОССГ $\boldsymbol{\Gamma}_1$ в сравнении с ОССГ ***Г*** либо не изменится, либо увеличится.

Теперь, вычисляя соответствующие средние по суммам времен выполнения базового ОССГ ***Г*** и ОССГ $\boldsymbol{\Gamma}_1$ по N векторам X, получаем требуемое неравенство.■

Литература

1. ГОЛЕНКО-ГИНЗБУРГ Д.И. *Стохастические сетевые модели планирования и управления разработками*. – Воронеж: Научная мысль, 2010. – 283 с.
2. ИВАНОВ Н.Н., ШАСТУН В.В. *Определение точных верхних оценок времени выполнения сложных наборов задач в управляющих параллельных вычислительных системах* // Автоматика и телемеханика. – 2010. – №9. – С. 174–184.

3. ИВАНОВ Н.Н. *Метод вычисления функции распределения и числовых вероятностных характеристик времени выполнения стохастического сетевого графика* // Проблемы управления. – 2014. – №6. – С. 15–21.
4. ИВАНОВ Н.Н. *Аналитико-имитационное моделирование обобщенных стохастических сетевых графиков* // Управление большими системами. – М.: ИПУ РАН, 2015. – Вып. 53. – С. 27–44.
5. CLARK C.E. *The PERT model for the distribution of an activity* / Operations Research. – 1962. – Vol. 10(3). – P. 405–406.
6. MAYER R.J., MENZEL C.P., PAINTER M.K., de WITTE P.S., BLINN T., PERAKATH B. *Information Integration for Concurrent Engineering* (*IICE*) *IDEF3 Process Description Capture Method Report*. – Knowledge Based Systems, Inc. – 1995. – 224 p.

STOCHASTIC NETWORKS WITH VARIABLE STRUCTURE

Nikolay Ivanov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, ivanov.nni@yandex.ru).

Abstract: *The well-known concept of a stochastic network with the given multi-dimensional density distribution of arc travel time duration is complemented with a probabilistic mechanism of network structure transformation. A technique is suggested for analytical and simulation modeling of such variable structure networks, with the aim to calculate upper and lower bounds of execution time.*

Keywords: generalized stochastic network, critical path, average time to perform network schedule, Monte Carlo method.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии М.В. Губко

Поступила в редакцию 30.03.2015.
Опубликована 31.07.2015.