УДК 519.177
ББК 22.18

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСА МЕЖДУ АТТРАКТОРАМИ В РЕГУЛЯРНЫХ НЕСИММЕТРИЧНЫХ РЕСУРСНЫХ СЕТЯХ[1]

Жилякова Л. Ю.[2]
(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

Рассматриваются несимметричные регулярные ресурсные сети с несколькими вершинами-аттракторами. Для них показано, что распределение ресурса сверх порогового значения $\Delta W = W - T$ происходит по тому же закону, что и в соответствующей поглощающей сети (полученной из несимметричной удалением выходных ребер аттракторов). Однако существуют поправки, зависящие от пропускных способностей выходных ребер аттракторов и начального распределения ресурса. Поправки оцениваются сверху; находятся начальные состояния, при которых они максимальны. Определяются начальные состояния, при которых поправки отсутствуют.

Ключевые слова: ресурсная сеть, графовая динамическая пороговая модель, вершины-аттракторы.

1. Введение

Ресурсная сеть – графовая динамическая параллельная модель с пороговым переключением правил функционирования, предложенная в [6] и получившая развитие в ряде работ (в том числе [3, 4]). Она представляет собой ориентированный взве-

---

[1] *Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты № 14-01-00422а, 15-07-02488а).*

[2] *Людмила Юрьевна Жилякова, доктор физико-математических наук (zhilyakova.ludmila@gmail.com).*

шенный граф, в котором вершины обмениваются ресурсами в дискретном времени. Вершины могут хранить неограниченное количество ресурса; веса ребер обозначают их пропускные способности: максимальное количество ресурса, которое может пройти через ребро за один такт времени. В отличие от классической потоковой модели Форда–Фалкерсона [7] и ее динамических модификаций [8], в ресурсной сети отсутствуют источники и стоки, и, соответственно, нет направленности движения ресурса. Его распространение происходит по всем возможным путям одновременно. При *малом ресурсе*, когда все вершины сети функционируют по одному правилу и отдают весь ресурс на каждом такте, модель представляет собой рассеяние на графе [12, 14]. Модели рассеяния хорошо изучены, – для графов с постоянной топологией они описываются однородными цепями Маркова, – и поэтому ресурсная сеть представляет гораздо больший исследовательский интерес при функционировании с *большим суммарным ресурсом.* Это означает, что некоторые вершины сети изменяют правило функционирования и накапливают излишки ресурса, которые они не в состоянии отдать. Такие «бутылочные горлышки» сети, суммарные входы которых больше суммарных выходов, были названы вершинами-аттракторами [3]. Эти вершины начинают функционировать сходно со стреляющими вершинами в пороговой модели «игра выстреливания фишек» [11, 18] и «абелева куча песка» [15, 20]. Модель кучи песка примечательна тем, что при своей простоте находит применение в моделировании сложных природных и социальных процессов, названных «самоорганизованной критичностью» [9, 10, 13].

В отличие от игры выстреливания, где фишки целочисленны, ресурс в ресурсной сети является бесконечно делимым. Благодаря этому свойству разнообразные переходные процессы сходятся к предельным состояниям, которые в целочисленных пороговых моделях могут не достигаться.

Для каждой сети понятия *малый* и *большой* ресурс строго определены. Малое и большое значения ресурса лежат по разные стороны от *порогового значения T*, которое определяется через суммарные выходные пропускные способности вершин и координаты вектора предельных вероятностей однородной цепи Маркова, соответствующей ресурсной сети, в случае если граф регулярен. Свойство *регулярности* [5] означает, что граф сильно связен (т.е. состоит из одной эргодической компоненты) и НОД длин всех его циклов равен 1 (заметим, что в разных источниках регулярность определяется по-разному и данное определение отличается от определений, используемых в [2, 19]). Если граф циклический (НОД длин всех его циклов отличен от 1), роль предельного вероятностного вектора играет предел по Чезаро [5]. В общем случае пороговое значение не превосходит суммарной пропускной способности сети. В эйлеровых сетях, в которых каждая вершина имеет одинаковые входную и выходную пропускные способности, T совпадает с суммой пропускных способностей всех ребер сети. В остальных сетях выполняется строгое неравенство.

Задача исследования в данной работе формулируется следующим образом. Пусть в сети есть несколько аттракторов и суммарный ресурс в ней велик. Доказано, что предельное состояние в ней существует. Компоненты вектора предельного состояния, соответствующие неаттрактивным вершинам, определяются однозначно; формулы для них найдены в [3]. Необходимо найти распределение излишков ресурса сверх T между аттракторами. Пропорция, в которой эти излишки распределяются, очевидно, зависит от начального состояния и от некоторых параметров сети.

Функционирование сетей при большом ресурсе описывается неоднородными цепями Маркова, исследование которых гораздо сложнее. Из существования предельного состояния при больших ресурсах [3] следует, что эти неоднородные цепи Маркова являются сильно эргодическими [1, 16, 17]. Однако для нахождения компонент вектора предельного состояния, соответствующих вершинам-аттракторам, требуются дополнительные приемы. Для этого несимметричным сетям ставятся в соответствие *поглощающие сети*, исследованные в [4]. Граф поглощающей сети имеет переходную компоненту и стоковые вершины. Порогового значения в такой сети не существует.

Поглощающая сеть, соответствующая регулярной несимметричной сети, – это сеть, в которой удалены все ребра, выходящие из аттракторов. Таким образом, это сеть со стоковыми вершинами, соответствующими аттракторам исходной сети. Для поглощающих сетей получены формулы, позволяющие аналитически находить предельные стохастические матрицы неоднородной цепи Маркова, и, соответственно, по любому начальному состоянию определять предельное состояние сети – в данном случае пропорцию распределения ресурса между стоками.

2. Основные обозначения и характеристики ресурсных сетей

Ресурсная сеть представляет собой взвешенный ориентированный граф $G = (V, E)$, $|V| = n$. Веса, соответствующие пропускным способностям ребер, задаются матрицей $R = (r_{ij})_{n\times n}$.

$Q(t) = (q_1(t), \ldots, q_n(t))$ – состояние сети в момент t; $q_i(t)$ – количество ресурса в вершине v_i в момент t; Q^* – предельное состояние.

r_i^{in} и r_i^{out} – суммарные входная и выходная пропускные способности вершины v_i.

Правила функционирования сети. В момент t вершина v_i по ребру e_{im} отдает в смежную ей вершину v_m:

- r_{im} единиц ресурса, если $q_i(t) > r_i^{out}$ (правило 1);
- $\frac{r_{im}}{r_i^{out}} q_i(t)$ единиц ресурса, если $q_i(t) \le r_i^{out}$ (правило 2).

R' – стохастическая матрица, полученная из матрицы R нормированием по строкам: $R' = D^{-1}R$, где $D = \mathrm{diag}\left(r_1^{out}, \ldots, r_n^{out}\right)$.

$W = \mathrm{const}$ – суммарный ресурс сети.

$Z^-(t)$ – множество вершин, для которых $q_i(t) \le r_i^{out}$; $Z^+(t)$ – множество вершин, для которых $q_i(t) > r_i^{out}$.

T – пороговое значение ресурса, такое, что при $W \le T$ все вершины, начиная с некоторого t', переходят в зону $Z^-(t)$; при $W > T$ зона $Z^+(t)$ непуста, начиная с некоторого t''.

$$T = \min_{i \in \{1,\dots,n\}} \frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}},$$

где Q^{1*}– вектор предельного состояния при $W = 1$; $\tilde{Q}$ – вектор предельного состояния при $W = T$.

Вершина v_j несимметричной регулярной сети является *аттрактором* тогда и только тогда, когда для нее выполняется

(1) $$j = \arg \min_{i \in \{1,\dots,n\}} \frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}}.$$

Введем такую нумерацию вершин сети, при которой аттракторы имеют номера от 1 до l. В [3] доказано, что $\tilde{Q} = (r_1^{out},\dots,r_l^{out},\tilde{q}_{l+1},\dots,\tilde{q}_n)$. Вектор $\tilde{Q}$ пропорционален вектору Q^{1*} с коэффициентом T: $\tilde{Q} = Q^{1*}T$.

При этом компоненты с номерами от $l + 1$ до n не изменяются при любом $W > T$, и все излишки распределяются только среди аттракторов. Вектор предельного состояния для $W > T$ имеет вид

$$Q^* = (r_1^{out} + \Delta q_1^*,\dots,r_l^{out} + \Delta q_2^*,\tilde{q}_{l+1},\dots,\tilde{q}_n), \text{ где } \sum_{i=1}^{l} \Delta q_i^* = W - T.$$

Поток в ресурсной сети.

Ресурс, выходящий из вершины v_i по ребру e_{ij} в момент t, приходит в вершину v_j в момент $t + 1$; между моментами t и $t + 1$ он находится в ребре e_{ij}. Этот ресурс назовем потоком $f_{ij}(t)$. Общий поток сети описывается матрицей $F(t) = (f_{ij}(t))_{n\times n}$.

Величиной потока будем называть сумму

$$f_{sum} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t).$$

Суммарные исходящий и входящий потоки вершины v_i:

$\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t) = f_i^{out}(t)$; $\sum_{i=1}^{n} f_{ij}(t) = f_j^{in}(t+1)$. Будем полагать, что $f_j^{in}(0) = 0$.

$F^{out}(t) = (f_1^{out}(t), \dots, f_n^{out}(t))$ – вектор исходящего потока;

$F^{in}(t) = (\ f_1^{in}(t)\ , \ldots,\ f_n^{in}(t)\ )$ – вектор входящего потока.

F^* – матрица предельного потока.

$f_{sum}^* = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}^*$ – суммарный предельный поток; F^{in*} и F^{out*} – векторы двух предельных потоков.

Доказано, что при любом значении $W \geq T$ суммарный предельный поток в сети равен T.

3. Свойства поглощающих сетей

Исследованию поглощающих сетей посвящена работа [4]. Кратко перечислим полученные в ней результаты, которые понадобятся при описании регулярных сетей с несколькими аттракторами.

Пусть поглощающая сеть имеет l стоков с номерами от 1 до l, тогда ее матрица пропускных способностей состоит из блоков:

(2) $$R = \left(\begin{array}{c|c} D & O_1 \\ \hline R_1 & R_2 \end{array}\right),$$

где $(D)_{l \times l}$ – диагональная матрица; $(O_1)_{l \times (n-l)}$ – нулевая матрица; матрица $(R_1)_{(n-l) \times l}$ состоит из пропускных способностей ребер, ведущих из переходной компоненты в стоки; матрица $(R_2)_{(n-l) \times (n-l)}$ – из пропускных способностей ребер, соединяющих вершины внутри переходной компоненты.

Стохастическая матрица R' будет иметь вид

$$R' = \left(\begin{array}{c|c} E_1 & O_1 \\ \hline R_1' & R_2' \end{array}\right).$$

Даже если матрица D имеет на диагонали нулевые элементы (т.е. одна или несколько стоковых вершин не имеют петель), блок E_1 будет единичной матрицей.

Свойство 1 (*Теорема* 2 [4]). *В поглощающей сети порогового значения ресурса T не существует*.

Свойство 2 (*Лемма* 1 [4]). *Пусть поглощающая сеть с l стоками представлена матрицей* (2). *Тогда R'^{∞} – предел степеней стохастической матрицы R' – определяется по формуле*

$$(3)\quad R'^{\infty} = \left(\begin{array}{c|c} E_1 & O_1 \\ \hline \left(E_2 - R_2'\right)^{-1} R_1' & O_2 \end{array} \right),$$

где E_2 – единичная матрица размера $(n - l) \times (n - l)$.

Свойство 3 (*Теорема* 3 [4]). *В поглощающей сети с l стоками матрица R'^{∞} остается неизменной при любых изменениях диагональных элементов*.

Свойство 4 (*Теорема* 4 [4]). *Пусть поглощающая сеть с l стоками представлена матрицей* (2). *Тогда для любого ресурса W и любого начального состояния* $Q(0) = (q_1(0), \ldots, q_n(0))$ *предельное состояние рассчитывается по формуле*

$$Q^* = Q(0)R'^{\infty},$$

где R'^{∞} – предельная матрица, определяемая по формуле (3).

Следствие. Вектор предельного состояния Q^* не зависит от наличия или отсутствия петель в вершинах.

Свойство 5 (*Теорема* 5 [4]). *Пусть поглощающая сеть с l стоками представлена матрицей* (2). *Тогда элементы i-й строки матрицы R'^{∞}* ($i > l$) *соответственно равны компонентам вектора предельного состояния при начальном состоянии* $Q_i(0) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, *где единице равна i-я компонента*:

$$(4)\quad R'^{\infty} = \begin{pmatrix} e_1^{\mathrm{T}} \\ \ldots \\ e_l^{\mathrm{T}} \\ Q_{l+1}^* \\ \ldots \\ Q_n^* \end{pmatrix},$$

($e_1, \ldots, e_l$ – *первые l вектор-столбцов единичной матрицы* $(E)_{n\times n}$).

4. Распределение ресурса между аттракторами в несимметричной регулярной сети

Поведение регулярных несимметричных сетей с несколькими аттракторами сложнее поведения поглощающих сетей. Так, в поглощающей сети ресурс, помещенный в сток в начальном состоянии, остается в нем в любой момент времени. В регулярных сетях это условие не выполняется. Для иллюстрации этого утверждения рассмотрим пример функционирования сети с двумя потенциальными аттракторами.

Пример 1. Несимметричная сеть ($n = 5$) с двумя аттракторами v_1 и v_2 задана матрицей

$$(5)\quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Основные ее характеристики следующие.

- Кортеж $\rho = \left(\left(r_1^{in}; r_1^{out}\right), \ldots, \left(r_n^{in}; r_n^{out}\right)\right)$ для этой сети имеет вид $\rho = ((10, 5), (10, 5), (5, 10), (5, 10), (5, 5))$.
- Предельное состояние при $W = 1$: $Q^{1*} = (0{,}250, 0{,}250, 0{,}1(6), 0{,}1(6), 1(6))$.
- Пороговое значение ресурса $T = 20$.
- $\tilde{Q} = (5, 5, 3{,}(3), 3{,}(3), 3{,}(3))$.

Рассмотрим начальное состояние $Q(0) = (0, 5, 20, 0, 0)$. Суммарный ресурс 25 больше порогового значения, значит, излишки ресурса должны распределиться между аттракторами. Аттрактор v_2 имеет ресурс в начальном состоянии, аттрактор v_1 – нет.

Предельное состояние для такого вектора $Q(0)$ будет $Q^* = (10, 5, 3{,}(3), 3{,}(3), 3{,}(3))$. Как видно, весь излишек оказался в первой вершине (поскольку она связана с источником, имеющим большой ресурс, ребром с большой пропускной способностью). Вершине v_2 не удалось накопить больше того, что она имела в начале.

Даже с ресурсом, превышающим выходную пропускную способность, потенциальный аттрактор бывает неспособным перейти в зону Z^{+*}. Для той же сети перераспределим ресурс 25 в начальном состоянии: $Q(0) = (0, 8, 17, 0, 0)$. Предельное состояние в этом случае будет точно таким же: $Q^* = (10, 5, 3,(3), 3,(3), 3,(3))$.

Более того, если ресурс 8 переложить в вершину v_4 (источник, связанный ребром с большой пропускной способностью с v_2), так, чтобы начальное состояние было $Q(0) = (0, 0, 17, 8, 0)$, то предельное состояние будет: $Q^* = (9{,}75, 5{,}25, 3,(3), 3,(3), 3,(3))$. То есть в этом случае второй аттрактор получает излишки сверх своей пропускной способности, чего не наблюдалось, когда мы помещали ресурс непосредственно в него.

Таким образом, потенциальный аттрактор может притягивать ресурс из источников, но не всегда может удержать ресурс, находящийся в нем в начальном состоянии.

В данном исследовании будем рассматривать начальные состояния, в которых ресурс находится в источниках.

4.1. ПОГЛОЩАЮЩАЯ СЕТЬ, СООТВЕТСТВУЮЩАЯ НЕСИММЕТРИЧНОЙ, И ПОПРАВКА НА РЕГУЛЯРНОСТЬ δW

Исследуем распределение ресурса между потенциальными аттракторами при $W > T$. В [3] получена формула предельного состояния при больших ресурсах. В ней определены все компоненты вектора предельного состояния, кроме компонент, соответствующих вершинам-аттракторам. Если аттрактор в сети один, предельное состояние единственно. Если потенциальных аттракторов несколько, ресурс между ними в предельном состоянии может распределяться по-разному для разных начальных состояний. Опишем зависимость предельного состояния в аттракторах от начального состояния сети, как это было сделано для поглощающих сетей.

Рассмотрим несимметричную сеть с двумя аттракторами, заданную матрицей (5).

Пусть в начальном состоянии весь суммарный ресурс $W > T$ находится в одном из источников. Найдем закономерность распределения ресурса $W - T$ между аттракторами при изменении W. Рассмотрим два начальных состояния и соответствующие им предельные состояния:

(6) $Q(0) = (0, 0, 50, 0, 0) \to Q^* = (29{,}3,\ 10{,}7,\ 3{,}(3),\ 3{,}(3),\ 3{,}(3))$.

(7) $Q(0) = (0, 0, 90, 0, 0) \to Q^* = (59{,}3,\ 20{,}7,\ 3{,}(3),\ 3{,}(3),\ 3{,}(3))$.

Суммарный ресурс вершин, находящихся в зоне Z^{-*}, в предельном состоянии равен 10. При $Q(0) = (0, 0, 50, 0, 0)$ и $Q(0) = (0, 0, 90, 0, 0)$ в зоне Z^{+*} распределяется ресурс, равный 40 и 80 соответственно. При суммарном приросте 40 прирост в вершинах составил соответственно 30 и 10, т.е. $0{,}75\Delta W$ и $0{,}25\Delta W$. Прирост ресурса распределился в пропорции 3:1.

При любом дальнейшем увеличении ресурса пропорция 3:1 в распределении ресурса ΔW между аттракторами сохраняется.

В силу симметричности аттракторов, если в начальном состоянии весь ресурс находился во втором источнике (вершине v_4), в предельном состоянии его прирост в аттракторах распределится в пропорции $0{,}25\Delta W$ и $0{,}75\Delta W$ (соответственно, 1:3). А при помещении ресурса в начальном состоянии в нейтральную вершину прирост в аттракторах распределится как $0{,}5\Delta W$, $0{,}5\Delta W$, т.е. в пропорции 1:1.

Для объяснения этого факта построим поглощающую сеть, соответствующую данной несимметричной сети. То есть превратим аттракторы в стоки, заменив все элементы матрицы R, соответствующие входным пропускным способностям аттракторов, нулями. Матрицу пропускной способности такой сети обозначим через R_{absorb}:

$$R_{absorb} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Предел степеней соответствующей стохастической матрицы обозначим через R'^{∞}_{absorb}. Найдем эту матрицу, воспользовавшись формулой (4). Для этого вычислим векторы предельного состояния при единичном ресурсе, поочередно находящемся в каждой из переходных вершин:

$Q(0) = (0, 0, 1, 0, 0) \to Q^* = (0{,}75, 0{,}25, 0, 0, 0)$;

$Q(0) = (0, 0, 0, 1, 0) \to Q^* = (0{,}25, 0{,}75, 0, 0, 0)$;

$Q(0) = (0, 0, 0, 0, 1) \to Q^* = (0{,}5, 0{,}5, 0, 0, 0)$.

Тогда

$$(8)\quad R'^{\infty}_{absorb} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}75 & 0{,}25 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}75 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можно заметить, что именно в таких пропорциях распределяется ресурс ΔW из каждой не-аттрактивной вершины между аттракторами.

Возникает вопрос, зависит ли эта пропорция от первых двух строк матрицы R или выходные пропускные способности аттракторов могут быть любыми до тех пор, пока они остаются аттракторами. При изменении выходных пропускных способностей аттракторов меняется пороговое значение T. Остается ли при больших W пропорция, заданная R'^{∞}_{absorb}, для излишков ресурса?

Рассмотрим следующие примеры.

Пример 2. Сеть задана матрицей

$$(9)\quad R = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для этой сети $T = 10$; $Q^{1*} = (0{,}250, 0{,}250, 0{,}1(6), 0{,}1(6), 1(6))$;

$\tilde{Q}$ =(2,5, 2,5, 1,(6), 1,(6), 1,(6)).

Функционирование сети при разных начальных состояниях дает следующие предельные состояния:

$Q(0)$ = (0, 0, 85, 0, 0) $\to$ Q^* = (60,5, 19,5, 1,(6), 1,(6), 1,(6));

$Q(0)$ = (0, 0, 45, 0, 0) $\to$ Q^* = (30,5, 9,5, 1,(6), 1,(6), 1,(6)).

Ресурс, равный 5, остается в зоне Z^{-*}, остальной распределяется между аттракторами. Разность ресурса для этих двух начальных состояний $\Delta W = 40$ разделилась в пропорции 30:10, т.е. 3:1, как и раньше.

Это соотношение выполняется не только для однородных выходных пропускных способностей аттракторов. Но чтобы обе вершины оставались потенциальными аттракторами, их выходные пропускные способности нельзя изменять произвольно. Не приводят к потере аттрактивности любые изменения в пропускных способностях петель аттракторов, а также одинаковые изменения в пропускных способностях ребер, связывающих аттракторы с нейтральной вершиной v_5 и друг с другом.

Пример 3. Сеть задана матрицей

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для нее имеем: $T = 23$;

Q^{1*} = (0,261, 0,478, 0,116, 0,116, 0,029);

$\tilde{Q}$ = (6, 11, 2,(6), 2,(6), 0,(6)).

Как видно, вектор предельных вероятностей изменился; в той же пропорции изменились компоненты вектора $\tilde{Q}$. В зоне Z^{-*} в предельном состоянии оказывается ресурс, равный 6.

Рассмотрим две пары векторов (начальное состояние $\to$ предельное состояние): $Q(0) \to Q^*$.

$Q(0)$ = (0, 0, 86, 0, 0) $\to$ Q^* = (56,910, 23,090, 2,(6), 2,(6), 0,(6)).

$Q(0)$ = (0, 0, 46, 0, 0) $\to$ Q^* = (26,910, 13,090, 2,(6), 2,(6), 0,(6)).

Разность ресурса $\Delta W = 40$ вновь разделилась в пропорции 3:1, несмотря на вышеописанные изменения векторов предельного состояния.

Эта пропорция имеет место только для разности между двумя различными векторами. В пределах одного вектора предельного состояния она не выполняется. Рассмотрим первую пару векторов:

$Q(0) = (0, 0, 86, 0, 0) \to Q^* = (56{,}910, 23{,}090, 2{,}(6), 2{,}(6), 0{,}(6))$.

$r_1^{out} = 6$, $r_2^{out} = 11$.

$\Delta q_1 = q_1^* - r_1^{out} = 50{,}910$, $\Delta q_2 = q_2^* - r_2^{out} = 12{,}090$.

$\Delta q_1 : \Delta q_2 = 50{,}910 : 12{,}090 > 4$.

Вернемся к матрице (5) и проверим выполнение этой пропорции для нее. Из примера 1 имеем:

$Q(0) = (0, 0, 100, 0, 0) \to Q^* = (66{,}8, 23{,}2, 3{,}(3), 3{,}(3), 3{,}(3))$.

Для этой матрицы $r_1^{out} = 5$, $r_2^{out} = 5$.

$\Delta q_1 = q_1^* - r_1^{out} = 61.8$, $\Delta q_2 = q_2^* - r_2^{out} = 18{,}2$.

Как видно, пропорция 3:1 вновь не выполняется.

Вычислим разность $\Delta q_1 - 3\Delta q_2$:

$\Delta q_1 - 3\Delta q_2 = 61{,}8 - 18{,}2 \cdot 3 = 61{,}8 - 54{,}6 = 7{,}2$.

Проверим, чему равна эта разность при других значениях W.

Из (6), (7) следует, что при $W = 50$ и $W = 90$ также выполняется равенство

(10) $\Delta q_1 - 3\Delta q_2 = 7{,}2$.

Для достаточно больших значений W в сети, заданной матрицей (5), значение разности (10) остается неизменным. Обозначим его через δW. Начиная с некоторого $W_{min} \geq T$, $\delta W = \mathrm{const}$.

Таким образом, для поглощающей сети $\delta W = 0$. Как только поглощающая сеть превращается в регулярную, (т.е. у стоков появляются выходные ребра), величина δW становится положительной. Будем называть δW *поправкой на регулярность*.

Опишем процесс нахождения δW для произвольной сети с l аттракторами и произвольного начального состояния $Q(0)$, в котором ресурс, больший W_{min}, сосредоточен в не-аттрактивных вершинах. Пусть R – матрица пропускных способностей сети с аттракторами, имеющими номера от 1 до l. Пусть Q^* – вектор предельного состояния при суммарном ресурсе $W > 2r_{sum}$ (количество ресурса $2r_{sum}$ заведомо больше W_{min}). Построим вектор $\Delta Q = Q^* - \tilde{Q}$. Его последние $n - l$ компонент равны нулю, а первые l компонент содержат ресурс, накопленный аттракторами сверх их пропускных способностей. R_{absorb} – матрица поглощающей сети, первые l строк которой равны нулю, а остальные $n - l$ строк совпадают со строками матрицы R. Рассмотрим вектор предельного состояния этой поглощающей сети как функцию от количества ресурса $Q^* = Q^*(W)$. Будем увеличивать W от нуля до тех пор, пока какая-нибудь компонента не совпадет с компонентой вектора ΔQ. Обозначим это количество ресурса через W'. Тогда все компоненты разности $\Delta Q - Q^*(W')$ неотрицательны по построению. Их сумма и составляет поправку на регулярность δW. Это такое количество ресурса, которое нарушает пропорциональность, имеющую место для поглощающей сети, распределяясь между аттракторами. Эта величина заведомо положительна. Используя введенные обозначения, можно дать формальное определение.

Поправкой на регулярность δW называется суммарное количество ресурса в предельном состоянии в одном или нескольких аттракторах, нарушающего пропорцию, заданную матрицей R_{absorb}: $\delta W = (Q^* - \tilde{Q} - Q^*(W'))\cdot\mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ – вектор-столбец из n единиц.

Для того чтобы найти W_{min} и объяснить, откуда возникает вклад ресурса δW, нарушающий пропорцию, имеющую место для стоков, рассмотрим функционирование сети при ресурсах $W > T$, близких к пороговому значению, т.е. таких, что $W - T \le \delta W$.

Пример 4. Сеть задана матрицей (5). Начиная с $W = T$, будем увеличивать суммарный ресурс в сети, помещая его в начальном состоянии в третью вершину. Для этой сети $T = 20$. Выпишем начальные и соответствующие им предельные состояния:

$Q(0) = (0, 0, 20, 0, 0) \quad \to \tilde{Q} = (5, 5, 3,(3), 3,(3), 3,(3)).$
$Q(0) = (0, 0, 25, 0, 0) \quad \to Q^* = (10, 5, 3,(3), 3,(3), 3,(3)).$
$Q(0) = (0, 0, 27, 0, 0) \quad \to Q^* = (12, 5, 3,(3), 3,(3), 3,(3)).$
$Q(0) = (0, 0, 27,2, 0, 0) \to Q^* = (12,2, 5, 3,(3), 3,(3), 3,(3)).$
$Q(0) = (0, 0, 27,21, 0, 0) \quad \to$
$\to Q^* = (12,2075, 5,0025, 3,(3), 3,(3), 3,(3)).$

Из этих пар векторов видно, что при значениях $W - T \le 7,2$ ресурс из источника не распределяется пропорционально, а накапливается в одном аттракторе. Ресурс второго аттрактора остается в предельном состоянии равным $r_2^{out} = 5$ вплоть до $W = 27,2$, и, соответственно, $\delta W = 7,2$.

При суммарном ресурсе $W > 27,2$ второй аттрактор тоже попадает в зону Z^{+*}, и начинает выполняться соотношение

$$(q_1^* - 5 - 7,2) : (q_2^* - 5) = 1 : 3$$

В общем виде для сети с двумя симметричными аттракторами v_1 и v_2, запитанными на источники v_3 и v_4 соответственно, можно утверждать следующее. Если ресурс в начальном состоянии находится в вершине v_3 и при этом его величина удовлетворяет неравенству $W \ge T + \delta W$, в предельном состоянии выполнится соотношение

$$(q_1^* - r_1^{out} - \delta W) : (q_2^* - r_2^{out}) = r'^{\infty}_{absorb\,31} : r'^{\infty}_{absorb\,32},$$

где матрица R'^{∞}_{absorb} задана формулой (8).

То есть, если известно значение δW, предельное состояние при заданном начальном находится однозначно.

Лемма 1. *Пусть в регулярной несимметричной сети с двумя аттракторами v_1 и v_2, ресурс $W > T$ в начальном состоянии находится в источнике v_j, для которого $r'^{\infty}_{absorb\,j1} = \max\limits_{k \in \{3,..n\}} r'^{\infty}_{absorb\,k1}$. Тогда вектор предельного состояния равен*

(11)

$$Q^* = \begin{cases} \tilde{Q} + (W - T,\ 0,\ 0,\ ...,\ 0) \ \ при \ \ W \le T + \delta W, \\ \tilde{Q} + (\delta W + r'^{\infty}_{absorb\,j1} \cdot \Delta W,\ \ r'^{\infty}_{absorb\,j2} \cdot \Delta W,\ 0,...,0) \ \ при \ \ W > T + \delta W; \end{cases}$$

где $\Delta W = W - (T + \delta W)$; R'^{∞}_{absorb} *– предельная матрица поглощающей сети, соответствующей данной регулярной сети.*

Доказательство. Дисбаланс в аттракторах происходит по следующей причине. Пока аттрактор v_2 добирает свой ресурс до выходной пропускной способности, он функционирует по правилу 2, т.е. на каждом такте отдает весь свой ресурс. Аттрактор v_1 переходит на функционирование по правилу 1 и начинает отдавать по полной выходной пропускной способности, получая больше этого значения. Излишек на каждом такте остается в v_1. Таким образом, δW состоит из ресурса, накопленного одним аттрактором, пока он работает по правилу 1, в то время как другой аттрактор работает по правилу 2. Если значение ресурса суммарного ресурса $W \le T + \delta W$, то по определению δW ресурс аттрактора v_2 асимптотически стремится к r_1^{out}, и v_2 не переходит в зону $Z^+(t)$, и верхняя строка (11) доказана.

Если $W > T + \delta W$, оба аттрактора оказываются в зоне $Z^+(t)$. В некоторый момент времени t' выполнится: $q_2(t' - 1) \le r_2^{out}$ и $q_2(t') > r_2^{out}$. Тогда $q_1(t') = r_1^{out} + \delta W$. Покажем, что при переходе второго аттрактора в зону $Z^+(t)$ ресурс начинает распределяться между аттракторами в пропорции, заданной R'_{absorb}. Выходной поток в аттракторах при их переходе в зону $Z^+(t)$ стабилизировался: он равен r_1^{out} в первом аттракторе и r_2^{out} во втором – в каждое ребро они отдают по полной пропускной способности. Накопление в аттракторах происходит, пока их входной поток больше выходного. Оно складывается из разницы стабильной и нестабильной компонент, поскольку в сбалансированном (предельном) потоке для аттракторов выполняется: $f_1^{in*} = f_1^{out*} = r_1^{out}$, $f_2^{in*} = f_2^{out*} = r_2^{out}$. Если рассматривать только нестабильную компоненту потока, ей соответствует матрица, в которой выходные пропускные способности аттракторов равны нулю, а это и есть матрица R_{absorb}.

Таким образом, ресурс сверх $T + \delta W$ распределяется между аттракторами в пропорции, заданной матрицей R'^{∞}_{absorb}. □

Лемма легко обобщается на случай произвольного количества аттракторов. Пусть в сети с l аттракторами $v_1, \ldots, v_l$, ресурс

$W > T$ в начальном состоянии весь сосредоточен в источнике v_j, $j > l$. Обозначим через δW_i – поправки в каждом аттракторе при любом $W \geq T$ – достаточно большом, чтобы часть ресурса распределялась в предельном состоянии в соответствии с матрицей R'^{∞}_{absorb}. Ясно, что $\delta W_i = const$, поскольку после перехода последнего из аттракторов в зону $Z^+(t)$ выходной поток в них стабилизируется, и ресурс начинает прибывать в них с пропорции, заданной матрицей R'^{∞}_{absorb}.

Теорема 1. *Пусть в регулярной несимметричной сети с l аттракторами $v_1, \ldots, v_l$ ресурс $W > T$ в начальном состоянии находится в источнике v_j, $j > l$. Тогда вектор предельного состояния равен:*

(12)

$$Q^* = \begin{cases} \tilde{Q} + (0, ..., W - T, 0, ..., 0) \ \textit{при} \ W \leq T + (\delta W_m - \delta W_{-m}), \\ \tilde{Q} + (\delta W_1^{\wedge}, ..., \delta W_l^{\wedge}, 0, ..., 0) \ \textit{при} \ T + (\delta W_m - \delta W_{-m}) < W \leq T + \delta W, \\ \tilde{Q} + (\delta W_1 + r'^{\infty}_{absorb\, j1} \cdot \Delta W, ..., \delta W_l + r'^{\infty}_{absorb\, jl} \cdot \Delta W, 0, ..., 0) \\ \hfill \textit{при} \, W > T + \delta W; \end{cases}$$

где вектор $(0, \ldots, W - T, 0, \ldots, 0)$ *имеет ненулевую компоненту с номером $m \leq l$; m находится из условия* $m = \arg\max_{k \in \{1,\ldots,l\}} r'^{\infty}_{absorb\ km}$;

$0 \leq \delta W_i^{\wedge} < \delta W_i$ *– поправки при* $T + (\delta W_m - \delta W_{-m}) < W < T + \delta W$;

$\delta W_m = \max_{k \in \{1,\ldots,l\}} \delta W_k$ *– поправка, соответствующая аттрактору v_m;*

$\delta W_{-m} = \max_{\delta W_k \in \{\delta W_1, \ldots, \delta W_l\} \setminus \delta W_m} \delta W_k$ *– вторая по величине поправка при ресурсе, сконцентрированном в источнике v_j;*

$$\delta W = \sum_{i=1}^{l} \delta W_i \ ; \ \Delta W = W - (T + \delta W);$$

причем существует аттрактор v_i, для которого $\delta W_i = 0$, $i \leq l$.

Доказательство.

Докажем каждую строку из формулы (12) отдельно.

1. Справедливость формулы для случая $W < T + (\delta W_m - \delta W_{-m})$ вытекает из доказательства леммы 1. Аттрактор v_m первым переходит на правило 1 и начинает наби-

рать излишки ресурса, составляющие поправку $\delta W_m^{\wedge} = (W - T)$. Если второй (по величине δW_i) аттрактор не может перейти на правило 1, все излишки ресурса в предельном состоянии окажутся в вершине v_m. Переход второго аттрактора на правило 1 происходит, когда аттрактор v_m имеет ресурс, равный $(\delta W_m - \delta W_{-m})$. Отсюда непосредственно вытекает условие выполнения равенства $Q^* = \tilde{Q} + (0, \ldots, W - T, 0, \ldots, 0)$.

2. При ресурсе, превосходящем значение T менее чем на суммарную поправку δW, при функционировании сети часть аттракторов может не перейти в зону $Z^+(t)$, соответствующие поправки $\delta W_i^{\wedge} = \delta W_i^{\wedge}(W)$ для них будут равны нулю, и компоненты предельного состояния будут равны соответствующим компонентам вектора $\tilde{Q} = (r_1^{out}, \ldots, r_l^{out}, \tilde{q}_{l+1}(0), \ldots, \tilde{q}_n(0))$. По мере увеличения суммарного ресурса сверх величины $T + (\delta W_m - \delta W_{-m})$ аттракторы один за другим смогут перейти в зону $Z^+(t)$. Если ввести такую нумерацию аттракторов, что они будут упорядочены по убыванию величины δW_i, т.е. $\delta W_1 := \delta W_m$, $\delta W_2 := \delta W_{-m}$, и т.д., то можно вычислить значение ресурса W, при котором аттрактор с номером k будет иметь в предельном состоянии $\delta W_k^{\wedge}(W) > 0$. Для этого необходимо, чтобы все аттракторы с номерами, меньшими k, тоже имели положительные поправки. Разобьем множество значений суммарного ресурса $W > T$ на интервалы и рассмотрим зону $Z^+(t)$ для каждого из них.

1) $T < W \le T + (\delta W_1 - \delta W_2)$: только аттрактор v_1 функционирует по правилу 1. Введем обозначение: $T + (\delta W_1 - \delta W_2) = T_1$. Далее границы полуинтервалов будем обозначать через T_i.

2) $T_1 < W \le T + (\delta W_1 - \delta W_2) + 2(\delta W_2 - \delta W_3) = T + \delta W_1 + \delta W_2 - 2\delta W_3 = T_2$: аттракторы v_1 и v_2 функционируют по правилу 1.

3) $T_2 < W \le T + (\delta W_1 - \delta W_2) + 2(\delta W_2 - \delta W_3) + 3(\delta W_3 - \delta W_4) = T + \delta W_1 + \delta W_2 + \delta W_3 - 3\delta W_4 = T_3$: аттракторы v_1, v_2 и v_3 функционируют по правилу 1.

…

$l - 2$) $T_{l-3} < W \le T + \delta W_1 + \ldots + \delta W_{l-2} - (l-1)\delta W_{l-1} = T_{l-2}$: аттракторы $v_1, v_2, \ldots, v_{l-1}$ функционируют по правилу 1.

$l-1$) $T_{l-2} < W \le T + \delta W_1 + \ldots + \delta W_{l-1}$: аттракторы $v_1, \ldots, v_{l-1}$ функционируют по правилу 1, но поправка в аттракторе v_{l-1} еще не достигла своего максимального значения.

l) $W > T + \delta W_1 + \ldots + \delta W_{l-1} = T + \delta W$ все аттракторы переходят в зону $Z^+(t)$, и поправки достигли максимальных значений. При этом, в аттракторе v_l поправки нет: $\delta W_l = 0$, так как больше нет аттракторов, которым нужно накапливать ресурс.

3. Третья строка формулы (12) доказана в пункте l). При $W > T + \delta W$ все аттракторы переходят в зону $Z^+(t)$, и выходной поток в них стабилизируется за конечное число тактов. Далее в сети начинается перераспределение ресурса в соответствии с матрицей R'^{∞}_{absorb}. □

Замечание 1. Если вершина-аттрактор, для которой выполняется условие $m = \arg\max_{k \in \{1,\ldots,l\}} r'^{\infty}_{absorb\ km}$, не единственна, то ресурс $W - T$ в верхней строке формулы (12) распределится в равных долях между всеми этими аттракторами.

Замечание 2. Проиллюстрируем графически формулы в пунктах 1) ÷ l).

На рис. 1 представим, что пунктирные линии – смещающаяся вниз ось абсцисс. Они задают уровень, ресурс над которым виден. Чем ось ниже, тем больше вершин-аттракторов имеют положительные поправки. При непрерывной («главной») оси абсцисс все вершины имеют максимальные поправки. При дальнейшем увеличении ресурса излишки будут распределяться в пропорции, заданной матрицей R'^{∞}_{absorb}.

Как и во всех гистограммах количество ресурса рассчитывается как площадь частей столбиков, выделенных тем или иным цветом. Ширину каждого столбца считаем единичной. На рис. 2 количество ресурса над соответствующей осью показано цветом. Этот рисунок иллюстрирует возникновение каждого слагаемого в суммах из выражений 1) ÷ l).

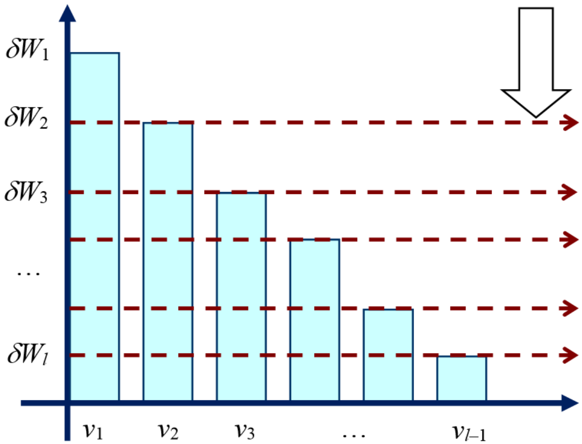

Рис. 1. Расположение величин δW_i *в порядке убывания*

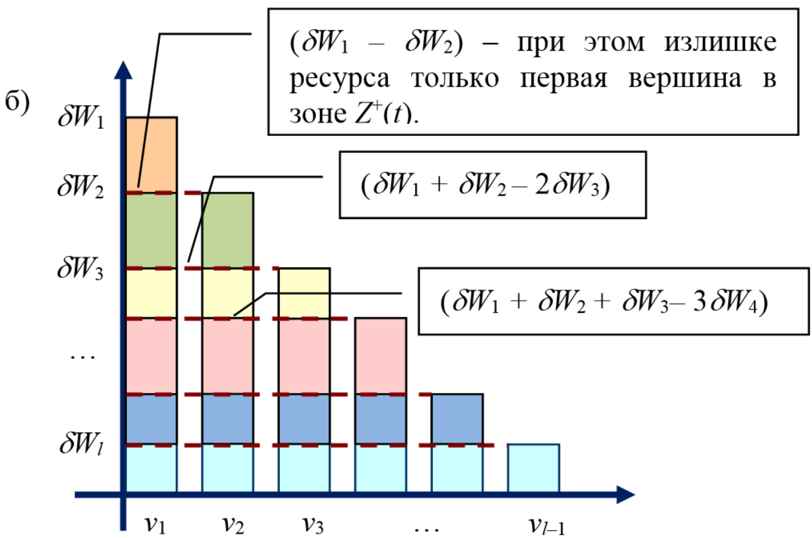

Рис. 2. Для перехода аттрактора в зону $Z^+(t)$*, ресурс должен превысить сумму ресурсов над пунктирной чертой*

Следствие. Непосредственно из доказательства теоремы вытекает, что если в несимметричной сети имеется l потенциальных аттракторов, а ресурс в начальном состоянии сосредоточен в вершине-источнике v_j, $j > l$, то значения суммарного ресурса при $W > T$ можно разбить на l интервалов, для каждого из которых поправки δW_i будут иметь i вершин (i = 1, …, l). Границы интервалов задаются формулами из пп. 1) ÷ l).

При ресурсе $W > T + \delta W$ все вершины имеют максимально возможную поправку, ресурс сверх $T + \delta W$ распределяется в соответствии с матрицей R'^{∞}_{absorb}.

Значения δW_i можно найти экспериментально для любой сети. Чтобы получить аналитические зависимости и выявить закономерности, рассмотрим изменение δW_i при изменении строк матрицы пропускных способностей, соответствующих аттракторам. Если все элементы в них равны нулю, сеть превращается в поглощающую.

4.2. ЗАВИСИМОСТЬ δW ОТ ВЫХОДНЫХ ПРОПУСКНЫХ СПОСОБНОСТЕЙ АТТРАКТОРОВ

Вновь рассмотрим сеть с двумя потенциальными аттракторами. Здесь поправка δW накапливается только в одной вершине, поэтому можно записать $\delta W_1 = \delta W$ и далее оперировать величиной δW.

Проследим зависимость δW от выходных пропускных способностей вершин-аттракторов: $\delta W = \delta W\left(r_i^{out}\right)$, i = 1, 2, считая, что первые две строки матрицы R однородны, как в матрицах (5) и (9).

Пример 5. В матрице

$$R = \begin{pmatrix} r & r & r & r & r \\ r & r & r & r & r \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

будем изменять пропускные способности r от нуля с некоторым шагом. Данные экспериментов представлены в таблице 1.

Таблица 1. Характеристики предельного состояния при разных выходных пропускных способностях аттракторов

№	***r***	r_1^{out}, r_2^{out}	***T***	$\tilde{Q}$	δW
1.	0	0	0		0
2.	0,05	0,25	1	(0,25, 0,25, 0,1(6), 0,1(6), 0,1(6))	0,875
3.	0,1	0,5	2	(0,5, 0,5, 0,(3), 0,(3), 0,(3))	1,75
4.	0,15	0,75	3	(0,75, 0,75, 0,5, 0,5, 0,5)	2,625
5.	0,2	1	4	(1, 1, 0,(6), 0,(6), 0,(6))	3,5
6.	0,25	1,25	5	(1,25, 1,25, 0,8(3), 0,8(3), 0,8(3))	4,375
7.	0,3	1,5	6	(1,5, 1,5, 1, 1, 1)	5
8.	0,35	1,75	7	(1,75, 1,75, 1,1(6), 1,1(6), 1,1(6))	5,375
9.	0,4	2	8	(2, 2, 1,(3), 1,(3), 1,(3))	5,75
10.	0,45	2,25	9	(2,25, 2,25, 1,5, 1,5, 1,5)	6,125
11.	0,5	2,5	10	(2,5, 2,5, 1,(6), 1,(6), 1,(6))	6,5
12.	0,55	2,75	11	(2,75, 2,75, 1,8(3), 1,8(3), 1,8(3))	6,875
13.	0,6	3	12	(3, 3, 2, 2, 2)	7,2
14.	0,65	3,25	13	(3,25, 3,25, 2,1(6), 2,1(6), 2,1(6))	7,28
15.	0,7	3,5	14	(3,5, 3,5, 2,(3), 2,(3), 2,(3))	7,3
16.	0,75	3,75	15	(3,75, 3,75, 2,5, 2,5, 2,5)	7,31
17.	0,8	4	16	(4, 4, 2,(6), 2,(6), 2,(6))	7,32
18.	0,85	4,25	17	(4,25, 4,25, 2,8(3), 2,8(3), 2,8(3))	7,335
19.	0,9	4,5	18	(4,5, 4,5, 3, 3, 3)	7,35
20.	0,95	4,75	19	(4,75, 4,75, 3,1(6), 3,1(6), 3,1(6))	7,365
21.	1	5	20	(5, 5, 3,(3), 3,(3), 3,(3))	7,2
22.	1,05	5,25	21	(5,25, 5,25, 3,5, 3,5, 3,5)	6,945
23.	1,1	5,5	22	(5,5, 5,5, 3,(6), 3,(6), 3,(6))	6,67
24.	1,15	5,75	23	(5,75, 5,75, 3,8(3), 3,8(3), 3,8(3))	6,4

№	r	r_1^{out}, r_2^{out}	T	$\tilde{Q}$	δW
25.	1,2	6	24	(6, 6, 4, 4, 4)	6,13
26.	1,25	6,25	25	(6,25, 6,25, 4,1(6), 4,1(6), 4,1(6))	6,155
27.	1,3	6,5	26	(6,5, 6,5, 4,(3), 4,(3), 4,(3))	6,16
28.	1,35	6,75	27	(6,75, 6,75, 4,5, 4,5, 4,5)	6,04
29.	1,4	7	28	(7, 7, 4,(6), 4,(6), 4,(6))	5,78
30.	1,45	7,25	29	(7,25, 7,25, 4,8(3), 4,8(3), 4,8(3))	5,515
31.	1,5	7,5	30	(7,5, 7,5, 5, 5, 5)	5,18

Таблица конечна. Далее пропускная способность увеличиваться не может, так как матрица

$$R = \begin{pmatrix} 1,5 & 1,5 & 1,5 & 1,5 & 1,5 \\ 1,5 & 1,5 & 1,5 & 1,5 & 1,5 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

задает сеть стремя аттракторами. Это вершины v_1, v_2 и v_5 – для всех трех вершин выполняется критерий аттрактивности (формула (1)). В самом деле, для вершин v_1, v_2 и v_5 выполняется:

$$\frac{r_1^{out}}{q_1^{1*}} = \frac{r_2^{out}}{q_2^{1*}} = \frac{7,5}{0,25} = 30; \quad \frac{r_5^{out}}{q_5^{1*}} = \frac{5}{1/6} = 30;$$

при этом из таблицы 1 следует, что для этой сети $T = 30$.

Представим данные, полученные в таблице в виде графика (рис. 3). Из него видно, что изменения δW с ростом пропускных способностей аттракторов происходят немонотонно. Сначала эта величина возрастает, причем присутствуют участки линейного роста; при пропускных способностях, равных приблизительно 0,95, достигает максимума, и затем начинает убывать. Однако при пропускных способностях, равных 1,25 и 1,3, монотонность вновь нарушается.

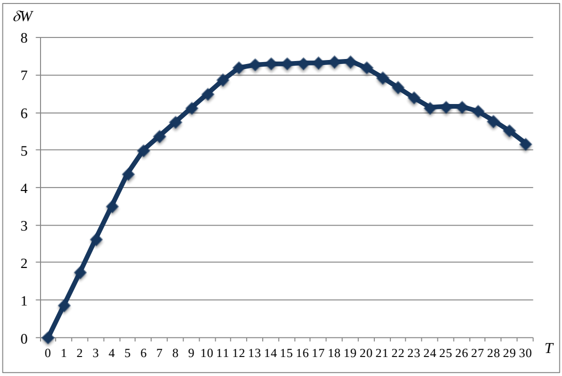

Рис. 3. Зависимость величины δW от выходных пропускных способностей аттракторов (и порогового значения T)

4.3. НЕЛИНЕЙНЫЕ ПЕРЕХОДЫ ПРИ ФУНКЦИОНИРОВАНИИ СЕТИ И НЕОДНОРОДНАЯ ЦЕПЬ МАРКОВА

Функционирование несимметричной сети с ресурсом, большим порогового значения, описывается неоднородной цепью Маркова.

Для того чтобы вся сеть при большом ресурсе функционировала по правилу 2 и при этом ее состояния на каждом такте совпадали с состояниями сети, работающей по двум правилам, необходимо и достаточно на каждом такте изменять пропускные способности петель вершин, имеющих избыток ресурса, так чтобы весь избыток уходил в петлю и возвращался на следующем такте. Таким образом, каждая вершина будет отдавать весь свой ресурс.

На каждом такте t строится матрица пропускных способностей $R(t)$, отличающаяся от матрицы R только диагональными элементами вершин, которые функционируют по правилу 1. То есть

$$r_{ii}(t) = \begin{cases} r_{ii}, \ \textit{если} \ \ q_i(t) \le r_i^{out}, \\ q_i(t) - \sum\limits_{j \ne i} r_{ij}, \ \textit{если} \ \ q_i(t) > r_i^{out}. \end{cases}$$

Нормируя матрицы $R(t)$, получим стохастические матрицы $R'(t)$, которые задают неоднородную цепь Маркова. Вектор

$$Q(t+1) = Q(0)\prod_{t=0}^{m} R'(t)$$

совпадает с вектором состояния сети, заданной матрицей R, с начальным состоянием $Q(0)$.

Если в начальном состоянии весь ресурс сосредоточен в источнике с номером j, матрица $R(t)$ будет отличаться от исходной матрицы R только j-й строкой. В процессе функционирования некоторые вершины могут оказываться в зоне $Z^+(t)$, и тогда соответствующие им строки матрицы $R(t)$ будут отличаться от строк матрицы R. За конечное число шагов зона $Z^+(t)$ стабилизируется, и в ней остаются только потенциальные аттракторы. Все остальные строки матрицы $R(t)$ и соответствующей ей матрицы $R'(t)$ совпадают с соответствующими строками матриц R и R'.

Опишем процессы, происходящие в сети, когда одна из вершин изменяет правило функционирования. Снова для простоты рассмотрим сеть с двумя потенциальными аттракторами. Пусть $W > T + \delta W$, тогда при начальном состоянии, в котором весь ресурс сосредоточен в одном источнике, существует, как минимум, три точки смены правила функционирования: первый и второй аттракторы по очереди переходят на правило 1, источник с ресурсом переходит на правило 2.

Рассмотрим этапы, на которые делится функционирование сети.

0. В начальном состоянии в зоне $Z^+(0)$ находится единственная вершина – источник с ресурсом $W > T$.

1. Смена правила в первой вершине-аттракторе. Поскольку в начальном состоянии этот аттрактор не имел ресурса, существует как минимум один такт времени, в который эта вершина функционирует по правилу 2. Через конечное число тактов эта вершина переходит на правило 1. Зона $Z^+(t)$ содержит две вершины: аттрактор и источник.

2. Второй аттрактор переходит на правило 1. Зона $Z^+(t)$ содержит три вершины: два аттрактора и источник. Выходной поток из аттракторов стабилизируется.

3. Источник покидает зону $Z^+(t)$. В зоне $Z^+(t)$ остаются два аттрактора.

На промежутке между переходами 1 и 2 происходит формирование поправки δW. На промежутке между переходами 2 и 3 начинается формирование разности ресурса, соответствующее R'^{∞}_{absorb}. Если переход 2 отсутствует, второй аттрактор не получает ресурс, больший своей выходной пропускной способности.

После перехода 3 зона $Z^+(t)$ стабилизируется.

Строки стохастических матриц $R'(t)$, соответствующие вершинам, функционирующим по правилу 1, изменяются на каждом такте. Рассмотрим матрицы, задающие изменение вектора исходящего потока. Они изменяются только при переходах 1–3, в остальные моменты времени они стационарны. Представим матрицу стохастическую матрицу R' в виде: $R' = \left(r_1', r_2', \ldots, r_n'\right)$, где r_k' – столбцы R'. Пусть v_j – вершина-источник содержащая ресурс в начальном состоянии, v_1, v_2 – аттракторы, причем, пусть, для определенности первый переходит в зону $Z^+(t)$ аттрактор v_1. Тогда изменение исходящего потока на последовательных тактах в соответствии с этапами 0-3 можно записать следующим образом:

0. $F^{out}(t+1) = F^{out}(t)\left(r_1', r_2', r_3', \ldots, e_j, \ldots, r_n'\right)$, $t < t_1$;

1. $F^{out}(t+1) = F^{out}(t)\left(e_1, r_2', r_3', \ldots, e_j, \ldots, r_n'\right)$, $t_1 \le t < t_2$;

2. $F^{out}(t+1) = F^{out}(t)\left(e_1, e_2, r_3', \ldots, e_j, \ldots, r_n'\right)$, $t_2 \le t < t_3$;

3. $F^{out}(t+1) = F^{out}(t)\left(e_1, e_2, r_3', \ldots, r_j', \ldots, r_n'\right)$, $t \ge t_2$.

Обозначим матрицы, на которые умножается вектор $F^{out}(t)$ через P_j, P_{1j}, P_{12j} и P_{12} соответственно. Для каждого из четырех этапов входящий поток вычисляется по формуле

$$F^{in}(t+1) = F^{out}(t)R'.$$

Из сказанного выше следует, что δW вычисляется как первая компонента вектора

$$\delta\vec{W} = \sum_{t=t_1}^{t_2}\Big(F^{in}(t+1) - F^{out}(t+1)\Big) = \sum_{t=t_1}^{t_2}\Big(F^{out}(t)R' - F^{out}(t)P_{1j}\Big) =$$

$$= \sum_{t=t_1}^{t_2} F^{out}(t)\Big(R' - P_{1j}\Big).$$

Матрица $(R' - P_{1j})$ имеет два ненулевых столбца с номерами 1 и j.

Преобразуем это выражение далее, воспользовавшись зависимостью векторов исходящего потока на двух последовательных тактах. В рамках второго этапа $F^{out}(t+1) = F^{out}(t)P_{1j}$, следовательно, $F^{out}(t) = F^{out}(t_1)(P_{1j})^{t-t_1}$.

Тогда

$$\delta\vec{W} = F^{out}(t_1)\left(\sum_{t=t_1}^{t_2}(P_{1j})^{t-t_1}\right)\Big(R' - P_{1j}\Big).$$

Вектор $\delta\vec{W}$ имеет ненулевые компоненты с номерами 1 и j, соответствующие аттрактору и источнику; $\delta W = \left(\delta\vec{W}\right)_1$.

Значения δW_i для сети с l аттракторами ($i = 1, \ldots, l$) определяются аналогично. Количество промежуточных переходов будет $l + 1$ – по одному на каждый аттрактор и один для источника.

4.4. ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ СЕТИ ПРИ $f_{sum}(t) \geq T$

Заметим, что значения δW_i ($i = 1, \ldots, l$) максимальны, когда ресурс в начальном состоянии сосредоточен только в одной вершине-источнике, т.е. асимметрия его распределения максимальна. При других начальных состояниях δW будут меньше. В предельном случае $\delta W = 0$. Так, например, эксперименты показывают, что если во все вершины в начальном состоянии поместить ресурс, больший предельного значения при $W = T$, то весь излишек будет распределяться в пропорции, заданной матрицей R'^{∞}_{absorb}. Докажем, что это верно для любой несимметричной регулярной сети.

Теорема 2. *Пусть регулярная несимметричная ресурсная сеть с l потенциальными аттракторами* ($l > 1$) *имеет суммарный ресурс $W > T$ и начальное ее состояние $Q(0)$ представимо в виде $Q(0) = \tilde{Q} + \Delta Q(0)$, где $\tilde{Q}$ – предельное состояние при $W = T$, $\Delta Q(0)$ – произвольный вектор, задающий распределение излишков ресурса $W - T$. Тогда предельное состояние представимо в виде суммы двух векторов*:

(13) $Q^* = \tilde{Q} + \Delta Q(0) R'^{\infty}_{absorb}$.

Доказательство. Когда в регулярной сети все вершины имеют ресурс, не меньший соответствующей компоненты вектора $\tilde{Q}$, поток в сети состоит из двух частей: $F^{out}(t) = \tilde{F} + \Delta F^{out}(t)$, где стабильная компонента $\tilde{F}$ равна предельному потоку при любом ресурсе $W > T$, а нестабильная компонента $\Delta F^{out}(t)$, уменьшающаяся со временем, отвечает за перераспределение излишков ресурса $\Delta Q(t)$. Причем, поскольку аттракторы при $W = T$ отдают по полной пропускной способности и больше отдать уже не могут, то соответствующие им компоненты вектора $\Delta F^{out}(t)$ равны нулю – ресурс, соответствующий $\Delta Q(t)$, в аттракторы входит, но не может выйти. Таким образом, излишки распределяются по закону:

$$\Delta Q(t+1) = \Delta Q(t)\, R'_{absorb}, \text{ где } R'_{absorb} = \left(\begin{array}{c|c} E & O_1 \\ \hline R'_1 & R'_2 \end{array}\right).$$

В предельном состоянии:

$$\Delta Q^* = \Delta Q(0) \left(\begin{array}{c|c} E & O_1 \\ \hline \left(E_2 - R'_2\right)^{-1} R'_1 & O_2 \end{array}\right) = \Delta Q(0)\, R'^{\infty}_{absorb}. \ \square$$

4.5. НАЧАЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ, НЕ СОЗДАЮЩИЕ ПОПРАВКУ

Теорема 2 содержит достаточное условие того, что ресурс в аттракторах распределится в той же пропорции, что и в стоках соответствующей поглощающей сети. Однако в ней описан узкий класс начальных состояний, приводящих к такому предельному состоянию. Предельное состояние описывается формулой (13) для еще одного класса начальных состояний.

Теорема 3. *Пусть в регулярной несимметричной ресурсной сети с l аттракторами с номерами* 1, ..., l *и* k *источниками с номерами* l+1, ..., l+k, *начальное состояние задано вектором:*

$$Q(0) = (q_1(0),...,q_l(0),\tilde{q}_{l+1} + \Delta W_{l+1} + \Delta Q_{l+1},...,$$
$$..., \tilde{q}_{l+k} + \Delta W_{l+k} + \Delta Q_{l+k},...,q_n(0)),$$

где величины

$$\Delta W_j = \sum_{i\in\{1,\ldots,l,l+k+1,\ldots,n\}} \frac{d_i(0)}{r_i^{in-}} r_{ji} \quad (j = l+1, \ldots, l+k)$$

– необходимые минимальные излишки в каждом источнике; r_i^{in-} *– суммарная входная пропускная способность вершин из* $Z^-(0)$ *по ребрам из вершин-источников,* $d_i(0)$ *– дефициты*[1] *всех вершин из* $Z^-(0)$: $i = 1, \ldots, l, l+k+1, \ldots, n$, $\Delta Q_j \geq 0$, $j = l+1, \ldots, l+k$. *Тогда предельное состояние представимо в виде*

$$Q^* = \tilde{Q} + \Delta Q \cdot R'^{\infty}_{absorb},$$

где ΔQ *– вектор длины* n *с ненулевыми компонентами* ΔQ_j ($j = l+1, \ldots, l+k$).

Доказательство. В теореме утверждается, что если все источники имеют ресурс и его количество достаточно велико, то накопления поправки δW в аттракторах не происходит. Чтобы доказать это утверждение и оценить количество ресурса, которое должно находиться в каждом из источников, обратимся к описанию смены правил вершинами в сети, данному в разделе 4.3. Накопление величины поправки происходит, когда при функционировании сети случается асинхронный переход аттракторов из зоны $Z^-(t)$ в зону $Z^+(t)$: пока в аттракторах из $Z^+(t)$ происходит накопление, аттракторы, находящиеся в $Z^-(t)$, продолжают отдавать весь свой ресурс.

При достаточно больших ресурсах во всех источниках аттракторы переходят на правило 1 одновременно. Следовательно, накопления поправки ресурса не происходит и $\delta W = 0$.

---

[1] *Под дефицитом вершины* v_i *мы понимаем количество ресурса, недостающее до значения* $\tilde{q}_i$.

Определим понятие «достаточно большого ресурса».

Для каждой вершины v_i, которая в состоянии $Q(0)$ имеет дефицит ресурса, обозначим через r_i^{in-} ее суммарную входную пропускную способность из вершин-источников. Дефицит вершины v_i обозначим, как и прежде, $d_i(0)$. Тогда, чтобы покрыть дефицит каждой вершины до величины, соответствующей компоненте $\tilde{Q}$, источник v_j должен отдать

$$\sum_{i\in\{1,\ldots,l,l+k+1,\ldots,n\}} \frac{d_i(0)}{r_i^{in-}} r_{ji}$$

ресурса, где i пробегает множество индексов вершин, имеющих дефицит в начальном состоянии.

Отсюда $\Delta W_j = \sum_{i\in\{1,\ldots,l,l+k+1,\ldots,n\}} \frac{d_i(0)}{r_i^{in-}} r_{ji}$.

Соответствующая компонента вектора ΔQ вычисляется по формуле: $\Delta Q_j = q_j(0) - \tilde{q}_j - \Delta W_j$. □

Проиллюстрирует теорему примером, в котором предельное состояние может быть получено из начального аналитически.

Пример 6. Сеть задана матрицей (5). Пусть ресурс $W > T$ присутствует в обоих источниках, причем, в каждом источнике его достаточно много: $Q(0) = (0, 0, 20, 40, 0)$. Тогда предельное состояние для этой сети будет $Q^* = (20, 30, 3,(3), 3,(3), 3,(3))$.

Опишем алгоритм нахождения Q^*. Все его компоненты, кроме двух первых, совпадают с компонентами вектора $\tilde{Q}$. Для расчета первых двух компонент найдем дефициты вершин в начальном состоянии и пропорцию восполнения этих дефицитов из обоих источников, содержащих излишки ресурса. Каждый источник должен отдать ресурс в нейтральную вершину в количестве

$$\frac{3\frac{1}{3}}{2} = \frac{5}{3}$$

и в вершины-аттракторы по 5 единиц – чтобы они получили r_1^{out} и r_2^{out} единиц ресурса. Итого каждый из двух источников должен отдать 20/3 ресурса для насыщения сети и оставить себе 3,(3) = 10/3.

$$\Delta W_{3,4} = \frac{20}{3},\ \tilde{q}_{3,4} = \frac{10}{3}.$$

Излишек вершины v_3 составит

$$\Delta Q_3 = 20 - \frac{20}{3} - \frac{10}{3} = 20 - 10 = 10,$$

в вершине v_4 остается излишек $\Delta Q_4 = 40 - 10 = 30$. Эти излишки вершины должны распределить между аттракторами в пропорциях 3:1 и 1:3 соответственно (рис. 4).

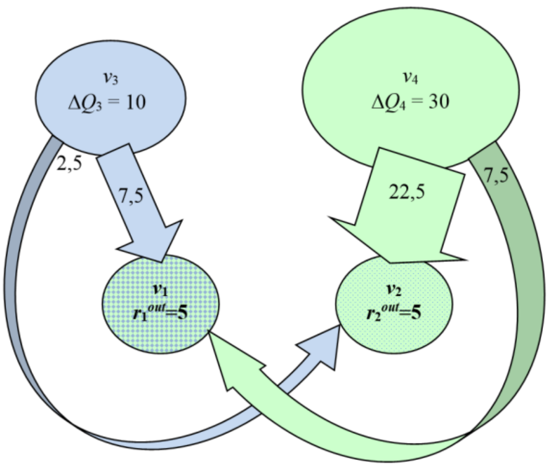

Рис. 4. Распределение излишков ресурса между аттракторами

Имеем: $q_1^* = 5 + 7{,}5 + 7{,}5 = 20$; $q_2^* = 5 + 2{,}5 + 22{,}5 = 30$.

Эти значения соответствуют первым двум компонентам вектора предельного состояния.

4.6. ОЦЕНКА ПОПРАВКИ δW

Теоремы 2–3 описывают начальные состояния, при которых для каждого из аттракторов $\delta W_i = 0$. Своего максимума величины δW_i достигают, если ресурс в начальном состоянии сосредоточен в одном источнике.

Теорема 4. *Пусть в регулярной несимметричной ресурсной сети с l аттракторами* ($l \geq 2$), *имеющими номера* 1, …, l, *суммарный ресурс* $W > T + \Delta W_j(0)$ ($\Delta W_j(0) > \delta W$) *в начальном состоянии находится в вершине-источнике* v_j. *Тогда предельное состояние представимо в виде*

$$Q^* = \tilde{Q} + \Delta Q R'^{\infty}_{absorb} + (\delta W_1,\ \delta W_2,\ \dots,\ \delta W_l,\ 0,\ \dots,\ 0),$$

где $\Delta Q = Q(0) - \left(0,\dots,0,\sum_{i=1}^{l}\delta W_i,0,\dots,0\right)$, *ненулевая компонента имеет номер* j.

Причем для аттрактора с номером $l_0 = \arg\min_k r'^{\infty}_{absorb\ jk}$ *выполняется* $\delta W_{l_0} = 0$, *а остальные значения* δW_i *находятся по формуле*

$$(14)\quad \delta W_i = (q_i^* - r_i^{out}) - (q_{l_0}^* - r_{l_0}^{out})\frac{r'^{\infty}_{absorb\ ji}}{r'^{\infty}_{absorb\ jl_0}}.$$

Доказательство. Теорема 4. двойственна теореме 1. Вершина-аттрактор с номером $l_0 = \arg\min_j r'^{\infty}_{absorb\ m_0 j}$ последней из аттракторов перейдет на правило 1. Излишек δW_i в каждом аттракторе накапливается, пока хотя бы один аттрактор функционирует по правилу 2. Таким образом, вершина, перешедшая на правило 1 последней, не имеет излишка.

Формула (14) – следствие из теоремы 1. Когда все аттракторы функционируют по правилу 1, ресурс перераспределяется между ними в пропорции, задаваемой матрицей R'^{∞}_{absorb}. Излишки в каждой вершине-аттракторе выражаются через компоненту вектора предельного состояния, соответствующую аттрактору, для которого $\delta W_{l_0} = 0$. □

Теорема объясняет результаты, полученные в приме рах 2–4. Пусть даны два вектора начальных состояний:

$$Q_1(0) = (q_1(0), q_2(0),\ \dots, \tilde{q}_{l+1} + \Delta W_{l+1}, \dots, \tilde{q}_{l+k} + \Delta W_{l+k}, \dots, q_n(0)),$$

$$Q_2(0) = (q_1(0), q_2(0),\ \dots, \tilde{q}_{l+1} + 2\Delta W_{l+1}, \dots, \tilde{q}_{l+k} + 2\Delta W_{l+k}, \dots, q_n(0)),$$

где

ΔW_i – любые заведомо большие величины (например, можно считать, что $\Delta W_i > T$). Предельные состояния для них:

$$Q_1^* = \tilde{Q} + \Delta Q_1 R'^{\infty}_{absorb} + (\delta W_1, \delta W_2, \ldots, \delta W_l, 0, \ldots, 0),$$

$$Q_2^* = \tilde{Q} + \Delta Q_2 R'^{\infty}_{absorb} + (\delta W_1, \delta W_2, \ldots, \delta W_l, 0, \ldots, 0).$$

Разность между ними равна

$$Q_2^* - Q_1^* = \tilde{Q} + (\Delta Q_2 - \Delta Q_1) R'^{\infty}_{absorb}.$$

Таким образом, разность двух предельных состояний не зависит от поправок в аттракторах.

Компоненты вектора предельного состояния, соответствующие потенциальным аттракторам, можно вычислить через потоки.

Теорема 5. *Пусть регулярная несимметричная ресурсная сеть имеет потенциальные аттракторы с номерами* 1, …, l. *Пусть суммарный ресурс* $W > T + \Delta W_j(0)$ *в начальном состоянии находится в не-аттрактивных вершинах. Тогда для каждого из потенциальных аттракторов выполнится соотношение*

$$\sum_{t:q_i(t) > r_i^{out}} \left(f_i^{in}(t) - r_i^{out} \right) = q_i^* - r_i^{out}. \tag{15}$$

Доказательство. Левая часть равенства (15) характеризует ресурс, накопленный сверх суммарной выходной пропускной способности вершины на протяжении всего функционирования сети – каждое слагаемое равно разности входного и выходного потоков, а это и есть предельная разность $q_i^* - r_i^{out}$. □

Следствие. Если в начальном состоянии $Q(0)$ ресурс сосредоточен в одной неаттрактивной вершине, и его величина $W > T$ такова, что в предельном состоянии по крайней мере один из потенциальный аттрактор имеет ресурс, равный своей суммарной выходной пропускной способности: $q_m^* = r_m^{out}$, $m \le l$, а при любом его увеличении $q_m^* > r_m^{out}$, то для всех остальных аттракторов, имевших $q_i^* > r_i^{out}$, выполнится:

$$\sum_{t:q_i(t) > r_i^{out}} \left(f_i^{in}(t) - r_i^{out} \right) = \delta W_i .$$

Доказательство вытекает непосредственно из формулы (15). □

Отсюда следует, что $\delta W_i = q_i^* - r_i^{out}$.

Пример 7. Пусть сеть задана матрицей (5) и суммарный ресурс $W = T + \delta W_1 = 27{,}2$ в начальном состоянии находится в вершине v_3: $Q(0) = (0, 0, 27{,}2, 0, 0)$. Предельное состояние для этой сети будет $Q^* =$ (12,2, 5, 3,(3), 3,(3), 3,(3)).

$\delta W_1 = 7{,}2$ может быть найдена как сумма разностей двух графиков в дискретных точках (рис. 5):

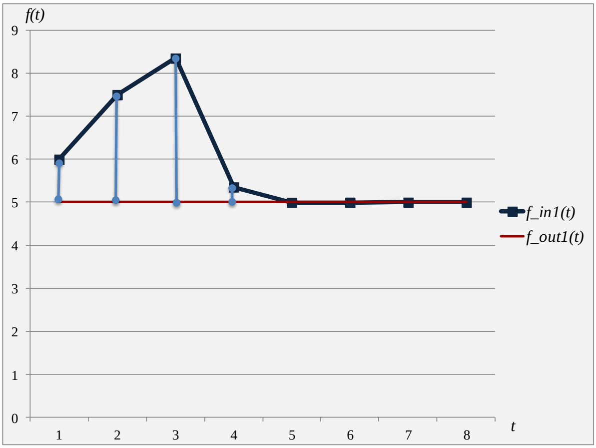

Рис. 5. Разность входящего и исходящего потоков

Из рисунка видно, что вклад в величину δW_i дают только первые несколько тактов функционирования сети.

5. Заключение

В работе исследовано распределение излишков ресурса между несколькими аттракторами в регулярных несимметричных сетях.

Получены результаты, позволяющие находить пропорцию распределения ресурса $W - T$ при определенных начальных состояниях.

Показано, что в общем случае эта пропорция повторяет пропорцию индуцированной поглощающей сети за исключением некоторых аддитивных поправок, названых «поправками на регулярность». Эти поправки оценены сверху. Таким образом, чем больше в сети суммарный ресурс, тем меньше относительная погрешность, с которой может быть вычислено предельное состояние.

Рассмотрены переходные процессы при распределении ресурса, когда происходит смена правил функционирования вершин. Описана динамика изменения ресурса в зависимости от весов исходящих из аттракторов ребер.

Однако задача аналитического нахождения предельного состояния в аттрактивных вершинах при произвольном начальном состоянии не решена. Статья содержит много примеров, чтобы проблема была описана максимально полно, и автор надеется, что то, что не получилось у него, может получиться у проницательного читателя.

Литература

1. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Сходимость и устойчивость в задачах согласования характеристик* (*обзор базовых результатов*) // Управление большими системами. – 2010. – №30.1 «Сетевые модели в управлении». – С. 470–505.
2. ГАНТМАХЕР Ф.Р. *Теория матриц.* – М.: Физматлит. 2004. – 560 с.
3. ЖИЛЯКОВА Л.Ю. *Несимметричные ресурсные сети. III. Исследование предельных состояний* // Автоматика и телемеханика. – 2012. – №7. – С. 67–77.
4. ЖИЛЯКОВА Л.Ю. *Управление предельными состояниями в поглощающих ресурсных сетях* // Проблемы управления. – 2013. – №3. – С. 51–59.
5. КЕМЕНИ ДЖ., СНЕЛЛ ДЖ. *Конечные цепи Маркова*. – М.: Наука, 1970. – 272 с.

6. КУЗНЕЦОВ О.П. *Однородные ресурсные сети. I. Полные графы* // Автоматика и телемеханика. – 2009. – №11. – С. 136–147.
7. ФОРД Л.Р., ФАЛКЕРСОН Д.Р. *Потоки в сетях*. Пер. с англ. – М.: Мир, 1996. – 334 с.
8. AHUJA R.K., MAGNANTI T.L., ORLIN J.B. *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications.* – Prentice Hall, United States, 1993. – 864 p.
9. BAK P. *How Nature Works: The Science of Self-Organized Criticality*. – New York: Copernicus, 1996. – 212 p.
10. BAK P., TANG C., and WIESENFELD K. *Self-organized criticality.* // Physical Review. – 1988. – A 38. – P. 364–374.
11. BJÖRNER A., LOVASZ L. *Chip-firing game on directed graphs* // J. Algebraic Combinatorics. – 1992. – No. 1. – P. 305–328.
12. BLANCHARD PH., VOLCHENKOV D. *Random Walks and Diffusions on Graphs and Databases: An Introduction* (*Springer Series in Synergetics*). – Springer-Verlag – Berlin–Heidelberg, 2011. – 262 p.
13. DHAR D. *Self–organized critical state of sandpile automation models* // Physical Review Letters – 1990. – No. 64. – P. 1613–1616.
14. IVASHKEVICH E.V., PRIEZZHEV V.B. *Introduction to the sandpile model* // Physica. – 1998. – A 254. – P. 97–116.
15. HAJNAL J. *The ergodic properties of non-homogeneous finite Markov chains* // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1956. – Vol. 52. – P. 67–77.
16. HAJNAL J. *Weak ergodicity in non-homogeneous Markov chains* // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1958. – Vol. 54. – P. 233–246.
17. LOVASZ L., WINKLER P. *Mixing of Random Walks and Other Diffusions on a Graph* // Surveys in Combinatorics / Ed. P. Rowlinson. London Math. Soc. Lecture Notes Series 218, Cambridge Univ. Press, 1995. – P. 119–154.
18. PRISNER E. *Parallel Chip Firing on Digraphs* // Complex Systems. – 1994. – No. 8. – P. 367–383.

19. SENETA E. *Non-negative Matrices and Markov Chains.* – Springer, 2006. – 279 p.
20. SPEER E.R. *Asymmetric abelian sandpile models* // Journal of Statistical Physics. – April 1993. – Vol. 71, Issue 1-2. – P. 61–74.

ALLOCATION OF RESOURCE AMONG ATTRACTOR-VERTICES IN NONSYMMETRIC REGULAR RESOURCE NETWORKS

Ludmila Zhilyakova, Institute of Control Sciences of RAS, (Moscow, Profsoyuznaya st., 65), Dr.Sci., Leader Scientist, zhilyakova.ludmila@gmail.com.

We study nonsymmetric regular resource networks with several attractor-vertices. In these networks there exists a threshold value of total resource $W = T$, such that for any initial distribution the limit state is uniquely determined, but when $W > T$ extra resource $\Delta W = W - T$ allocates among attractor-vertices depending on the initial state. We prove that this allocation obeys the same law as the allocation in corresponding absorbing network (*derived from asymmetric by deletion output edges of attractors*)*. However, there are adjustments dependent on the graph characteristics and the initial distribution of resources. The upper bounds of these adjustments are estimated. The initial states are determined that lead to precise limit states with no adjustments.*

Keywords: resource network, graph dynamic threshold model, attractor-vertices, limit state.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии П.Ю. Чеботарев.

Поступила в редакцию 31.08.2015.
Опубликована 31.03.2016.