УДК 519.23/.25 : 510.644.4
ББК 22.17 22.18 22.12

# ОПТИМАЛЬНОЕ КОМПЛЕКСИРОВАНИЕ РЕСУРСОВ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

**Романенко В. А.**[1]
(*Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С.П. Королева* (*национальный исследовательский университет*), *Самара*)

*Рассмотрена задача определения оптимального по критерию экономичности комплекта технологических ресурсов производственной системы при исходных данных, содержащих различные виды неопределенности. Предложены подходы, позволяющие решать задачу в стохастической и нечеткой постановках на базе общедоступного программного обеспечения со сравнительно малыми затратами машинного времени. Результаты решения проиллюстрированы на частном, но практически значимом примере комплексирования средств наземного обслуживания самолетов в узловых аэропортах, не рассмотренном ранее в специальной литературе.*

Ключевые слова: технологические ресурсы, оптимизация, стохастическое программирование, нечеткое программирование, численный вероятностный анализ.

## 1. Описание модельной системы

Рассматриваются технические и организационно-технические системы с протекающими в них технологическими процессами, состоящими в целенаправленном преобразовании некоторых объектов – операндов – под воздействием других объектов – операторов. В рамках системы по функциональному признаку выделяются подсистемы, каждая из которых предна-

[1] *Владимир Алексеевич Романенко, кандидат технических наук, доцент* (*vla_rom@mail.ru*).

значена для выполнения определенной технологической операции и оснащена с этой целью комплектом операторов одного или нескольких типов, имеющих одинаковое назначение. Анализ ограничен классом систем с групповым поступлением операндов. Предполагается, что в систему одновременно поступает несколько операндов, в общем случае относящихся к различным типам. Промежуток времени между поступлением групп операндов достаточно велик для того, чтобы считать процессы преобразования различных групп взаимно независимыми. Успешное преобразование операнда в соответствующей подсистеме возможно при выполнении над ним работ, объем которых зависит от его типа. Для выполнения работ по преобразованию операнда могут привлекаться как один, так и несколько операторов из одного комплекта, причем величины производительности операторов могут различаться в зависимости как от их типа, так и от типа преобразуемого операнда. Преобразование операндов должно выполняться подсистемой за заданное время.

Важной задачей оптимизации рассматриваемых систем, представляющей собой разновидность «задачи о ранце», является оптимальное комплексирование операторов, состоящее в определении таких типов и численности операторов, образующих комплект, которые были бы наилучшими в смысле некоторого критерия, обычно имеющего экономическое содержание, и удовлетворяли бы заданным ограничениям. Подход к решению задачи оптимального комплексирования должен учитывать наличие неопределенности в исходных данных, обусловленной как вариабельностью протекающих в системе процессов, так и недостатком знаний о системе. Процессы поступления операндов в систему и ее подсистемы и преобразования в них операндов могут носить вероятностный характер, обусловленный наличием индивидуальных особенностей процедуры преобразования каждого конкретного операнда, возможностью возникновения случайных отклонений фактических характеристик процессов от нормативных, отказов, появления брака и т.п. Неопределенность исходных данных, вызванная недостаточностью знаний о системе, объясняется тем, что на этапах проектирования новой или совершенствования существующей системы, когда вероятнее всего и будет решаться рассматриваемая оптимизационная задача, необходимые для ее решения характеристики системы еще не будут полностью известны.

Характер неопределенности, присущей данным о системе, диктует требования к выбору способа ее описания и метода решения оптимизационной задачи. Правомерно считать, что наличие статистических выборок достаточного объема, вполне объяснимое на стадии совершенствования существующей системы, позволит рассматривать ее неопределенные характеристики как случайные величины (СВ) с известными функциями распределения, что даст возможность свести задачу комплексирования к задаче стохастического программирования и решить ее соответствующими методами. Однако если накопленная статистика отсутствует, а ее получение невозможно или связано с неприемлемыми затратами ресурсов, что характерно в первую очередь для этапа проектирования новой системы, то единственным способом определения значений параметров системы становится экспертное оценивание. В этом случае разброс мнений экспертов, их представления о стохастичности оцениваемого параметра могут найти отражение в выбранной форме представления неопределенной характеристики, которая может рассматриваться как нечеткая величина (НВ) с экспертно заданной функцией принадлежности. При этом задача комплексирования может быть решена методами нечеткого программирования.

В рассматриваемой системе предполагаются неопределенными как характеристики операндов, такие как их численность в составе группы и потребный объем работ по преобразованию операнда каждого типа, так и – операторов: производительность операторов при выполнении работ по преобразованию операндов, издержки на приобретение операторов различных типов, их содержание, эксплуатацию и т.п.

Ниже рассмотрены подходы к решению задачи оптимального комплексирования в условиях как нечеткой, так и стохастической неопределенности. В качестве критерия оптимальности выбран максимум показателя, отражающего уровень экономичности создаваемой или трансформируемой системы. Ограничения накладываются на величину объема работ, обеспечиваемого комплектом операторов в течение заданного промежутка времени, которая должны быть не меньше величины объема работ, необходимой для преобразования операндов, поступивших в систему в составе группы.

## 2. Общая постановка задачи оптимального комплексирования

Оптимизационные задачи комплексирования ресурсов производственных систем, сводимые к задачам математического программирования с учетом неопределенных факторов, были впервые сформулированы и решены в работе [3] применительно к строительным механизмам. В отличие от [3] и других работ, где неопределенность учитывалась только в вероятностной форме либо не принималась во внимание [12], здесь задача оптимального комплексирования формулируется в двух постановках, одна из которых соответствует условиям наличия стохастических, другая нечетких исходных данных. Ограничимся поиском детерминированных решений, поскольку интерпретация и практическое использование нечетких или вероятностных результатов при проектировании или совершенствовании производственных систем может представлять известную сложность.

Предварительно рассмотрим детерминированную постановку задачи оптимального комплексирования, введя следующие обозначения:

$\psi$ – число типов операторов, имеющихся в подсистеме либо доступных для приобретения и использования;

$\xi$ – число типов операндов, которые могут поступить подсистему в составе группы;

$i, j$ – номер типа операторов и операндов соответственно, $i = 1, \ldots, \psi$; $j = 1, \ldots, \xi$;

$\tau_j$ – расчетная продолжительность пребывания операнда $j$-го типа в подсистеме, $j = 1, \ldots, \xi$;

$K_j$ – численность операндов $j$-го типа, поступающих в подсистему в составе группы, $j = 1, \ldots, \xi$;

$Q_j$ – объем работ по преобразованию операнда $j$-го типа, $j = 1, \ldots, \xi$;

$R_{ij}$ – производительность оператора $i$-го типа при обработке операнда $j$-го типа, заданная с учетом затрат времени на подготовительно-заключительные операции, $i = 1, \ldots, \psi$, $j = 1, \ldots, \xi$;

$Z_i$ – приведенные годовые затраты на приобретение, содержание и эксплуатацию операторов $i$-го типа, оплату труда их обслуживающего персонала, $i = 1, \ldots, \psi$;

$s_{ij}$ – численность операторов $i$-го типа, используемых при преобразовании операндов $j$-го типа, $i = 1, \ldots, \psi$, $j = 1, \ldots, \xi$;

$s_i$ – общее число операторов $i$-го типа, $i = 1, \ldots, \psi$.

Допуская возможность одновременного участия разнотипных операторов в преобразовании однотипных операндов, правомерно рассматривать величины $s_{ij}$, $i = 1, \ldots, \psi$, $j \in \{1, \ldots, \xi\}$, в качестве характеристик степени участия операторов того или иного типа в обработке операндов $j$-го типа. Подобная трактовка позволяет допустить возможность принятия величинами $s_{ij}$ дробных значений. Однако очевидно, что общее число ресурсов любого типа, имеющееся в распоряжении подсистемы, может быть только целым. Обозначив $\lceil \cdot \rceil$ математический оператор округления до ближайшего большего целого числа, выражение для определения $s_i$ запишем как

$$s_i = \left\lceil \sum_j s_{ij} \right\rceil, \quad i = 1, \ldots, \psi .$$

В качестве критерия рассматриваемой оптимизационной задачи принят минимум суммарных приведенных годовых затрат:

$$(1) \quad Z = \sum_i s_i Z_i = \sum_i \left\lceil \sum_j s_{ij} \right\rceil Z_i \xrightarrow[\substack{s_{ij},\\ i=1,\ldots,\psi,\\ j=1,\ldots,\xi}]{} \min .$$

Для выполнения в срок работ по обработке операндов необходимо, чтобы суммарный объем работ $Q^{\Pi}{}_j$, требуемый для преобразования всех одновременно поступающих в подсистему операндов рассматриваемого ($j$-го) типа, не превосходил суммарного (располагаемого) объема работ $Q^{\text{P}}{}_j$, который способны произвести в течение расчетного времени $\tau_j$ все операторы, выделяемые для преобразования операндов данного типа. Указанное ограничение записывается для каждого типа операндов в виде неравенства:

(2) $Q_j^{\Pi} \le Q_j^{\text{P}}, \quad j = 1,..., \xi$ .

Выражения для определения $Q^{\Pi}{}_{\mathrm{j}}$ и $Q^{\text{P}}{}_j$ с использованием введенных выше обозначений записываются в виде

(3) $Q_j^{\Pi} = Q_j K_j, \qquad Q_j^{\text{P}} = \sum_i R_{ij} \tau_j s_{ij}$ .

Таким образом, оптимизационная задача состоит в определении таких значений $s_{ij}$ численности операторов, которые для заданного набора параметров подсистемы, включающего $\tau_j$, $K_j$, $Q_j$, $R_{ij}$, $Z_i$ ($i$ = 1, …, $\psi$, $j$ = 1, …, $\xi$), обеспечивали бы минимальную сумму приведенных годовых затрат $Z$ (1) и удовлетворяли бы ограничениям по объему работ (2), (3).

Задача (1)–(3), в детерминированной постановке вполне математически определенная, при замене детерминированных параметров целевой функции и ограничений на случайные либо нечеткие величины перестает быть определенной. В этом случае ее постановку (1)–(3) можно рассматривать лишь как условную, поскольку наличие неопределенных величин в выражении критерия (1) приводит к бесконечному числу целевых функций, а ограничения (2), (3) не порождают какого либо детерминированного множества возможных значений. Такого рода задачи требуют применения специальных подходов для придания определенности их постановкам.

При описании стохастической и нечеткой задач комплексирования в обозначениях неопределенных величин используем прописные буквы. При этом, чтобы различать случайные и нечеткие величины, обозначение последних дополним надстрочным знаком «тильда». В стохастической постановке величины $K_j$, $Q_j$, $R_{ij}$ и $Z_i$ будем считать случайными с заданными для всех $i$ = 1, …, $\psi$, $j$ = 1, …, $\xi$ функциями распределения $F_{K_j}(k)$, $F_{Q_j}(q)$, $F_{R_{ij}}(r)$ и $F_{Z_j}(z)$ соответственно. В нечеткой постановке аналогами СВ $K_j$, $Q_j$, $R_{ij}$ и $Z_i$ выступают НВ $\tilde{K}_j$, $\tilde{Q}_j$, $\tilde{R}_{ij}$ и $\tilde{Z}_i$, функции принадлежности которых, соответственно $\mu_{\tilde{K}_j}(K_j)$,

$\mu_{\tilde{Q}_j}(Q_j)$, $\mu_{\tilde{R}_{ij}}(R)$ и $\mu_{\tilde{Z}_i}(Z_i)$, также предполагаются заданными для всех $i = 1, \ldots, \psi$, $j = 1, \ldots, \xi$.

## 3. Подход к решению стохастической задачи оптимального комплексирования

Рассматриваемая задача относится к классу задач стохастического программирования, первые работы по которому появились в середине 50-х гг. XX века. Подробный исторический обзор состояния исследований и обобщение результатов, достигнутых в данной отрасли за 20 лет ее наиболее бурного развития, дан в [13]. Сводка современных постановок и подходов к решению задач математического программирования с учетом неопределенностей различного характера, в том числе стохастического, приведена в [9].

Среди значительного числа разработанных корректных постановок стохастических задач выделим две, к которым могут быть сведены формулировки большого числа разнообразных задач со случайными параметрами в составе целевой функции и ограничений [13]. Первая предполагает усреднение стохастических параметров условий задачи и использование вместо СВ их математических ожиданий. Данный подход, при его простоте, не всегда оправдан, так как решение задачи с усредненными параметрами может не удовлетворять условиям задачи при различных реализациях стохастических параметров. Вторая постановка, не связанная с указанной опасностью, предусматривает использование величин вероятности выполнения ограничений, которые не должны принимать значения ниже заданного доверительного уровня. Для различных ограничений, в зависимости от величины ущерба, наносимого их невыполнением, могут задаваться различные доверительные уровни. При этом в качестве целевой функции выбирается математическое ожидание исходной целевой функции или вероятность превышения исходной целевой функцией некоторого заданного доверительного уровня. Решение задачи в указанной постановке сопряжено с необходимостью трудоемкого определения вероятностных распределений одних СВ по заданным распределениям других СВ, что является недостатком данного подхода. Комбинируя оба подхода, сформулируем стохастическую задачу комплексирования следующим образом, допускающим ее решение известными методами нелинейного программирования:

$$(4)\quad \bar{Z} = M[Z] = \sum_i s_i \cdot M[Z_i] = \sum_i \left[\sum_j s_{ij}\right] \cdot M[Z_i] \xrightarrow[\substack{s_{ij},\\ i=1,\ldots,\psi,\\ j=1,\ldots,\xi}]{} \min,$$

$$(5)\quad p\left(Q_j^{\Pi} \le Q_j^{\mathrm{P}}\right) \ge \rho_j, \quad j = 1,\ldots,\xi,$$

где $M[\cdot]$ – оператор математического ожидания; $p(Q^{\Pi}_j \le Q^{\mathrm{P}}_j)$ – фактическая вероятность выполнения условия $Q^{\Pi}_j \le Q^{\mathrm{P}}_j$; $\rho_j$ – заданная вероятность (надежность) выполнения указанного условия, определяемая ЛПР или устанавливаемая соответствующей нормативной документацией, $j = 1, \ldots, \xi$.

Расчет величин $p(Q^{\Pi}_j \le Q^{\mathrm{P}}_j)$, $j = 1, \ldots, \xi$, предполагает наличие известных вероятностных распределений СВ $Q^{\Pi}_j$ и $Q^{\mathrm{P}}_j$, которые предварительно должны быть определены по функциям $F_{K_j}(k)$, $F_{Q_j}(q)$, $F_{R_{ij}}(r)$, заданным для всех $i = 1, \ldots, \psi$ и $j = 1, \ldots, \xi$. Традиционно при решении задач стохастического программирования для формирования вероятностных распределений СВ [9, 13] используется метод стохастического имитационного моделирования, который в рассматриваемом случае позволяет определять вероятности $p(Q^{\Pi}_j \le Q^{\mathrm{P}}_j)$. Начиная с 1990-х годов [4], и особенно в последнее время [6, 7, 15], распространение получили методы численного вероятностного анализа (ЧВА), представляющие в определенных случаях альтернативу имитационному моделированию, которая позволяет существенно сократить объем вычислений, сохранив их точность.

ЧВА – раздел вычислительной математики, предметом которого является решение задач со стохастическими неопределенностями в данных с использованием численных операций над плотностями и функциями распределения СВ и их функций. Рассматриваются системы случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_M)$ и функциональные зависимости вида $Y = g(X_1, X_2, \ldots, X_M)$, где $X_1, X_2, \ldots, X_M$ – независимые СВ, которые представляются не обычным образом – посредством своих плотностей $f_{X_1}(x_1)$,

$f_{X_2}(x_2)$, …, $f_{X_M}(x_M)$ или функций $F_{X_1}(x_1)$, $F_{X_2}(x_2)$, …, $F_{X_M}(x_M)$ распределения, а с помощью гистограмм. Вводится понятие гистограммной СВ, которой называется СВ $X$ с плотностью распределения, заданной гистограммой – кусочно-постоянной функцией $f'_X(x)$, определяемой множеством $\{x_k : x_k \in R,\ k = 0, \ldots, K\}$, элементы которого подчиняются условию $x_{k-1} < x_k$, $k = 1, \ldots, K$. На полуинтервале $[x_{k-1}, x_k)$ гистограмма принимает постоянное значение $f'_{X\,k}$, которое представляет собой усредненное на $[x_{k-1}, x_k)$ значение плотности вероятности $f_X(x)$ и связано с $f_X(x)$ и $F_X(x)$ соотношением

$$f'_{X\,k} = \frac{\int_{x_{k-1}}^{x_k} f_X(x)dx}{x_k - x_{k-1}} = \frac{F_X(x_k) - F_X(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

Ставится задача определения в гистограммной форме СВ $Y$ на множестве $\{y_l : y_l \in R,\ l = 0, \ldots, L\}$ с элементами, подчиняющимися условию $y_{l-1} < y_l$, $l = 1, \ldots, L$.

Усредненное на полуинтервале $[y_{l-1}, y_l)$ значение плотности вероятности СВ $Y$ определяется как

$$f'_{Y\,l} = \frac{p(y_{l-1} \le Y < y_l)}{y_l - y_{l-1}},$$

где $p(y_{l-1} \le Y < y_l)$ – вероятность попадания СВ $Y$ на $[y_{l-1}, y_l)$. Если $X_1, X_2, \ldots, X_M$ независимы, то эта вероятность приближенно определяется в результате численного вычисления следующего интеграла:

$$p(y_{l-1} \le Y < y_l) = \int\limits_{\Omega_l}\ldots\int f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \ldots f_{X_M}(x_M) dx_1 dx_2 \ldots dx_M,$$

где $\Omega_l = \{(x_1, x_2, \ldots, x_M) : y_{l-1} \le g(x_1, x_2, \ldots, x_M) < y_l\}$. При этом вместо $f_{X\,m}$ используются гистограммно заданные усредненные плотности $f'_{X\,m}$, $m = 1, \ldots, M$.

Для системы независимых СВ $(X, Y)$ вероятность $p(X < Y)$ того, что одна СВ $(Y)$ превосходит другую $(X)$, приближенно рассчитывается как повторный интеграл вида [2]

$$(6)\quad p(X<Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{x}^{\infty}f_X(x)f_Y(y)dy\right)dx$$

с использованием вместо $f_X(x)$ и $f_Y(x)$ гистограммно заданных усредненных плотностей $f'_X(x)$ и $f'_Y(x)$ СВ $X$ и $Y$ соответственно.

При решении задачи стохастического комплексирования (4), (5) на каждом шаге оптимизационного алгоритма с помощью аналитических соотношений (3) путем выполнения последовательности операций гистограммного суммирования и перемножения определяются вероятностные распределения величин $Q^{\Pi}_j$ и $Q^{\mathrm{P}}_j$. После чего, также гистограммно, с использованием формулы (6) определяются величины $p(Q^{\Pi}_j \le Q^{\mathrm{P}}_j)$, $j = 1, \ldots, \xi$.

Количественная оценка сокращения числа вычислительных операций благодаря использованию методов ЧВА вместо метода Монте-Карло выполнена в [7]. Если погрешность, с которой гистограмма $f'_Y(y)$ аппроксимирует плотность вероятности $f_Y(y)$ либо с которой численно определяется вероятность $p(X < Y)$, не должна превышать величины $\varepsilon$, то, как показано в [7], необходимое число операций гистограммной арифметики оценивается как $O(\varepsilon^{-1})$. Аналогичные по точности оценки указанных вероятностных характеристик, достигаемые на базе метода Монте-Карло, требуют выполнения порядка $O(\varepsilon^{-2})$ операций. Таким образом, при решении рассматриваемой оптимизационной задачи, когда необходимо обеспечить погрешность вычислений на уровне $10^{-2}$–$10^{-3}$, использование методов ЧВА обеспечивает сокращение числа операций в 100–1000 раз по сравнению с методом Монте-Карло. Данный вывод подтверждается результатами серии вычислительных экспериментов по гистограммному определению плотности $f_Y(y)$ для $Y = X_1 + X_2$ или $Y = X_1 \times X_2$, свидетельствующими о том, что при количестве полуинтервалов построения гистограммы $K = 30$ погрешность не превышает 0,002, а число выполненных арифметических операций определяется величиной порядка $30^2$. Для получения аналогичной точности методом Монте-Карло при тех же исходных данных требуется около $10^6$ повторов.

## 4. Подход к решению нечеткой задачи оптимального комплексирования

За время, прошедшее с момента публикации в начале 70-х годов XX века первых работ по нечеткому математическому программированию [16, 17], предложено значительное число способов, позволяющих избежать некорректности постановок, подобных (1)–(3) с нечеткими параметрами $\tilde{K}_j$, $\tilde{Q}_j$, $\tilde{R}_{ij}$ и $\tilde{Z}_i$ и свести нечеткую задачу к детерминированной задаче математического программирования. Обзоры таких способов приводятся, например, в [9, 10]. Ограничимся здесь перечислением некоторых подходов, позволяющих получить решение задачи с нечеткими целевой функцией и ограничениями, не содержащее неопределенности. В [9] такое решение достигается благодаря применению дефаззификации нечетких параметров целевой функции и ограничений, которая в данном случае играет роль, аналогичную рассмотренному выше усреднению СВ, применяемому при решении стохастических задач. В качестве аналога другого рассмотренного выше для стохастических задач подхода, состоящего в задании доверительных вероятностей выполнения ограничений, следует рассматривать описанный там же, в [9], подход, предусматривающий формулировку ограничений в терминах возможности их достижения. В рамках этого подхода в применении к рассматриваемой задаче запись ограничений (2) принимает вид

(7) $$Pos(\tilde{Q}_j^{П} \le \tilde{Q}_j^{P}) \ge \beta_j, \quad j = 1,\dots,\xi,$$

где $Pos(\tilde{Q}_j^{П} \le \tilde{Q}_j^{P})$ – возможность выполнения нечеткого ограничения $\tilde{Q}_j^{П} \le \tilde{Q}_j^{P}$; $\beta_j$ – заданный доверительный уровень выполнения ограничения, $j = 1, \dots, \xi$. В [14] описан подход, предполагающий дефаззификацию целевой функции и приведение ограничений к четкой алгебраической форме ценой двукратного увеличения их числа. В [5] для решения задач нечеткого программирования предлагается использовать теоретико-вероятностный метод сравнения НВ, предусматривающий введение количественного параметра, с которым можно обращаться как с вероятностью того, что одна из НВ не превосходит другую. Подходом предполагается приведение ограничений (2) к следующему виду, сходному с (5):

(8) $p(\tilde{Q}_j^{П} \le \tilde{Q}_j^{P}) \ge \rho'_j, \quad j = 1,\ldots,\xi,$

где $p(\tilde{Q}_j^{П} \le \tilde{Q}_j^{P})$ – вероятность выполнения нечеткого ограничения $\tilde{Q}_j^{П} \le \tilde{Q}_j^{P}$; $\rho'_j$ – заданная доверительная вероятность (надежность) выполнения нечеткого ограничения $\tilde{Q}_j^{П} \le \tilde{Q}_j^{P}$, $j = 1, \ldots, \xi$. Указанный подход, наряду с интуитивной ясностью, обладает рядом достоинств, выгодно отличающих его от других описанных выше подходов. Так, он не требует увеличения числа ограничений. Его использование не затруднено неясностью в отношении назначения возможностной величины доверительных уровней $\beta_j$ для ограничений в форме (7). Замена возможностной меры вероятностной, не снимая полностью указанной проблемы, делает ее менее острой, что объясняется, во-первых, большей подготовленностью и «нацеленностью» ЛПР на работу с понятием вероятности, и, во-вторых, наличием нормативной документации, задающей именно в вероятностной, а не в нечеткой, форме требования к уровню надежности проектируемых систем. Данные этой документации (при ее наличии) могут служить основой при назначения величин $\rho'_j$. При этом, однако, следует помнить, что вероятности $\rho'_j$ и $\rho_j$, очевидно, не могут рассматриваться как полностью равнозначные величины, поскольку применяются они в отношении к различным типам неопределенности. Тем не менее, принимая во внимание преимущества подхода, используем его для решения задачи комплексирования.

Кратко остановимся на сравнении НВ, предполагающем вычисление вероятности того, что одна НВ превосходит другую. Рассмотрим использованную при решении задачи комплексирования методику, несколько упрощенную по сравнению с предложенной в [5]. Пусть $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ – определенные на некотором универсальном множестве $\theta$ нечеткие величины *L*-*R*-типа с выпуклыми функциями принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(t)$ и $\mu_{\tilde{B}}(t)$ (где $t \in \theta$)

соответственно, а $A_\alpha = \{t : \mu_{\tilde{A}}(t) \ge \alpha\}$ и $B_\alpha = \{t : \mu_{\tilde{B}}(t) \ge \alpha\}$ (где $\alpha \in [0, 1]$) – множества $\alpha$-уровня $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ соответственно. Задача сравнения НВ сводится к поуровневому сравнению четких отрезков, представленных на соответствующих $\alpha$-уровнях. Вероятность $p_\alpha(B_\alpha > A_\alpha)$, с которой отрезок $B_\alpha$ больше отрезка $A_\alpha$, для каждого $\alpha$-уровня вычисляется способом, описанным ниже. Множество вероятностей $p_\alpha$, $\alpha \in [0, 1]$, трактуется как нечеткое подмножество

$$\tilde{P}\left(\tilde{B} > \tilde{A}\right) = \left\{\alpha / p_\alpha\left(B_\alpha > A_\alpha\right)\right\},$$

где $\alpha$ рассматривается как степень принадлежности $p_\alpha(B_\alpha > A_\alpha)$ к НВ $\tilde{P}(\tilde{B} > \tilde{A})$.

Для преобразования НВ $\tilde{P}(\tilde{B} > \tilde{A})$ в четкую $p(\tilde{B} > \tilde{A})$ (дефазификации) в [5] предложено использовать выражение, широко применяемое при решении подобного рода задач:

$$p\left(\tilde{B} > \tilde{A}\right) = \frac{\sum_\alpha \alpha \cdot p_\alpha\left(B_\alpha > A_\alpha\right)}{\sum_\alpha \alpha}. \quad (9)$$

Задача сравнения отрезков $A_\alpha$, $B_\alpha$ формулируется как задача определения вероятности $p_\alpha(B_\alpha > A_\alpha)$, трактуемой как вероятность того, что случайная точка $B$ из отрезка $B_\alpha$ будет больше случайной точки $A$ из отрезка $A_\alpha$, при этом независимые отрезки $A_\alpha = [a^L_\alpha, a^R_\alpha]$ и $B_\alpha = [b^L_\alpha, b^R_\alpha]$ рассматриваются как отрезки равномерно распределенных СВ $A \in [a^L_\alpha, a^R_\alpha]$ и $B \in [b^L_\alpha, b^R_\alpha]$, соответственно. Если сравниваемые отрезки не имеют общих областей, то решение задачи их сравнения является очевидным. Если же имеет место наложение отрезков, то все его варианты легко сводятся к двум нетривиальным случаям, представленным на рис. 1.

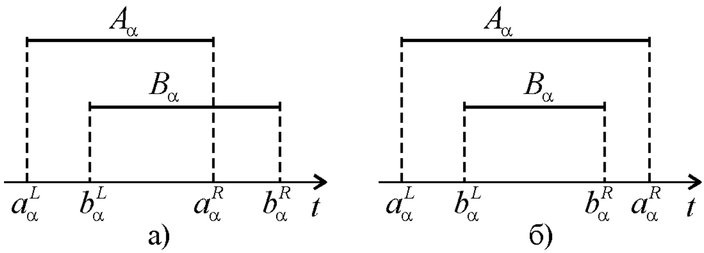


*Рис. 1. Пересечение* (*а*) *и поглощение* (*б*) *отрезков*

Как показано в [11], искомые вероятности $p_\alpha(B_\alpha > A_\alpha)$ определяются в случае пересечения отрезков по формуле

$$(10)\quad p_\alpha\left(B_\alpha > A_\alpha\right) = 1 - \frac{\left(a_\alpha^R - b_\alpha^R\right)^2}{2\left(a_\alpha^R - a_\alpha^L\right)\left(b_\alpha^R - b_\alpha^L\right)},$$

а в случае их поглощения – по формуле

$$(11)\quad p_\alpha\left(B_\alpha > A_\alpha\right) = \frac{b_\alpha^R + b_\alpha^L - 2a_\alpha^L}{2\left(a_\alpha^R - a_\alpha^L\right)}.$$

На базе (9)–(11) вычисляются величины $p(\tilde{Q}_j^{\Pi} \le \tilde{Q}_j^{P})$, $j = 1, \ldots, \xi$, участвующие в задании ограничений (8) нечеткой задачи комплексирования. Для вычисления используется набор $\alpha$-уровней, включающий $N$ значений $\alpha$, определяемых разбиением отрезка [0, 1] на $(N-1)$ равных частей. Тестовые расчеты показали, что вычислительная устойчивость и результативность оптимизационного алгоритма обеспечивается при $N \approx 10$–15.

Целевая функция задачи $Z^d$ определяется путем дефаззификации по методу центра тяжести входящих в ее выражение НВ $\tilde{Z}_i$, $i = 1, \ldots, \psi$. В этом случае запись критерия принимает вид:

$$(12)\quad Z^d = \sum_i s_i Z_i^d = \sum_i \left[\sum_j s_{ij}\right] Z_i^d \xrightarrow[\substack{s_{ij},\\ i=1,\ldots,\psi,\\ j=1,\ldots,\xi}]{} \min,$$

где «$d$» – индекс, означающий дефаззифицированное значение НВ.

Таким образом, нечеткая задача оптимального комплексирования сводится к задаче в четкой постановке с критерием (12) и ограничениями (8), решаемой известными методами математического программирования.

## 5. Модельный пример. Анализ результатов

Характерным примером систем, для которых решение рассматриваемой задачи представляет несомненную ценность, может служить компонент системы обслуживания перевозок узлового аэропорта (хаба) – подсистема, предназначенная для выполнения отдельной технологической операции, в которой роль операндов играют обслуживаемые воздушные суда (ВС) и их загрузка, а операторов – соответствующие технологические ресурсы аэропорта, под которыми понимаются аэропортовые средства механизации и автоматизации, производственное оборудование, персонал и т.д. Особенностью расписания хаба является существенно нестационарный характер потока прибывающих на обслуживание ВС, проявляющийся в периодическом повторении кратких промежутков времени с большим числом почти одновременно поступающих ВС, за которыми следуют длительные паузы со значительно меньшим их количеством. Предназначенные для выполнения выбранной операции аэропортовые средства одного типа могут использоваться для обслуживания ВС различных типов, при этом производительность средства зависит не только от его типа, но и от типа обслуживаемого ВС. Временные затраты на операцию лимитированы, что особенно характерно для хаба, где любое значительное отклонение от графика чревато разрушением системы стыковок рейсов. Неизбежные отклонения от расписания и технологических графиков обслуживания ВС, а также присущая этапу проектирования или совершенствования рассматриваемой подсистемы неполнота данных служат источником неопределенности в характеристиках процессов поступления в хаб ВС и их наземного обслуживания. На этапе проектирования состава подсистемы, например, при переходе действующего аэропорта к работе по схеме хаба, когда конкретные типы средств еще не выбраны, их стоимостные и эксплуатационные характеристики не являются определенными. Такие факторы, как широкое разнообразие марок аэропортовой техники одинакового назначения, большое число предприятий, занимающихся ее выпуском и продажей, возможность приобретения техники как на первичном, так и на вторичном рынках, определяют значительный разброс как стоимостных, так и эксплуатационных характеристик операторов. Таким образом, задание в стохастической или нечеткой формах исходных данных для решения задачи комплексирования средств наземного обслуживания хаба представляется вполне правомерным. Для аэропортовых систем общие принципы решения задач оптимизации состава и численности средств без учета влияния вероятностных факторов как задач математического программирования изложены в монографии [12]. Однако к настоящему времени отсутствуют работы по решению в стохастической либо нечеткой постановке задач оптимального комплексирования средств в системе наземного обслуживания такого перспективного класса аэропортов, как хабы с их ярко выраженными специфическими чертами.

Будем в рамках примера считать, что обработка накопленной в процессе функционирования аэропорта статистики обеспечивает получение вероятностных распределений, необходимых для решения задачи комплексирования в стохастической постановке. Примем, что используемые в примере СВ подчинены распределению равнобедренного треугольника (Симпсона). Связь между параметрами распределения устанавливается посредством коэффициента вариации $v_X$ с помощью известных формул [1]:

$$X^L = X^M\left(1-\sqrt{6}\cdot v_X\right), \quad X^R = X^M\left(1+\sqrt{6}\cdot v_X\right),$$

где $X^L$, $X^R$ – соответственно левая и правая границы области возможных значений СВ $X$; $X^M$ – модальное значение СВ $X$, совпадающее с математическим ожиданием $M[X]$.

Чтобы иметь возможность сравнить результаты решения задачи комплексирования в стохастической и нечеткой постановках, используем в исходных данных «нечеткой» задачи функции принадлежности нечетких величин, сформированные на основе распределений их вероятностных аналогов. Используем известный прием [5], согласно которому функция принадлежности $\mu_{\tilde{X}}(x)$ нечеткой величины $\tilde{X}$ определяется на основе заданной плотности распределения $f_X(x)$ соответствующей случайной величины $X$ как

$$\mu_{\tilde{X}}(x) = \frac{f_X(x)}{\max\limits_x f_X(x)}.$$

Решение задачи комплексирования в обеих постановках рассмотрено на примере одной из ключевых функциональных подсистем аэропорта, отвечающей за выполнение операции заправки ВС авиатопливом. Операторами подсистемы являются авиатопливозаправщики (АТЗ), представляющие собой мобильные средства заправки ВС авиационным топливом. Пусть для приобретения и использования хабом доступны АТЗ четырех типов. Модальные значения приведенных годовых затрат на АТЗ по типам в некоторых относительных единицах приняты равными $Z^M{}_1 = 1{,}0$, $Z^M{}_2 = 1{,}5$, $Z^M{}_3 = 2{,}0$, $Z^M{}_4 = 3{,}3$. Коэффициент вариации одинаков для всех типов АТЗ и равен $v_Z = 0{,}25$.

Предполагается, что в хаб в промежутки максимальной интенсивности движения ВС могут прибывать ВС семи типов, при этом малая продолжительность промежутков позволяет принять допущение о групповом характере их поступления. В таблице 1 приведены численности ВС $K_j$ в составе группы, принятые в рамках примера фиксированными величинами, и модальные значения объемов авиатоплива, потребных для заправки ВС $Q^M{}_j$ по типам, $j = 1, \ldots, 7$. Коэффициент вариации объемов заправки предполагается одинаковым для всех типов ВС, равным $v_Q = 0{,}25$.

*Таблица 1. Характеристики потока ВС*

| $j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $K_j$ | 1 | 3 | 6 | 3 | 4 | 1 | 1 |
| $Q^M{}_j$, м$^3$ | 5,0 | 6,0 | 8,0 | 1,1 | 1,6 | 42,0 | 51,0 |

Рассмотрены два набора («А» и «Б») значений расчетной продолжительности стоянки ВС на заправке, первый из которых соответствует более жестким требованиям к системе наземного обслуживания хаба по затратам времени на заправку.

Набор «А»: $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 15$ мин., $\tau_4 = \tau_5 = 20$ мин., $\tau_6 = \tau_7 = 25$ мин.

Набор «Б»: $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 25$ мин., $\tau_4 = \tau_5 = 30$ мин., $\tau_6 = \tau_7 = 35$ мин.

Модальные значения производительности АТЗ $i$-го типа при заправке ВС $j$-го типа $R^M_{ij}$ представлены в таблице 2.

Так как на величинах производительности АТЗ отражаются затраты времени на подготовительно-заключительные операции, включающие в данном случае возможные временные потери на наполнение емкостей АТЗ на заправочных пунктах, передвижение АТЗ по перрону, приведение их в рабочее либо транспортное положение у ВС и т.п., которые в свою очередь зависят от технологических схем выполнения заправки, принятых в конкретном аэропорту, его планировки и других факторов, то для разных аэропортов распределения производительности заправки одинаковых типов ВС однотипными АТЗ справедливо считать различными. Следуя данным соображениям, получим решение задачи для различных значений коэффициента вариации производительности АТЗ. Примем, что набору «А» соответствует меньший разброс производительности АТЗ, при котором $v_{Rij} = v_R = 0{,}15$, $i = 1, \ldots, 4$, $j = 1, \ldots, 7$. Набору «Б» поставим в соответствие значение $v_R = 0{,}25$, также одинаковое для всех $(i, j)$.

*Таблица 2. Производительность ресурсов, $R^M_{ij}$, м$^3$/мин.*

| $i$ \ $j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,32 | 0,34 | 0,40 | 0,40 | 0,45 | 0,45 | 0,45 |
| 2 | 0,48 | 0,50 | 0,70 | 0,64 | 0,70 | 0,70 | 0,70 |
| 3 | 0,49 | 0,55 | 0,71 | 0,65 | 0,72 | 0,72 | 0,72 |
| 4 | 0,90 | 0,85 | 1,40 | 1,40 | 1,50 | 1,60 | 1,60 |

Решение задачи в обеих постановках получено с помощью надстройки «Поиск решения» табличного процессора Microsoft Excel. Количество полуинтервалов построения гистограмм СВ, входящих в наборы исходных данных, принято равным $K = 30$. Такая величина обеспечивает достаточно низкую (на уровне 0,001–0,002) погрешность гистограммных результатов. Число

$\alpha$-уровней в соответствии с приведенными выше рекомендациями задано равным $N = 15$, что гарантирует работоспособность алгоритма нечеткой оптимизации.

Результаты решения задачи комплексирования для описанных выше исходных данных представлены в таблицах 3, 4 и на рис. 2. Таблица 3 содержит значения оптимальной численности $s_i^{opt}$ по типам АТЗ ($i = 1, \ldots, 4$), полученные для набора исходных данных «А» в результате решения задачи во всех трех сформулированных выше постановках, обозначенных следующим образом: «Д» – детерминированная постановка (1)–(3), в которой все неопределенные величины заменены их модальными значениями, «В» – вероятностная (4), (5); «Н» – нечеткая (8), (12). В двух последних постановках надежности выполнения всех ограничений принимались одинаковыми, равными $\rho_j = \rho$ и $\rho'_j = \rho'$, $j = 1, \ldots, 7$. В таблице 4 приводятся значения аналогичных величин, полученные для набора «Б».

*Таблица 3. Результаты оптимизации. Набор «А».*

| Постановка задачи | Д | В | Н | В | Н | В | Н | В | Н | В | Н |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\rho, \rho'$ | – | 0,60 | | 0,80 | | 0,90 | | 0,95 | | 0,99 | |
| $s_1^{opt}$ | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 8 | 11 | 9 | 14 | 8 |
| $s_2^{opt}$ | 11 | 10 | 10 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 12 | 12 | 14 |
| $s_3^{opt}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $s_4^{opt}$ | 3 | 4 | 3 | 5 | 4 | 5 | 4 | 5 | 4 | 5 | 5 |

*Таблица 4. Результаты оптимизации. Набор «Б».*

| Постановка задачи | Д | В | Н | В | Н | В | Н | В | Н | В | Н |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\rho, \rho'$ | – | 0,60 | | 0,80 | | 0,90 | | 0,95 | | 0,99 | |
| $s_1^{opt}$ | 3 | 3 | 3 | 7 | 3 | 8 | 5 | 9 | 6 | 9 | 5 |
| $s_2^{opt}$ | 7 | 7 | 8 | 7 | 8 | 7 | 8 | 7 | 9 | 9 | 9 |
| $s_3^{opt}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 |
| $s_4^{opt}$ | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 |

Как отмечалось выше, интенсивность потоков ВС, поступающих на обслуживание в подсистемы хаба, может в течение кратких временных промежутков достигать весьма значительного уровня. Тем не менее, одновременность поступления операндов, принятая в качестве допущения, в хабе фактически не реализуется. Поэтому оптимальное число АТЗ, полученное с учетом предположения о групповом поступлении ВС, следует рассматривать как гарантированно достаточное, с некоторым запасом обеспечивающее выполнение заданных ограничений.

Рис. 2 иллюстрирует зависимости выраженных в относительных единицах оптимальных значений целевых функций $\overline{Z}^{opt}$ и $Z^{d\,opt}$, определенных для двух наборов исходных данных («А» и «Б») задачи в стохастической и нечеткой постановках, от величин заданной надежности выполнения ограничения на объем заправляемого топлива. Для сравнения отмечены оптимальные уровни целевой функции $Z^{opt}$ задачи в детерминированной постановке.

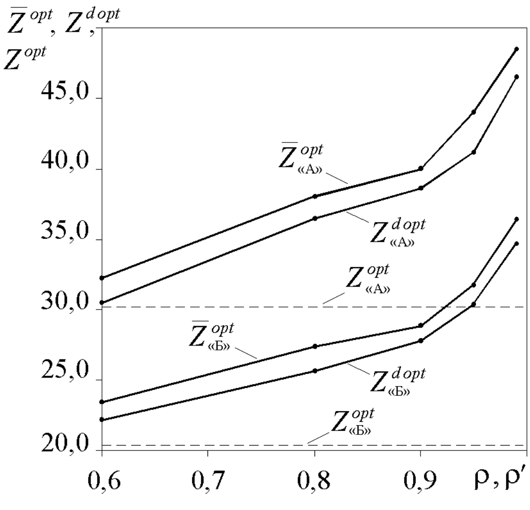


*Рис. 2. Результаты оптимизации*

Результаты решения оптимизационной задачи, полученные с учетом неопределенности, существенно отличаются от результатов задачи в детерминированной постановке. С ростом уровня требований, предъявляемых к надежности выполнения ограничений, оптимальная численность средств заправки ВС заметно возрастает. Так, минимальная величина суммарных затрат, полученная с учетом неопределенности для высоких ($\rho = \rho' \geq 0{,}9$) уровней надежности, на 30–80% выше аналогичной величины, найденной при детерминированных исходных данных. Приведенные результаты свидетельствуют о необходимости учета неопределенности при решении задачи оптимизации состава и численности комплектов технологических ресурсов узловых аэропортов.

При определенной близости «вероятностного» и «нечеткого» решений первое из них предполагает использование несколько более многочисленного и, соответственно, более затратного комплекта ресурсов, по сравнению со вторым, при одинаковых значениях $\rho$ и $\rho'$. Если принимать «вероятностное» решение в качестве эталонного, то для обеспечения большей близости к нему «нечеткого» решения требуется коррекция величины $\rho'$. Как показывает сравнительный анализ результатов решения задачи оптимизации в двух рассматриваемых постановках, при наличии заданного экспертом или нормативной документацией значения $\rho$ величину $\rho'$, используемую при поиске «нечеткого» решения, представляется целесообразным рассчитывать согласно следующему выражению, применимому в промежутке наиболее употребительных значений $0{,}5 \leq \rho \leq 0{,}95$:

$$\rho' = \rho + \begin{cases} 0{,}1, & \text{если } 0{,}5 \leq \rho \leq 0{,}8, \\ 0{,}05, & \text{если } 0{,}8 < \rho \leq 0{,}9, \\ 0{,}03, & \text{если } 0{,}9 < \rho \leq 0{,}95. \end{cases}$$

Для решения задачи оптимального комплексирования как в стохастической, так и в нечеткой постановках достаточно возможностей стандартного прикладного программного обеспечения персональных ЭВМ, поскольку, благодаря использованию методов ЧВА и нечетких вычислений, исключается необходимость в проведении имитационного моделирования. При использовании современной персональной вычислительной техники затраты машинного времени на решение задачи с рассматриваемыми выше исходными данными в стохастической постановке составили не более 3–5 мин., в нечеткой постановке – не более 0,25–0,5 мин.

Снижение временных затрат при переходе от гистограммных к нечетким методам работы с неопределенными величинами вполне согласуется с сокращением числа операций на каждом шаге оптимизационного алгоритма. В [7] показано, что при заданном количестве полуинтервалов $K$ число арифметических операций в ходе гистограммных расчетов оценивается как $O(K^2)$. Число операций с нечеткими числами может считаться пропорциональным количеству $\alpha$-уровней $N$ и оцениваться как $O(N)$. Следовательно, переход от гистограммных расчетов со значениями $K = 30–50$, обеспечивающими в подавляющем большинстве случаев удовлетворительную точность, к нечетким с вполне обоснованными значениями $N = 10–15$ обеспечивает сокращение объема вычислений не менее чем в 60 раз при решении большинства задач оптимального комплексирования. Тем не менее, принимая во внимание различия гистограммного и нечеткого подходов к определению вероятности выполнения ограничений оптимизационной задачи, нельзя считать нечеткий подход полной заменой гистограммному. При решении наиболее «ответственных» задач комплексирования, в случае наличия явно заданных требований к вероятности выполнения ограничений (5), необходимо применять не нечеткие, а гистограммные вычисления.

## 6. Заключение

Учет неопределенного характера исходных данных при решении задачи оптимального комплексирования оказывает существенное влияние на ее результаты, поэтому сформулированная в [3] стохастическая и предложенная в настоящей статье нечеткая постановки рассматриваемой задачи представляются вполне правомерными. Предложенный подход, предусматривающий использование гистограммных вычислений, позволяет решать стохастические задачи оптимального комплексирования на базе стандартного программного обеспечения со сравнительно малыми затратами машинного времени без необходимости выполнения процедуры имитационного моделирования. Еще более значительное сокращение временных затрат на решение задачи оптимального комплексирования достигается благодаря предложенному сведению ее к задаче нечеткого программирования, решаемой с использованием теоретико-вероятностного метода сравнения нечетких величин. Результаты решения представленной в качестве примера задачи оптимизации состава и численности средств наземного обслуживания ВС узлового аэропорта с вероятностными или нечеткими исходными данными, описание которой в специальной литературе отсутствует, свидетельствуют о возможности использования рассмотренных подходов для решения практически важных задач оптимизации производственных систем в условиях неопределенности.

## *Литература*


1. ВАДЗИНСКИЙ Р.Н. *Справочник по вероятностным распределениям.* – СПб.: Наука, 2001. – 295 с.
2. ВЕНТЦЕЛЬ Е.С., ОВЧАРОВ Л.А. *Прикладные задачи теории вероятностей*. – М.: Радио и связь, 1983. – 416 с.
3. ГАРКАВИ Н.Г. *Методика расчета оптимальных параметров землеройных машин* // Сборник. Горные, строительные и дорожные машины. – Киев: Техника, 1968. – С. 79–99.
4. ГЕРАСИМОВ В.А., ДОБРОНЕЦ Б.С., ШУСТРОВ М.Ю. *Численные операции гистограммной арифметики и их применения* // Автоматика и телемеханика. – 1991. – №2. – С. 83–88.
5. ДИЛИГЕНСКИЙ Н.В., ДЫМОВА Л.Г., СЕВАСТЬЯНОВ П.В. *Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология.* – М.: Машиностроение-1, 2004. – 397 с.
6. ДОБРОНЕЦ Б.С., ПОПОВА О.А. *Численные операции над случайными величинами и их приложения* // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2011. – №4(2). – С. 229–239.

7. ДОБРОНЕЦ Б.С., ПОПОВА О.А. *Элементы численного вероятностного анализа* // Вестник СибГАУ. – 2012. – №2. – С. 19–23.
8. ЗАЙЧЕНКО Ю.П. *Исследование операций. Нечеткая оптимизация.* – Киев: Выща школа, 1991. – 191 с.
9. ЛЮ Б. *Теория и практика неопределенного программирования.* – М.: БИНОМ, 2005. – 416 с.
10. ОРЛОВСКИЙ С.А. *Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации.* – М.: Наука, 1981. – 208 с.
11. РОМАНЕНКО В.А. *Теоретико-вероятностные методы сравнения нечетких чисел* // Системы управления и информационные технологии. – 2012. – №3.1(49). – С. 159–165.
12. РУСИНОВ И.Я. *Механизация наземного обслуживания воздушных перевозок.* – М.: Транспорт, 1971. – 252 с.
13. ЮДИН Д.Б. *Математические методы управления в условиях неполной информации.* – М.: «Сов. радио», 1974. – 400 с.
14. ЯХЪЯЕВА Г.Э. *Нечеткие множества и нейронные сети.* – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 316 с.
15. LI W., HYM J. *Computer arithmetic for probability distribution variables* // Reliability Engineering and System Safety. – 2004. – Vol. 85. – P. 191–209.
16. NEGOITA C.V., SULARIA M. *On fuzzy mathematical programming and tolerances in planning* // ECEESR. – 1976. – Vol. 1. – P. 3–14.
17. ZADEH L.A., BELLMAN R.E. *Decision-making in a fuzzy environment* // Management Science. – 1970. – No. 17(4). – P. 141–164.

# OPTIMAL AGGREGATION OF PRODUCTION SYSTEMS RESOURCES UNDER CONDITIONS OF UNCERTAINTY

**Vladimir Romanenko,** Samara State Aerospace University named after academician S.P.Korolyov (National Research University), Samara, Cand.Sci., associate professor (vla_rom@mail.ru).

*Abstract: We consider the problem of finding the set of production system technological resources optimal by the efficiency. The input data contains various kinds of uncertainty. The approaches we propose allow to solve the problem both in stochastic and fuzzy formulations on the basis of the popular software with rather small machine time expenses. The results are illustrated with a particular, but practically significant example of an aggregation of ground handling facilities in hub airports. This example was not previously considered in the literature.*

Keywords: technological resources, optimization, stochastic programming, fuzzy programming, numerical probabilistic analysis.

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А.А. Ворониным.*

*Поступила в редакцию 17.12.2015.*
*Опубликована 31.03.2016.*