УДК 519.177
ББК 22.18

РЕСУРСНАЯ СЕТЬ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ЕМКОСТЬ АТТРАКТОРОВ[1]

Жилякова Л. Ю.[2]
(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

Рассматриваются регулярные несимметричные ресурсные сети, в которых вершины-аттракторы, аккумулирующие ресурс сверх порогового значения, имеют ограничения на емкость. В этом случае излишки ресурса перераспределяются в некоторое множество вершин, названных вторичными аттракторами. Изучается функционирование сети с ограничениями на емкость аттракторов при разных значениях суммарного ресурса и определяются пороговые значения, при которых сеть изменяет поведение.

Ключевые слова: ресурсная сеть, графовая динамическая пороговая модель, аттракторы, ограничения на емкость.

1. Введение

Ресурсная сеть, впервые предложенная в [8], – графовая динамическая потоковая модель, в которой в дискретном времени происходит перераспределение ресурса между вершинами. Сеть представлена ориентированным взвешенным графом; веса ребер обозначают их пропускные способности.

Вершины распределяют ресурс в исходящие ребра по двум разным правилам с пороговым переключением. Переключение

[1] *Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ* (*проекты № 14-01-00422а, 15-07-02488а*).

[2] *Людмила Юрьевна Жилякова, доктор физико-математических наук* (*zhilyakova.ludmila@gmail.com*)

происходит в зависимости от количества ресурса, содержащегося в вершине. Если это количество превосходит сумму весов всех исходящих из нее ребер, в каждую смежную вершину передастся ресурс, равный пропускной способности соответствующего ребра. В противном случае вершина отдаст весь свой ресурс, разделив его пропорционально пропускным способностям. Модель параллельна: на каждом такте дискретного времени t вершины, имеющие ресурс, отдают его одновременно.

Для такой модели получены результаты, позволяющие для каждой топологии сети и пропускных способностей ее ребер, для любого суммарного ресурса и его начального распределения по вершинам определить предельное состояние и предельный поток. Определена формула, которая позволяет для произвольной сети вычислить агрегированный показатель – пороговое значение ресурса T [6]. При суммарном ресурсе в сети, не превосходящем T, ее функционирование, начиная с некоторого конечного такта, описывается однородной цепью Маркова [4]. Более интересные результаты получены для ресурсов выше порогового значения. В этом случае процесс перераспределения ресурса описывается неоднородной цепью Маркова и в сетях с разными топологиями возникают различные эффекты.

При *малых* ресурсах (меньших порогового значения T) функционирование сети полностью определяется стохастической матрицей, полученной из матрицы пропускных способностей нормированием строк [4]. Предельное состояние для регулярных сетей (которые исследуются в настоящей работе) всегда существует и единственно; вектор предельного состояния пропорционален вектору предельных вероятностей однородной цепи Маркова. На сети с малым ресурсом переносятся все результаты, полученные для случайных блужданий и процессов рассеяния на графах [3, 7, 9, 14, 17]. Модели, основанные на однородных цепях Маркова, используются во многих предметных областях, в частности, для решения задач о нахождении консенсуса в многоагентных системах и социальных сетях [1, 2], при исследовании распространения эпидемий, в моделировании регуляторных сетей экспрессии генов и многих других.

Разнообразные прикладные приложения, основанные на модели рассеяния на графах, описаны в книге [14].

При *больших* ресурсах ресурсная сеть наследует часть свойств целочисленных пороговых моделей, таких как, в частности, игра выстреливания фишек, в которой вершины графа обмениваются фишками с выполнением закона сохранения. Вершина может выстрелить, если ее суммарное количество фишек больше количества выходных ребер. Тогда она посылает по одной фишке вдоль каждого ребра. Классическая игра представляет собой последовательные выстреливания вершин [12, 13]; очередность вершин выбирается случайным образом. Были исследованы и параллельные игры выстреливаний [18]. Эта математическая модель нашла применение при описании процессов, получивших название «самоорганизованная критичность», таких, в частности, как сход лавин [10, 11, 15, 16].

Ресурсная сеть при больших ресурсах, объединяя в себе свойства моделей рассеяния и пороговых моделей, демонстрирует проявление новых свойств. К ним относится способность вершин отдавать ресурс независимо от его количества (таким образом, обеспечивается устойчивость и сходимость, которых нет в целочисленных моделях); способность некоторых вершин накапливать излишки ресурса (чего нельзя достичь в однородных марковских процессах), при этом все остальные вершины имеют ресурс, пропорциональный компонентам вектора предельных вероятностей соответствующей однородной цепи Маркова [4–6].

2. Основные определения, обозначения и предварительные результаты

В настоящем разделе будут конспективно перечислены основные определения и предварительные результаты, полученные в [8, 4–6] и др.

Ресурсная сеть представляет собой ориентированный граф $G = (V, E)$, $|V| = n$. Ребра e_{ij} имеют неотрицательные веса r_{ij}, которые обозначают их пропускные способности; $R = (r_{ij})_{n\times n}$ – матрица пропускных способностей.

Вершины сети содержат ресурс, который перераспределяется в дискретном времени: $q_i(t) \geq 0$ – количество ресурса в вершине v_i в момент времени t. Состояние сети в момент t описывается вектором $Q(t) = (q_1(t), \ldots, q_n(t))$. Предельное состояние сети будем обозначать через Q^*.

Обозначим через r_i^{in} и r_i^{out} сумму всех пропускных способностей входящих и исходящих ребер соответственно. Будем называть эти величины входной и выходной пропускными способностями вершины v_i.

Правила функционирования сети. В момент t вершина v_i по ребру e_{im} отдает в смежную ей вершину v_m:

r_{im} единиц ресурса, если $q_i(t) > r_i^{out}$ (правило 1);

$\frac{r_{im}}{r_i^{out}} q_i(t)$ единиц ресурса, если $q_i(t) \leq r_i^{out}$ (правило 2).

Суммарный ресурс сети обозначается через W. При функционировании выполняется закон сохранения: $W = \text{const}$.

Множество вершин, для которых $q_i(t) \leq r_i^{out}$, называется зоной $Z^-(t)$. Вершины из $Z^-(t)$ функционируют по правилу 2. $Z^+(t)$ – множество вершин, ресурс которых больше их выходной пропускной способности, они функционируют по правилу 1.

T – пороговое значение ресурса, такое что при $W \leq T$ все вершины, начиная с некоторого t', переходят в зону $Z^-(t)$; при $W > T$ зона $Z^+(t)$ не пуста и не изменяется, начиная с некоторого t''. Для несимметричных сетей существование и единственность T доказаны в *теореме* 3 [4], в дальнейших работах было показано, что T существует и единственно в любой эргодической сети (сети без стоковых вершин).

Для предельного состояния Q^* обозначим эти зоны через Z^{-*} и Z^{+*}.

Доказано, что при $W \leq T$ сеть любой топологии эквивалентна однородной цепи Маркова, заданной стохастической матрицей R', полученной из матрицы пропускных способностей R нормированием по строкам (этот результат для регулярных сетей был получен в [4] и впоследствии перенесен на остальные классы сетей). Процессы перераспределения ресурса в регулярных сетях при малом ресурсе всегда сходятся. Предельное состояние существует и единственно (не зависит от начального распределения ресурса по вершинам).

Вектор предельного состояния сети при $W = 1$ совпадает с вектором предельных вероятностей соответствующей цепи Маркова. Обозначим этот вектор через Q^{1*}.

При $W > T$ в некоторых вершинах начинают накапливаться излишки ресурса.

Введем обозначение:

(1) $\Delta r_i = r_i^{in} - r_i^{out}$.

По знаку Δr_i вершины делятся на три класса:

1) *вершины-приемники*, для которых $\Delta r_i > 0$;
2) *вершины-источники*, для которых $\Delta r_i < 0$;
3) *нейтральные вершины*, для которых $\Delta r_i = 0$.

Вершины, способные при $W > T$ оказаться в зоне Z^{+*}, называются *аттракторами*. В роли аттракторов могут выступать некоторые приемники и некоторые нейтральные вершины (критерий аттрактивности будет приведен ниже после введения всех требуемых обозначений), причем первые способны притягивать ресурс и поэтому названы *активными аттракторами*, вторые могут лишь сохранить ресурс, если он был достаточно большим в начальном состоянии. Такие аттракторы называются пассивными.

Поток в ресурсной сети

Ресурс, выходящий из вершины v_i по ребру e_{ij} в момент t, приходит в вершину v_j в момент $t + 1$; между моментами t и $t + 1$ он находится в ребре e_{ij}. Этот ресурс назовем потоком $f_{ij}(t)$. Общий поток сети описывается матрицей $F(t) = (f_{ij}(t))_{n\times n}$.

Величиной потока будем называть сумму

$$f_{sum} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t).$$

Введем следующие обозначения.

$$\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t) = f_i^{out}(t)\,;\ \sum_{i=1}^{n} f_{ij}(t) = f_j^{in}(t+1)\,.$$

Будем полагать, что $f_j^{in}(0) = 0$.

$F^{out}(t) = (f_1^{out}(t) , \ldots , f_n^{out}(t))^{\mathrm{T}}$ – вектор исходящего потока;

$F^{in}(t) = (f_1^{in}(t) , \ldots , f_n^{in}(t))$ – вектор входящего потока;

F^* – матрица предельного потока;

$f_{sum}^* = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}^*$ – суммарный предельный поток; F^{in*} и F^{out*} – векторы двух предельных потоков.

Входное и выходное соседство.

Назовем *входными соседями* вершины v_i множество $V_i^{in} = \{v_k | r_{ki} > 0\}$; *выходными соседями* вершины v_i будем называть множество $V_i^{out} = \{v_k | r_{ik} > 0\}$.

3. Описание сети с ограничениями на емкость аттракторов

3.1. МОТИВАЦИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ

В работах [5, 6] исследовано поведение регулярных несимметричных сетей с ресурсом, превышающим пороговое значение *T*. Напомним, что *регулярной* называется сеть, представленная сильно связным графом, у которого длины всех циклов взаимно просты, а *несимметричной* – сеть, в которой присутствует хотя бы пара вершин, для которых Δr_i (формула (1)) отлична от нуля. То есть в несимметричной сети необходимо существует хотя бы один источник и хотя бы один приемник. При этом хотя бы один приемник будет в такой сети активным аттрактором.

Несимметричные сети с несколькими активными аттракторами – как правило, искусственные конструкции. В них для нескольких вершин должен выполняться критерий аттрактивности ([6]):

$$j = \arg \min_{i \in \{1,\ldots,n\}} \frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}},$$

где q_i^{1*} – элементы вектора предельных вероятностей однородной цепи Маркова Q^{1*}.

В противном случае, даже если в сети много приемников, активным аттрактором из них может быть только один.

При любом начальном распределении суммарного ресурса $W > T$ в регулярной несимметричной сети с одним аттрактором будет единственное предельное состояние, в котором аттрактор забирает все излишки, сколь большими они бы ни были. (Если в сети два и более аттрактора, излишки ресурса распределятся между ними.) Распределение ресурса между аттракторами зависит от начального состояния. В остальных вершинах предельные значения ресурса постоянны при сколь угодно большом количестве суммарного ресурса и его начальном распределении по вершинам – не-аттрактивные вершины в предельном состоянии всегда содержат ресурс, строго меньший своей выходной пропускной способности, даже если это вершины-приемники [5].

Новая модель, представленная в настоящей статье, предполагает, что аттракторы должны «делиться» излишками ресурса с другими вершинами сети. Это достигается тем, что в аттракторах вводится *ограничение на емкость* – максимальное количество ресурса, которое может получить аттрактор v_i сверх величины r_i^{out} (величине r_i^{out} равна соответствующая компонента вектора предельного состояния при $W = T$).

Если ресурс в сети достаточно велик, то после насыщения аттракторов он начнет распределяться в другие вершины. Новые вершины, принимающие излишки ресурса, назовем *вторичными аттракторами*. Ясно, что процесс ограничения можно продолжать и дальше, вводя в сети аттракторы все более высоких рангов. «Изначальные» аттракторы (аттракторы сети без ограничений) будем называть первичными. Поскольку процесс ограничения первичных, вторичных и т.д. аттракторов одинаков, рассмотрим лишь переход от первичных аттракторов к вторичным.

3.2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Как уже было отмечено, вектор предельного состояния при $W = 1$ является вектором предельных вероятностей цепи Маркова, заданной графом сети. Для него введено обозначение Q^{1*}.

Вектор предельного состояния при $W = T$ обозначим через $\tilde{Q}$.

Введем такую нумерацию вершин сети, при которой первичные аттракторы имеют номера от 1 до l. В [5] было доказано, что $\tilde{Q} = (r_1^{out},\dots,r_l^{out},\tilde{q}_{l+1},\dots,\tilde{q}_n)$, причем, $\tilde{q}_j < r_j^{out}$, $j = l + 1, \dots, n$.

Из единственности предельного состояния следует, что вектор $\tilde{Q}$ пропорционален вектору Q^{1*} с коэффициентом T: $\tilde{Q} = Q^{1*}T$. При этом компоненты с номерами от $l + 1$ до n не изменяются при любом $W > T$, и все излишки распределяются только среди аттракторов (Следствие 5 из теоремы 1 [5]). Вектор предельного состояния для $W > T$ имеет вид

$$Q^* = (r_1^{out} + \Delta q_1^*,\dots,r_l^{out} + \Delta q_2^*,\tilde{q}_{l+1},\dots,\tilde{q}_n)\text{, где } \sum_{i=1}^{l}\Delta q_i^* = W - T.$$

Предположим теперь, что для всех аттракторов введено ограничение на емкость p, такое что каждый аттрактор может получить лишь ресурс, равный $r_i^{out} + p$ и дальнейшее накопление в этой вершине становится невозможным.

Ясно, что при этом появятся новые вершины, накапливающие излишки.

Перечислим основные задачи исследования получившейся модели:

1. Исследование динамики сети и переходных процессов при разном суммарном ресурсе.
2. Нахождение пороговых значений количества суммарного ресурса, при которых происходят качественные изменения функционирования сети – насыщение первичных аттракторов и начало накопления во вторичных. Описание функционирования в каждом из интервалов между двумя соседними пороговыми значениями.
3. Исследование устойчивости: существование предельных потоков и предельных состояний в каждом из интервалов.
4. Нахождение критерия «вторичной аттрактивности».
5. Нахождение векторов предельных состояний и потоков.

В данной работе мы остановимся на первых двух пунктах (и частично третьем), но сначала опишем алгоритм ограничения емкости аттракторов и обоснуем его использование.

4. Алгоритм функционирования сети

Ограничение на емкость аттракторов формулируется просто и достаточно естественно: если представить вершины в виде некоторых резервуаров ресурса, то у аттракторов на высоте p от значения r_i^{out} ставится заслонка и нового ресурса вершина принять не может.

Сделаем одно важное замечание относительно начальных состояний. Если в начальном состоянии в первичном аттракторе содержится ресурс, превосходящий его ограничение, то будем полагать, что такой аттрактор ограничить нельзя. А поскольку заранее неизвестно, какие вершины в сети являются первичными аттракторами, будем рассматривать такие начальные состояния $Q(0)$, в которых ресурс выше значений $r_i^{out} + p$ может содержаться только в вершинах-источниках или в тех нейтральных вершинах, которые гарантированно не будут первичными аттракторами.

4.1. ФУНКЦИОНИРОВАНИЕ СЕТИ ПОСЛЕ НАСЫЩЕНИЯ ПЕРВИЧНЫХ АТТРАКТОРОВ

Представим фазу функционирования сети с ограничениями, на которой происходит накопление ресурса в аттракторах. На этой фазе входной поток в аттракторы превосходит выходной. При наличии ограничений в вершинах-аттракторах на каждом такте должно проверяться условие, не превышены ли их емкости. Если емкость вершины превышена, она должна принять не весь ресурс, а лишь его часть. При этом нужно решить, что делать с оставшимся ресурсом.

При моделировании физического объекта логично было бы оставить излишки ресурса в ребрах. Такое решение хорошо еще и тем, что на каждом последующем такте входящий в первичный аттрактор поток будет строго равен выходящему из нее потоку, потому что остатки ресурса во входящих ребрах пропорционально уменьшили бы их пропускную способность, частично «закупорив» их собой. Тем самым в аттракторе будет поддерживаться стабильный ресурс $r_i^{out} + p$. Однако в модели выполняется закон сохранения. На каждом такте времени весь ресурс должен быть в вершинах, и этот выход не является приемлемым. Поэтому перед каждым тактом вершины анализируют свой потенциальный входящий поток. Если в некоторой вершине на некотором ненулевом такте t входной поток избыточен, т.е. при принятии всего потока выполнится неравенство $q_i(t) > r_i^{out} + p$, она оповещает свое входное соседство, и все вершины $v_k \in V_i^{in}$ по соответствующим ребрам отдают не весь планируемый поток, а пропорционально убавляют его на некоторую часть с коэффициентом $c_i(t) \in (0, 1)$. Суммарный входной поток уменьшается с этим же коэффициентом:

$$f_i^{in\_new}(t) = f_i^{in}(t) - c_i(t) \cdot f_i^{in}(t) = (1 - c_i(t)) \cdot f_i^{in}(t).$$

При этом, поскольку вершина функционирует по правилу 1, на каждом такте она отдает ресурс, равный своей выходной пропускной способности r_i^{out}. Чтобы удержать в ней стационарный ресурс, равный $r_i^{out} + p$, дивергенция потока (разность между входным и выходным потоком) в этой вершине должна быть равна 0, и, следовательно, входной поток тоже должен быть равен r_i^{out}.

Имеем:

$$(1 - c_i(t)) \cdot f_i^{in}(t) = r_i^{out};$$

откуда коэффициент пропорциональности

$$c_i(t) = 1 - \frac{r_i^{out}}{f_i^{in}(t)} = \frac{f_i^{in}(t) - r_i^{out}}{f_i^{in}(t)} = \frac{\Delta q_i(t)}{f_i^{in}(t)}, \tag{2}$$

где $\Delta q_i(t)$ – потенциальный избыток ресурса в аттракторе v_i.

Коэффициент $c_i(t)$ зависит только от входного потока в вершину-аттрактор v_i. Неотданный ресурс остается в этих вершинах на такте t.

В следующем разделе формула для коэффициента $c_i(t)$ претерпит некоторые изменения.

4.2. МАРКИРОВКА ПЕРВИЧНЫХ АТТРАКТОРОВ

Для того чтобы функционирование сети с ограничениями на аттракторы было корректным, первичные аттракторы необходимо пометить до начала процесса перераспределения ресурса. Это условие, на первый взгляд, выглядит искусственным и усложняет модель. Однако на практике оказывается, что в сети, которая о себе ничего не знает (до начала ее работы неизвестно, какие вершины являются первичными аттракторами), не всегда возможно корректно поставить ограничения на емкость.

Рассмотрим две иллюстрации этого утверждения.

1. Представим себе, что в сети имеется более одного первичного аттрактора, и рассмотрим некоторую пару из множества первичных аттракторов. Пусть количество ресурса настолько велико, что начиная с некоторого такта t оба они набрали бы максимально допустимое количество ресурса, и при этом в момент t в некоторых источниках еще содержался бы избыток ресурса, который они отдают в аттракторы. Поскольку (по определению первичных аттракторов) при таких процессах их входной поток превосходит выходной, на каждом такте в обоих аттракторах появляются потенциальные излишки, которые должны остаться в тех вершинах, откуда они пришли. Представим теперь, что эти аттракторы связаны двусторонней парой ребер. Тогда первый оставляет свои излишки у второго, а второй – у первого. При этом ни первый, ни второй не могут их оставить у себя, потому что имеют максимально возможное количество ресурса $r_i^{out} + p$. Эти излишки должны быть перераспределены между другими вершинами. Но другие вершины уже один раз получили излишки назад и пересчитали свой ресурс. Процесс пересчета ресурса у входящих соседей придется повторить. Избежать такого итеративного распределения излишков на каждом такте можно лишь пометив аттракторы. Тогда будет достаточно не возвращать ресурс из первичных аттракторов в смежные с ними первичные аттракторы, а распределять излишек между не-аттрактивными вершинами из их входного соседства. Формула (2) для расчета коэффициента пропорциональности $c_i(t)$ в этом случае изменится:

$$c_i(t) = \frac{\Delta q_i(t)}{\sum\limits_{k=l+1}^{n} f_{ki}(t)},$$

если помеченные первичные аттракторы имеют номера от 1 до l.

Весь потенциальный избыток ресурса в аттракторе будет пропорционально делиться лишь между не-аттрактивными вершинами.

2. Если аттракторы в сети не помечены, они определяются во время функционирования следующим образом. Предполага-

ется, что если вершина в начальном состоянии имела малый ресурс, а за время функционирования ей удалось набрать ресурс выше предельной емкости, то эта вершина – активный аттрактор – по-другому определить аттрактор, не зная вектора предельного состояния, невозможно [6]. В большинстве случаев это предположение верно. Однако в некоторых случаях динамика сети может быть такой, что определенные вершины могут сначала набирать, а затем терять ресурс (т.е. на протяжении значительного времени демонстрировать поведение аттракторов, не являясь таковыми). Рассмотрим пример, иллюстрирующий такую динамику.

Пример 1. Пусть сеть с пятью вершинами задана матрицей пропускных способностей:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 100 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Это полный граф, два ребра которых имеют пропускные способности, отличные от остальных.

Напомним, что в матрице R i-я строка соответствует пропускным способностям ребер, выходящих из вершины v_i, а i-й столбец – пропускным способностям ребер, входящих в вершину v_i.

В этой сети два приемника – вершины v_1 и v_2, один источник – v_3 и две нейтральных вершины v_4 и v_5. Аттрактор этой сети – вершина v_2, несмотря на то, что у вершины v_1 входная пропускная способность значительно выше (v_2 «паразитирует» на v_1).

Рассмотрим функционирование этой сети *без ограничения на аттракторы*. Пусть вектор начального состояния имеет вид $Q(0) = (0, 0, 0, 0, 100)$, т.е. ресурс 100 находится в нейтральной вершине.

Вектор предельного состояния $Q^* = (6{,}266; 84{,}104; 3{,}210; 3{,}210; 3{,}210)$.

Из рис. 1 видно, что прежде чем уйти в зону $Z^-(t)$, вершина v_1 более ста сорока тактов держится в зоне $Z^+(t)$ вместе с вершиной v_2, при этом больше семидесяти тактов количество ресурса в ней возрастает. До некоторого такта $t' \approx 75$ обе эти вершины неотличимы по поведению и годятся на роль аттракторов. Если накладывать ограничения на емкость, не зная заранее, сколько в сети аттракторов и каковы они, то ограничения придется наложить на обе вершины, хотя вершина v_1 является вторичным аттрактором этой сети, и именно она должна получить все излишки ресурса.

Единственным первичным аттрактором является вершина v_2 – в конечном счете, несмотря на немонотонную динамику сети, она притянула к себе все излишки, и именно ее одну нужно ограничивать. Если поставить на нее ограничение $p = 10$, получим динамику, представленную на рис. 2.

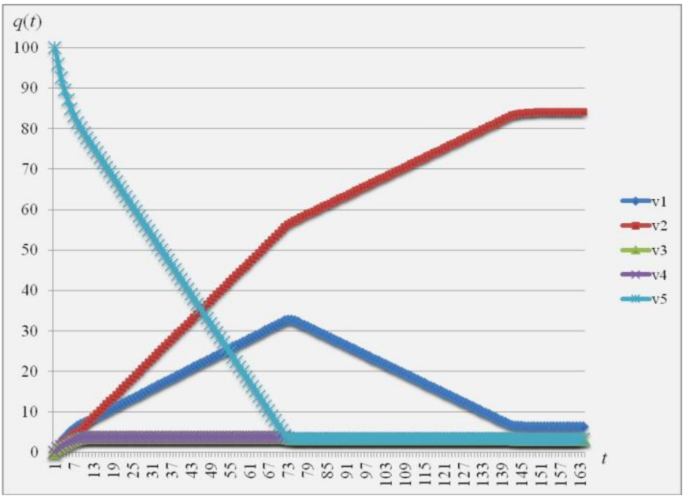

Рис. 1. Функционирование сети без ограничений на аттракторы при большом ресурсе

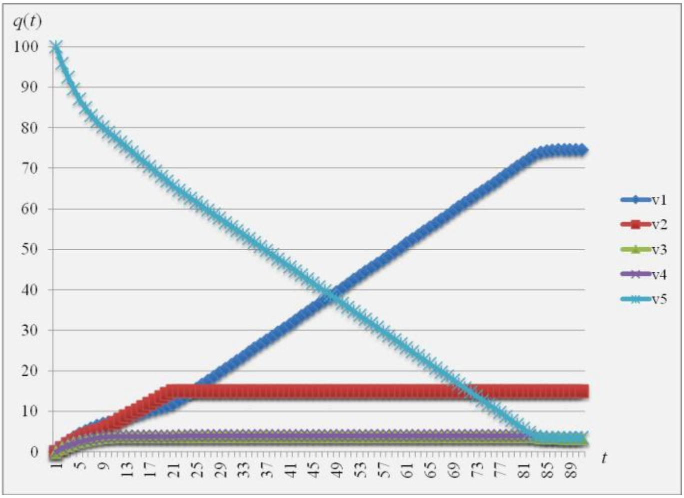

Рис. 2. Функционирование сети с ограничением на емкость аттрактора p = 10 (вершина v_2 имеет ресурс, равный 15; излишки ресурса – в вершине v_1)

Предельное состояние при функционировании сети с ограничением будет $Q^* = (74{,}557; 15; 3{,}438; 3{,}503; 3{,}503)$.

Однако если предварительно не иметь информации о том, какая из вершин v_1 и v_2 является первичным аттрактором, нет никакой возможности узнать, какую из них нужно ограничивать, когда ресурс в них достигнет величины, равной $r_i^{out} + p$, – для вершины v_1 эта величина равна 17, для вершины v_2, соответственно, 15.

Единственный выход, позволяющий избежать некорректного задания ограничений, как и в предыдущем случае, состоит в том, чтобы, используя критерий аттрактивности, определять первичные аттракторы сети и ставить на них ограничения до начала функционирования.

Замечание. Как видно из сравнения двух векторов предельного состояния, в сети с ограничениями изменились все компоненты вектора Q^*. Вектор предельного состояния в сети с $W = 100$ без ограничений: $Q^* = (6{,}266; 84{,}104; 3{,}210; 3{,}210; 3{,}210)$, с ограничениями: $Q^* = (74{,}557; 15; 3{,}438; 3{,}503; 3{,}503)$. Ресурсы в не-аттрактивных вершинах увеличились. Объяснение причин увеличения компонент вектора предельного состояния и, как следствие, суммарного потока в сети с ограничениями будет дано в следующем разделе.

5. Исследование потока при ограничениях на аттракторы

В сети без ограничений на аттракторы при $W > T$ для вычисления компонент вектора предельного потока количество избыточного ресурса (сверх T) не имеет значения. При $W = T + \Delta W$ для любого сколь угодно большого значения ΔW величина суммарного предельного потока в регулярной сети неизменна и равна T (теорема 1 [5]).

Пусть по-прежнему нумерация вершин сети такова, что первичные аттракторы имеют номера от 1 до l. В [5] доказано, что при $W = T$ предельное состояние описывается вектором

$$(3)\quad \tilde{Q} = (r_1^{out}, \ldots, r_l^{out}, \tilde{q}_{l+1}, \ldots, \tilde{q}_n),$$

независимо от начального состояния. Этим же вектором описываются входной и выходной предельные потоки при любом $W = T + \Delta W$, $\Delta W \geq 0$:

$$F^{in*} = F^{out*\mathrm{T}} = (r_1^{out}, \ldots, r_l^{out}, \tilde{q}_{l+1}, \ldots, \tilde{q}_n);\ \ f_{sum}^{*} = T.$$

Для доказательства утверждений о величине потока в сетях с ограничениями сформулируем лемму о свойстве активных аттракторов сети без ограничений. Напомним, что активным аттрактором называется вершина-приемник, способная притягивать излишки ресурса при $W > T$.

Лемма 1. В несимметричной регулярной сети до каждого активного аттрактора существует путь хотя бы из одной не-аттрактивной вершины.

Доказательство. Рассмотрим произвольный активный аттрактор v_i. Поскольку v_i – приемник, для него выполняется неравенство $r_i^{in} > r_i^{out}$. Если его входное соседство V_i^{in} содержит не-аттрактивную вершину, лемма доказана. Если V_i^{in} не содержит не-аттрактивных вершин, то все входные соседи v_i сами являются аттракторами (активными или пассивными), т.е. это приемники или нейтральные вершины. А это означает, что для вершин, принадлежащих V_i^{in}, должны существовать свои входные соседи, которые будут компенсировать ресурс, отдаваемый ими в активный аттрактор v_i, и служить для них источниками. Таким образом, существует по крайней мере один источник, из которого имеется путь в v_i. □

Сформулируем утверждения об оценке величины суммарного потока в сетях с ограничением при разных количествах суммарного ресурса.

Утверждение 1. Пусть в регулярной ресурсной сети с ограничением на аттракторы $r_i^{out} + p$, $i = 1, \ldots, l$, суммарный ресурс равен $W = T + \Delta W$, $\Delta W > 0$, и в начальном состоянии ни один аттрактор не имеет ресурс, больший своего ограничения. Тогда:

1) если $\Delta W \le lp$, предельный поток существует и $f_{sum}^* = T$;

2) если $\Delta W > lp$, выполняется неравенство:

(4) $\quad f_{sum}(t)\big|_{t\to\infty} > T$.

Доказательство. 1) Пусть $\Delta W \le lp$. По определению функционирования сети с ограничениями, ограничение на аттрактор включается лишь тогда, когда его ресурс достиг величины $r_i^{out} + p$. До этого момента вершина-аттрактор функционирует так же, как если бы ограничения не было.

1.1) Если аттрактор в сети единственен, то условие $\Delta W \le lp$ редуцируется до $\Delta W \le p$, предельное состояние описывается вектором $Q^* = (r_1^{out} + \Delta W, \tilde{q}_2, \ldots, \tilde{q}_n)$; предельный поток существует и $f_{sum}^* = T$.

1.2) Рассмотрим сеть с двумя аттракторами v_1 и v_2. Докажем, что при $t \to \infty$ каждый аттрактор будет функционировать без ограничений. Если ни в какой момент ресурс в v_1 и v_2 не достигает ограничения, утверждение доказано. Предельное состояние описывается вектором

$$Q^* = (r_1^{out} + \Delta W_1,\ r_2^{out} + \Delta W_2,\ \tilde{q}_3, \ldots, \tilde{q}_n),$$

$$\Delta W_1 \le p,\ \Delta W_2 \le p,\ \Delta W_1 + \Delta W_2 = \Delta W;$$

предельный поток существует и $f_{sum}^* = T$.

Пусть в некоторый момент времени t' ресурс в одном из аттракторов (не ограничивая общности, положим, что это v_1)

достиг ограничения $r_1^{out} + p$. Тогда этот аттрактор возвращает излишки в соседние не-аттрактивные вершины. Но поскольку сеть регулярна, из этих не-аттрактивных вершин существуют пути в вершину v_2, которая по определению первичного аттрактора притягивает ресурс. При этом вершина v_2 может, как максимум, набрать ресурс, равный $r_2^{out} + p$, потому что общий излишек ресурса в сети не превосходит величины $2p$. Если $\Delta W = 2p$, то вектор предельного состояния будет иметь вид $Q^* = (r_1^{out} + p, r_2^{out} + p, \tilde{q}_3, ..., \tilde{q}_n)$, и аттракторы достигнут верхней границы своей емкости, но не будут принимать, и, следовательно, отдавать излишки.

1.3) Для l аттракторов рассуждения аналогичны. Ресурс $\Delta W \le lp$ может какое-то время перераспределяться между l аттракторами. Но поскольку хотя бы один аттрактор в сети будет не насыщенным, он будет притягивать к себе ресурс, пока в сети не установится сбалансированный поток $f_{sum}^* = T$.

2. Докажем что при $\Delta W > lp$ выполняется неравенство (4).

Процессы стабилизации потоков в регулярной несимметричной сети без ограничений при $W > T$ описаны в теореме 1 [5]. Весь ресурс ΔW в сети без ограничений должен распределиться между вершинами-аттракторами. Суммарный поток при этом равен T. При $\Delta W > lp$ в сети без ограничений гарантированно существует хотя бы один аттрактор v_i, в котором ресурс будет больше ограничения на емкость $r_i^{out} + p$ (принцип Дирихле).

Тогда при наличии ограничения в этом аттракторе появится избыток входного ресурса, который он будет возвращать своим входным соседям. По лемме 1 в регулярной несимметричной сети в этот аттрактор существует путь от не-аттрактивной вершины. Если эта вершина находится во входном соседстве аттрактора, это означает, что к ней будет возвращаться часть ресурса из вершины v_i. А поскольку она с какого-то момента будет функционировать по правилу 2 и отдавать весь свой ресурс, то выходящий поток из нее будет больше, чем в сети без ограничений за счет возврата от аттрактора, и, соответственно, возрастет суммарный поток в сети. Если во входном соседстве v_i не существует не-аттрактивных вершин, то ресурс будет возвращаться к не-аттрактивной вершине вдоль пути, описанного в лемме 1 (в обратном направлении). И в этой вершине за счет этого возврата поток будет больше, чем в сети без ограничений. Таким образом, при $\Delta W > lp$ суммарный поток в сети строго больше значения T при $t \to \infty$.□

Легко доказать, что верно обратное утверждение.

Следствие. Пусть в регулярной ресурсной сети с ограничением на аттракторы $r_i^{out} + p$, $i = 1, \ldots, l$, суммарный ресурс равен $W = T + \Delta W$, $\Delta W > 0$, и в начальном состоянии ни один аттрактор не имеет ресурс, больший своего ограничения. Тогда:

1) если $f_{sum}^* = T$, то $\Delta W \le lp$;

2) если $f_{sum}(t)\big|_{t\to\infty} > T$, то $\Delta W > lp$.

Доказательство следует из доказательства утверждения 1.

Замечание. Величина p берется одной и той же для всех аттракторов, потому что в сети ни количество аттракторов, ни сами аттракторы не известны заранее. Они помечаются перед началом функционирования, но уже после распределения ресурса по вершинам. Поэтому разные ограничения можно задавать лишь случайным образом, однако это обобщение не усложнит модель.

Покажем, что в сети с ограничениями существует еще одна интегральная характеристика – второе пороговое значение ресурса T^{II}.

Утверждение 2. В регулярной ресурсной сети с ограничением на аттракторы $r_i^{out} + p$, $i = 1, \ldots, l$, существует дополнительное пороговое значение (помимо T) T^{II} такое, что в зависимости от количества ресурса в сети существует четыре режима функционирования с тремя пороговыми переключениями, задающимися константами T, lp и T^{II}:

1) при $W \le T$ с некоторого конечного момента t вся сеть функционирует по правилу 2 и представляет собой однородную регулярную цепь Маркова;

2) при $T < W \le T + lp$ суммарный поток в сети не изменяется с ростом W, предельный поток существует, $F^{in*} = F^{out*\mathrm{T}} = \tilde{Q}$, $f_{sum}^* = T$;

3) при $T + lp < W \le T^{\mathrm{II}} + lp$ суммарный поток возрастает с ростом W, суммарный предельный поток существует и $f_{sum}^{*} = W - lp$;

4) при $W > T^{\mathrm{II}} + lp$ суммарный поток не изменяется с ростом W, суммарный предельный поток существует и $f_{sum}^{*} = T^{\mathrm{II}}$.

Доказательство.

1) Очевидно, при малом ресурсе функционирование сети с ограничениями эквивалентно функционированию сети без ограничений, для которых пункт 1) выполняется.

2) Доказательство этого пункта следует из утверждения 1.

3) Рассмотрим поток в сети при $W > T + lp$ как функцию от W: $f_{sum} = f_{sum}(W, t)$. При $W = T + lp$ во всех аттракторах наступает насыщение. Предельный поток существует. Будем постепенно увеличивать W. При появлении избытка сверх $T + lp$ хотя бы в одном из аттракторов «срабатывает» ограничение. Тогда он принимает из вершин-источников не весь ресурс, а его часть; ресурс в источниках, смежных с этим аттрактором (или связанных с ним путем (лемма 1)), а, следовательно, и суммарный поток в сети начинает возрастать. Поскольку сеть регулярна, ограничения срабатывают во всех аттракторах, сколь бы ни было мало значение $W - (T + lp)$. Так как все вершины, кроме аттрактивных, функционируют по правилу 2, они отдают весь имеющийся у них ресурс на каждом такте t, и он становится потоком. Таким образом, суммарный поток в сети выше, чем при $T < W \le T + lp$, и он растет с ростом величины W.

Ресурс в аттракторах стабилизируется на значениях $r_i^{out} + p$. Все остальные вершины функционируют по правилу 2, следовательно, весь их ресурс является потоком. Тогда независимо от существования предельного потока в сети, суммарный предельный поток существует и $f_{sum}^{*}(W) = W - lp$. Это весь ресурс вершин, за исключением накопленных излишков в первичных аттракторах. При росте W это равенство выполняется до тех пор, пока в предельном состоянии ресурс некоторой вершины, не бывшей аттрактором, не достигнет пороговой величины r_k^{out}. Тогда эта вершина при дальнейшем увеличении W будет накапливать ресурс (таких вершин может быть несколько). Эти вершины являются вторичными аттракторами. Значение W, при котором для некоторых не-аттрактивных вершин выполнится $q_k^* = r_k^{out}$, является пороговым. Обозначим его через T^{II}.

4) при $W > T^{\text{II}}$ вторичные аттракторы функционируют по правилу 1 и притягивают к себе все излишки ресурса. Суммарный предельный поток при этом: $f_{sum}^* = T^{\text{II}}$.□

Замечание 1. В сетях без ограничений при любом, сколь угодно большом ресурсе, суммарный предельный поток постоянен и равен пороговому значению T. Именно при этом значении аттрактор получает в предельном состоянии ресурс, равный своей выходной пропускной способности. Аналогично, в сети с ограничениями на аттракторы таким пороговым значением является величина T^{II}. При $W > T^{\text{II}}$ весь ресурс сверх T^{II} поглотится вторичными аттракторами.

Замечание 2. Существование T^{II} доказано в утверждении 2. Вопрос о его единственности пока остается открытым, так же как и вопрос о существовании предельных потоков и состояний сети при $W > T + lp$.

Замечание 3. При $p = 0$ режим 2) отсутствует, и при возрастании суммарного ресурса вплоть до значения T^{II} суммарный предельный поток все время возрастает без промежуточного плато. При $p > 0$ суммарный предельный поток стабилизируется при возрастании W до насыщения емкостей аттракторов.

6. Заключение

В работе предложена модификация графовой динамической пороговой модели «ресурсная сеть». При большом суммарном ресурсе в исходной модели существовали вершины, накапливающие в себе основную часть ресурса при его перераспределении. Как правило, в произвольной сети такая вершина единственна. Для того чтобы изменить это положение вещей и распределить излишки более равномерно, в модели вводятся ограничения на емкости вершин-аттракторов. Тогда при их насыщении излишки ресурса начинают переходить в другое множество вершин. Эти вершины названы вторичными аттракторами.

Настоящая работа посвящена описанию и всестороннему анализу предложенной модели, а также исследованию ее устойчивости. В сети с ограничениями на емкости аттракторов для любого суммарного ресурса суммарный предельный поток определяется однозначно. Доказано существование второго порогового значения суммарного ресурса T^{II}, при переходе через которое сеть изменяет поведение. Показано, что в сети с ограничениями для значения суммарного ресурса существует четыре промежутка, на которых сеть демонстрирует различное поведение: $(0, T]$, $(T, T + lp]$, $(T + lp, T^{\mathrm{II}} + lp]$, $(T^{\mathrm{II}} + lp, \infty)$.

В ходе дальнейших исследований планируется доказать, что в сети существуют предельные состояния и потоки (не только суммарный поток стационарен); доказать единственность T^{II} и найти формулу для его нахождения, найти критерий вторичной аттрактивности, найти векторы предельных потоков и состояний.

Автор выражает глубокую благодарность д.ф.-м.н. Р.П. Агаеву за конструктивные замечания и полезные обсуждения в ходе подготовки статьи.

Литература

1. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Метод проекции в задаче о консенсусе и регуляризованный предел степеней стохастической матрицы* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – №12. – С. 38–59.
2. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Сходимость и устойчивость в задачах согласования характеристик* (*обзор базовых результатов*) // Управление большими системами. – 2010. – №30.1 – С. 470–505.
3. ГАНТМАХЕР Ф.Р. *Теория матриц*. – М.: Физматлит. 2004. – 560 с.
4. ЖИЛЯКОВА Л.Ю. *Несимметричные ресурсные сети. I. Процессы стабилизации при малых ресурсах* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – №4. – С. 133–143.

5. ЖИЛЯКОВА Л.Ю. *Несимметричные ресурсные сети. II. Потоки при больших ресурсах и их стабилизация* // Автоматика и телемеханика. – 2012. – №6. – С. 103–118.
6. ЖИЛЯКОВА Л.Ю. *Несимметричные ресурсные сети. III. Исследование предельных состояний* // Автоматика и телемеханика. – 2012. – №7. – С. 67–77.
7. КЕМЕНИ ДЖ., СНЕЛЛ ДЖ. *Конечные цепи Маркова*. – М.: Наука, 1970. – 272 с.
8. КУЗНЕЦОВ О.П. *Однородные ресурсные сети. I. Полные графы* // Автоматика и телемеханика. – 2009. – №11. – С. 136–147.
9. РОБЕРТС Ф.С. *Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам.* – М. Наука, 1986. – 496 с.
10. BAK P., TANG C., WIESENFELD K. *Self-organized criticality* // Phys. Rev. A. – 1988. – Vol. 38, No. 1. – P. 364–374.
11. BAK P., CHEN K. *Self-organized criticality* // Scientif. Am. – 1991. – No. 264. – P. 46–53.
12. BJÖRNER A., LOVASZ L., SHOR P. *Chip-firing games on graphs* // Europ. J. Comb. – 1991. – No. 12. – P. 283–291.
13. BJÖRNER A., LOVASZ L. *Chip-firing game on directed graphs* // J. Algebraic Combinatorics. – 1992. – No. 1. – P. 305–328.
14. BLANCHARD PH., VOLCHENKOV D. *Random Walks and Diffusions on Graphs and Databases: An Introduction* (Springer Series in Synergetics). – Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg. 2011. – 262 p.
15. DHAR D. *The abelian sandpile and related models* // Physica A: Statist.l Mechan. Appl. – 1 February, 1999. – Vol. 263, No. 1–4. – P. 4–25.
16. DHAR D., SADHU T., CHANDRA S. *Pattern formation in growing sandpiles* // Eur. Phys. Lett. – 2009. – Vol. 85, No. 4. – 48002. 2009. arXiv:0808.1732 [cond-mat.stat-mech]
17. LOVASZ L., WINKLER P. *Mixing of Random Walks and Other Diffusions on a Graph* // Surveys in Combinatorics / Ed. P. Rowlinson. London Math. Soc. Lecture Notes Series 218, Cambridge Univ. Press, 1995. – P. 119–154.

18. PRISNER E. *Parallel Chip Firing on Digraphs* // Complex Systems. – 1994. – No. 8. – P. 367–383.

RESOURCE NETWORK WITH LIMITED CAPACITY OF ATTRACTOR VERTICES

Ludmila Zhilyakova, Institute of Control Sciences of RAS, (Moscow, Profsoyuznaya st., 65), Doctor of Science, Leader Researcher, zhilyakova.ludmila@gmail.com.

Abstract: *An asymmetric regular resource network with limited capacity of attractor vertices is considered. Provided attractors' capacity is unlimited they accumulate all the resource of a network, except some small volumes left in the rest vertices. On the other hand, attractors of limited capacity are saturated, and then another set of vertices starts attracting the rest resource. We refer to this phenomenon as to secondary attractivity, and such vertices, respectively, are called secondary attractors. We study the flows in a network with different total amount resource and search the threshold values which lead to a new behavior of a network.*

Keywords: resource network, graph dynamic threshold model, attractors, capacity limitation.

Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии П.Ю. Чеботарёвым

Поступила в редакцию 20.08.2015.
Опубликована 30.11.2015.