

УДК 681.5  
ББК 32.965

## НАСТРОЙКА ПАРАМЕТРОВ ПРОПОРЦИОНАЛЬНО-ИНТЕГРАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА СИМПЛЕКС-ПЛАНИРОВАНИЯ

Гутова С. Г.<sup>1</sup>, Казакевич И. А.<sup>2</sup>

(Кемеровский государственный университет, Кемерово)

*Рассмотрен вопрос о нахождении оптимальных настроек пропорционально-интегрального регулятора с помощью двумерного симплекса. При построении замкнутой системы автоматического регулирования колебательных динамических объектов применяются различные критерии регулирования. В заключении приводится сравнительный анализ результатов нахождения параметров регулятора при различных критериях регулирования.*

Ключевые слова: пропорционально-интегральный регулятор, настройка параметров, колебательное звено, симплекс-планирование.

### **1. Введение**

Главная задача систем регулирования состоит в том, чтобы стабилизировать параметры процесса на заданном уровне при наличии внешних возмущающих воздействий на объект управления. Этим занимаются системы автоматической стабилизации. Другой не менее важной задачей является задача обеспечения программного перехода на новые режимы работы. Решение этой проблемы осуществляется с помощью той же системы стабили-

---

<sup>1</sup> Светлана Геннадьевна Гутова, кандидат технических наук, доцент (gsg1967@mail.ru).

<sup>2</sup> Иван Андреевич Казакевич, магистрант (iakaz93@mail.ru).

зации, задание которой изменяется с помощью программного воздействия.

Целью данной работы является построение замкнутой системы регулирования, вырабатывающей управляющее воздействие, которое приводит выходной сигнал объекта к задающему уровню.

Как правило, модель замкнутой системы регулирования имеет больший порядок, чем модель объекта регулирования [5]. Для нахождения полюсов передаточной функции замкнутой системы автоматического регулирования предлагается использовать алгоритм нахождения корней уравнения третьей степени с помощью формулы Кордано [9]. Для нахождения настроек параметра регулятора применен метод симплекс-планирования [5–7].

В ряде практических случаев реальные контуры регулирования могут быть сведены к простейшим контурам второго или третьего порядка, настройка которых осуществляется путем выбора по определенным правилам параметров регулятора [12, 15, 16]. Поэтому в работе рассмотрен объект регулирования, представленный одним из простейших динамических звеньев – колебательным звеном второго порядка.

## **2. Объект регулирования и регулятор**

### **2.1. ОБЪЕКТ РЕГУЛИРОВАНИЯ**

В качестве объекта регулирования рассмотрим колебательное звено второго порядка. Оно является частным случаем апериодического или инерционного звена второго порядка, полюса которого являются комплексно-сопряженными числами.

Колебания всегда возникают, когда есть обмен энергией между частями конструкции, там, где идёт процесс накопления и передачи энергии. Например, центробежный механизм. При толчке возникают затухающие колебания пружины [12].

Математическое описание колебательного звена – линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами [2, 3, 10]:

$$(1) \quad T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2T\xi \frac{d y(t)}{dt} + y(t) = K x(t),$$

где  $K$  – коэффициент передачи;  $T$  – постоянная времени, характеризующая инерционность системы, т.е. продолжительность переходного процесса в ней ( $T > 0$ );  $\xi$  – коэффициент (декремент) затухания, который характеризует рассеяние энергии в звене ( $0 < \xi < 1$ ).

При  $\xi = 1$  колебательное звено превращается в аperiodическое звено II порядка.

После применения преобразования Лапласа [11] к формуле (1) получим представление колебательного звена в виде передаточной функции [2, 3, 10, 11]:

$$(2) \quad G(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2T\xi s + 1}.$$

В качестве примера приведем функциональную схему электрического четырехполюсника (RLC-фильтра) [12].

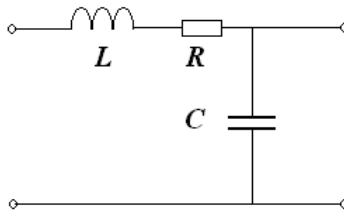


Рис. 1. Функциональная схема электрического четырехполюсника

Здесь  $R$  – сопротивление нагрузки;  $L$  – индуктивность обмотки дросселя;  $C$  – емкость конденсатора.

Передаточная функция четырехполюсника имеет вид

$$G(s) = \frac{K}{LCs^2 + RCs + 1}.$$

$$\text{Здесь } T = \sqrt{LC}, \xi = \frac{RC}{2T} = \frac{R}{2} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Чтобы звено было колебательным, необходимо соотношение параметров

$$R^2 < \frac{4L}{C}.$$

Так как известно, что любое входное воздействие можно представить в виде линейной комбинации ступенчатых воздействий с различными амплитудами и различными начальными моментами [10], рассмотрим переходную характеристику объекта (2). Для этого подадим на вход единичное ступенчатое воздействие:

$$(3) \quad x(t) = 1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Переходная характеристика объекта (2) примет вид

$$(4) \quad y(t) = K \left( 1 - C e^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \theta) \right),$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T}, \quad C = \frac{1}{\lambda T}, \quad \gamma = \frac{\xi}{T}, \quad \theta = \arctg \frac{\lambda}{\gamma}.$$

График переходной характеристики (4) представлен на рис. 2.

## 2.2. РЕГУЛЯТОР И КРИТЕРИИ РЕГУЛИРОВАНИЯ

В данной работе система автоматического регулирования объектом (2) строится на основе пропорционально-интегрального закона управления [3, 11], т.е. с использованием пропорционально-интегрального регулятора (ПИ-регулятора).

Дифференциальное уравнение, описывающее работу ПИ-регулятора, является суммой пропорциональной и интегральной составляющих:

$$(5) \quad u(t) = K_R x(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t x(t) dt,$$

где  $K_R$  – коэффициент усиления регулятора, обеспечивающий пропорциональное увеличение (уменьшение) выходного сигнала регулируемого объекта;  $T_I$  – постоянная времени интегрирования.

Пропорционально-интегральное управление сочетает в себе высокую точность интегрального управления (астатизм) с большим быстродействием пропорционального управления. В первые моменты времени при появлении ошибки  $x(t)$  система с ПИ-регулятором работает как система пропорционального регулирования, а в дальнейшем начинает работать как система интегрального управления.

Передаточная функция такого регулятора имеет вид

$$(6) \quad R(s) = K_R + \frac{1}{T_I s}.$$

Из [2, 3, 11] знаем, что система автоматического регулирования прежде всего должна быть устойчива. В устойчивой системе переходный процесс затухает. Однако для практики вовсе не безразличен характер затухания переходного процесса. Так, например, если переходный процесс затухает медленно и система долго входит в новый установившийся режим, то она обладает недостаточным быстродействием, и, следовательно, ее применение будет ограничено. Поэтому устойчивость является необходимым, но недостаточным условием работоспособности автоматических систем. Достаточным условием является качество процессов регулирования, которое оценивается качеством переходных процессов и ошибками в установившихся режимах.

Качество переходных процессов обычно оценивают по переходной характеристике.

Основными показателями качества переходного процесса являются время регулирования и перерегулирование.

Время регулирования  $\tau$  определяется длительностью переходного процесса. Теоретически переходный процесс длится бесконечно долго, однако практически считают, что он заканчивается, как только отклонения регулируемой величины от нового ее установившегося значения не будут превышать допустимых пределов  $\delta$ . Обычно принимают  $\delta = (3-5)\%$  от установившегося значения  $u_{уст}$ . Временем  $\tau$  характеризуют быстродействие системы.

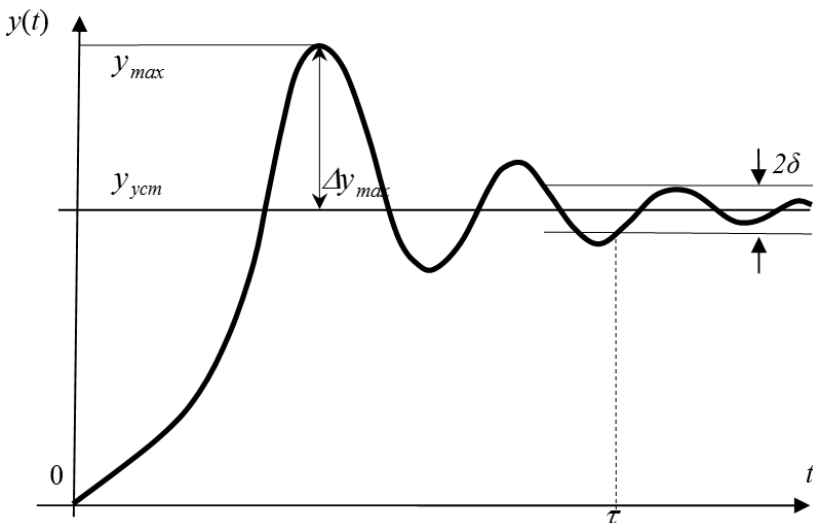


Рис. 2. Переходная характеристика замкнутой системы для случая колебательного звена с перерегулированием и временем регулирования

Перерегулирование  $\Delta y_{max}$ , или выброс, представляет собой максимальное отклонение регулируемой величины от нового установившегося значения. Обычно первый максимум является наибольшим. Относительное перерегулирование вычисляют по формуле

$$(7) \quad \sigma = \frac{\Delta y_{max}}{y_{уст}} = \frac{y_{max} - y_{уст}}{y_{уст}}.$$

Здесь  $y_{max}$  – это максимальное значение первого колебания устойчивой системы.

Время регулирования и перерегулирование – основные показатели переходного процесса – тесно связаны между собой. На первый взгляд может показаться, что перерегулирование недопустимо, так как оно увеличивает время регулирования. Однако это не так. Действительно, перерегулирование появляется вследствие того, что система к новому установившемуся состоянию подходит с определенной скоростью.

Чем больше эта скорость, тем дальше за новое установившееся положение пройдет система по инерции. Значит, для уменьшения перерегулирования необходимо уменьшить скорость, с которой система подходит к новому установившемуся состоянию. Это, в конце концов, приведет к увеличению времени регулирования.

Так как время регулирования характеризует быстродействие системы, то там, где это необходимо, стремятся свести его к минимуму. Это значит, что система должна обрабатывать задающее воздействие с большой скоростью, что в итоге приводит к большому перерегулированию. Кроме того, поскольку переходный процесс колебательный, то будут иметь место большие ускорения регулируемой величины, что может вызвать недопустимо большие динамические нагрузки на элементы системы. Таким образом, как отсутствие, так и слишком большое перерегулирование нежелательно. Поэтому в качестве оптимального допускают перерегулирование в пределах 20–30%. При этом число полуколебаний переходной функции равно двум или трем.

Числовые значения времени регулирования и перерегулирования часто задают в качестве исходных данных для синтеза корректирующих устройств, поскольку правильным выбором и настройкой последних обеспечивается подавление нежелательных колебаний регулируемой величины в переходном процессе.

Для некоторых систем перерегулирование вообще недопустимо, например, для систем автоматического регулирования химических процессов, где перерегулирование может испортить выпускаемый продукт. Необходимо также иметь в виду, что стремление уменьшить время регулирования приводит к увеличению мощности исполнительного устройства.

### **2.3. НАСТРОЙКА ПАРАМЕТРОВ ПИ-РЕГУЛЯТОРА**

Среди методов настройки параметров автоматического регулятора можно выделить две основные группы.

К первой группе относятся методы, требующие экспериментов над объектом, т.е. эмпирические методы. Они используют данные, полученные экспериментально на реальном объекте. Наиболее известный представитель этой группы – метод, пред-

ложенный Циглером и Никольсом в 1942 году. В системах без запаздывания применяют вариант этого метода, основанный на использовании запасов устойчивости. В этом варианте процедура настройки начинается с экспериментального исследования системы при условии, что интегральная составляющая ПИ-регулятора обнуляется. Коэффициент передачи пропорциональной составляющей увеличивается до тех пор, пока на выходе системы не установятся колебания с постоянной амплитудой колебаний, т.е. система не окажется на границе устойчивости. Это значение коэффициента передачи регулятора фиксируется и измеряется период колебаний. Затем значения параметров регулятора выбранного типа рассчитываются по формулам [14] с использованием фиксированных значений коэффициента передачи и периода колебаний. Недостатком метода Циглера – Никольса является необходимость выводить систему на границу устойчивости, что для многих объектов управления делать не рекомендуется.

Кроме метода Циглера – Никольса к эмпирическим методам относятся: метод Чина – Хронеса – Ресвика; метод Кеслера; метод Латцеля; метод Куна; метод Пройса [4, 8, 13, 16]. Трудоемкость и качество настройки САР по указанным методам различны. Так, например, метод Чина – Хронеса – Ресвика дает практически неудовлетворительные результаты (большие перерегулирования). Метод Латцеля отличается высокой точностью, но и трудоемкостью, так как в нем используется табличная информация. Методом Пройса можно получить хорошие результаты настройки регуляторов, но он математически сложен и нуждается в трудоемком моделировании.

Также к методам, требующим проведения экспериментов над объектом, можно отнести методы расчета параметров по амплитудно-фазовым (АФХ) и частотным характеристикам объекта [13]. Применение таких методов требует наличие специальной аппаратуры для экспериментального определения АФХ объекта управления. Эту характеристику можно использовать для расчета настроек ПИ-регулятора, где главным критерием является обеспечение заданных запасов устойчивости в системе.



К экспериментальным можно также отнести графические методы и методы расчета параметров регулятора по номограммам [4, 16].

Ко второй группе относятся методы настройки параметров регулятора, основанные на использовании методов оптимизации. Выбирается критерий минимизации, в качестве которого может быть один из показателей качества или комплексный критерий, составленный из нескольких показателей с разными весовыми коэффициентами. К критерию добавляются ограничения, накладываемые требованиями робастности. Таким путем получается целевая функция, зависящая от параметров ПИ-регулятора. Далее используются численные методы минимизации целевой функции с заданными ограничениями, которые и позволяют найти искомые параметры.

Методы, основанные на оптимизации, имеют следующие достоинства: позволяют получить оптимальные значения параметров, не требующие дальнейшей подстройки; не требуют упрощения модели объекта – модель может быть как угодно сложной; позволяют быстро достичь конечного результата (избежать процедуры длительной подстройки параметров).

Однако реализация данного подхода связана с большими проблемами, которые не один десяток лет являются предметом научных исследований. К этим проблемам относятся: низкая надежность метода (во многих случаях вычислительный процесс может расходиться и искомые коэффициенты не будут найдены); низкая скорость поиска минимума для овражных функций и функций с несколькими минимумами.

Тем не менее методы оптимизации являются мощным средством настройки регуляторов с помощью специально разработанных для этого компьютерных программ. К данной группе, в частности, относятся метод Нелдера – Мида, методы случайного поиска [6, 7]. Рассмотренный в работе метод симплекс-планирования [7] также можно отнести к методам, использующим процедуру оптимизации по выбранному критерию.

### *3.1. МЕТОД СИМПЛЕКС-ПЛАНИРОВАНИЯ*

Поиск оценок параметров регулятора в данной работе осуществляется методом симплекс планирования, в соответствии с

которым исходную серию опытов планируют так, чтобы точки, соответствующие условиям проведения этих опытов, образовывали правильный симплекс в многофакторном пространстве [7]. Под правильным симплексом понимается совокупность  $k + 1$  равноудаленных одна от другой точек в  $k$ -мерном пространстве. В одномерном пространстве симплексом является отрезок прямой, в двухмерном – равносторонний треугольник, в трехмерном – правильная треугольная пирамида – тетраэдр.

После проведения первой серии опытов выявляется точка (опыт), отвечающая условиям, при которых получаются наихудшие результаты, т.е. достигается наихудшее значение целевой функции  $f$  (наибольшее время регулирования, наибольшее перерегулирование). Эту точку заменяют новой, представляющей собой ее «зеркальное отображение» относительно противоположной грани симплекса. Вместе с оставшимися указанная точка снова образует правильный симплекс, центр тяжести которого смещен по сравнению с исходным в направлении от худшей точки к центру тяжести остальных точек. В общем случае это направление не является наиболее крутым, однако оно обращено в сторону повышения качества процесса.

После реализации опыта в дополнительной точке опять производится сопоставление результатов, выявляется наихудшая точка, которую так же заменяют ее «зеркальным отображением» и т.д. Если на каком-то этапе очередное «зеркальное отображение» попадает в точку, которая была худшей точкой симплекса два этапа назад, то необходимо уменьшить (например, вдвое) расстояние между точками симплекса.

Эту процедуру пошагового восхождения с последовательным отбрасыванием наихудших точек повторяют до тех пор, пока не будет достигнута «почти стационарная» область, в данном случае область, в которой точки симплекса будут совпадать с заданной точностью.

Для определения оптимальных настроек регулятора  $K_R$  и  $K_I$  воспользуемся симплекс методом для размерности пространства  $k = 2$  [5, 6]. Для этого зададим первоначальный симплекс из трех точек плоскости с координатами  $(K_R, K_I)$ , которые являются вершинами равностороннего треугольника  $ABC$ .

Если  $d = 0,5$ , то можно положить  $A(0,1; 0,1)$ ,  $B(0,1; 0,6)$  и  $C(0,15; 0,19)$ , и первоначальный симплекс имеет вид, приведенный на рис. 3.

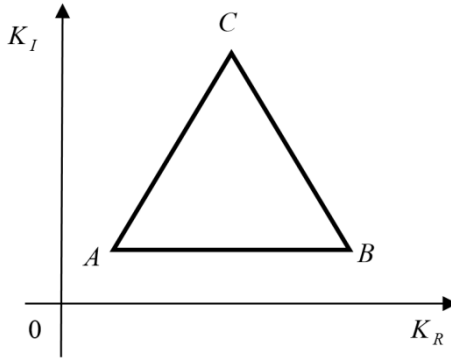


Рис. 3. Первоначальный симплекс

Далее, необходимо рассчитать время регулирования или перерегулирование для каждой точки симплекса. Определить лучшую и худшую точку, согласно выбранному показателю качества регулирования. Затем точки переименовываются так, чтобы  $A$  была лучшей, а  $C$  – худшей точкой симплекса.

Следующий шаг состоит в отображении точки  $C$  симметрично относительно прямой  $AB$ . Получим новую точку симплекса – точку  $M$  (см. рис. 4).

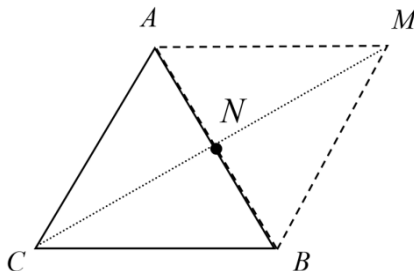


Рис. 4. Нахождение точки нового симплекса путем отображения относительно прямой  $AB$

Так как точка  $N$  – середина отрезка  $AB$ :

$$N = \frac{A+B}{2},$$

– является одновременно серединой отрезка  $CM$ , то получим уравнение:

$$\frac{C+M}{2} = \frac{A+B}{2},$$

откуда  $M = A + B - C$ .

После чего снова надо найти лучшую и худшую точки и переименовать вершины треугольника в порядке ухудшения показателя качества регулирования:  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

Если худшей окажется точка  $M$ , то после очередного отображения точка  $C = M$  вернется в начальное положение и процесс заикнется. В таком случае сторону треугольника необходимо уменьшить вдвое. Причем точка, которая останется неизменной, – лучшая точка  $A$ . Получим новый симплекс  $A'B'C'$  (см. рис. 5).

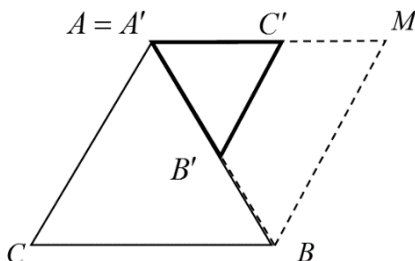


Рис. 5. Уменьшение стороны симплекса вдвое

Аналогично уменьшим сторону симплекса, если координаты новой точки симплекса после отображения перестанут быть неотрицательными.

Процесс продолжается, пока сторона треугольника не станет меньше заданной величины  $\mu$ .

После чего оптимальными настройками параметров регулятора считаем координаты точки  $A$ .

Приведем алгоритм нахождения оптимальной точки.

1. Пусть сторона треугольника равна  $d$ .

2. Зададим первоначальную точку произвольно  $A(a_1^0, a_2^0)$ .

3. Найдем координаты других точек симплекса:

$$B(b_1, b_2) = (a_1^0, a_2^0 + d);$$

$$C(c_1, c_2) = \left( a_1^0 + \frac{d}{2}, a_2^0 + \frac{d\sqrt{3}}{2} \right).$$

4. В каждой точке симплекса найдем значение целевой функции:

$$f_A = f(a_1^0, a_2^0); f_B = f(b_1^0, b_2^0); f_C = f(c_1^0, c_2^0).$$

5. Упорядочим точки симплекса по убыванию (возрастанию) значения целевой функции и переименуем их так, чтобы точка  $A$  стала наилучшей точкой, а точка  $C$  – наихудшей.

6. Получим точку  $M$  – «зеркальное» отображение точки  $C$  относительно стороны  $AB$  (см. рис. 4). Координаты  $M$  найдем по формуле

$$M(m_1, m_2) = (a_1 + b_1 - c_1, a_2 + b_2 - c_2).$$

7. Найдем значения целевой функции в каждой точке нового симплекса  $A, B, M$ .

8. Упорядочим точки симплекса по убыванию значения целевой функции и переименуем их так, чтобы точка  $A$  стала наилучшей точкой, а точка  $C$  – наихудшей. Получим координаты точек на  $k$ -м шаге (в данном случае  $k = 1$ ):  $A(a_1^k, a_2^k)$ ,  $B(b_1^k, b_2^k)$ ,  $C(c_1^k, c_2^k)$ .

9. Проверим полученные координаты на ограничения: если  $a_i^k \leq 0$ , или  $b_i^k \leq 0$ , или  $c_i^k \leq 0$  ( $i = 1, 2$ ), то переходим к пункту 11; если ограничения на координаты выполняются, то переходим к пункту 6.

10. Проверим, что при повторном зеркальном отображении худшая точка  $C(c_1^k, c_2^k)$  не совпадает с худшей точкой две итерации назад (зацикливание): если  $C(c_1^k, c_2^k) = C(c_1^{k-2}, c_2^{k-2})$ , то переходим к пункту 11; если нет, переходим к пункту 6.

11. В случае нарушения ограничений или зацикливания уменьшим вдвое сторону симплекса (см. рис. 5), т.е. координаты вершин на  $k$ -м шаге пересчитаем по формулам

$$A' = A(a_1^k, a_2^k) = A(a_1^k, a_2^k);$$

$$B' = B(b_1^k, b_2^k) = \left( \frac{a_1^k + b_1^k}{2}, \frac{a_2^k + b_2^k}{2} \right);$$

$$C' = C(c_1^k, c_2^k) = \left( \frac{a_1^k + c_1^k}{2}, \frac{a_2^k + c_2^k}{2} \right).$$

После чего переходим к пункту 6.

12. Продолжаем выполнять пункты 6–11, пока сторона симплекса не станет меньше заданной величины  $\mu$ , т.е. пока выполняется условие

$$|AB| = \sqrt{(a_1^k - b_1^k)^2 + (a_2^k - b_2^k)^2} \geq \mu.$$

13. Как только условие пункта 12 перестает выполняться, оптимальной точкой считаем точку  $A(a_1^k, a_2^k)$ .

### 3.2. НАСТРОЙКА ПАРАМЕТРОВ РЕГУЛЯТОРА ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ

Построим замкнутую систему автоматического регулирования объектом (2) на основе пропорционально-интегрального закона управления, т.е. с использованием пропорционально-интегрального регулятора (ПИ-регулятора), имеющего передаточную функцию (5).

Схема замкнутой системы регулирования с отрицательной обратной связью [3, 11] приведена на рис. 6.

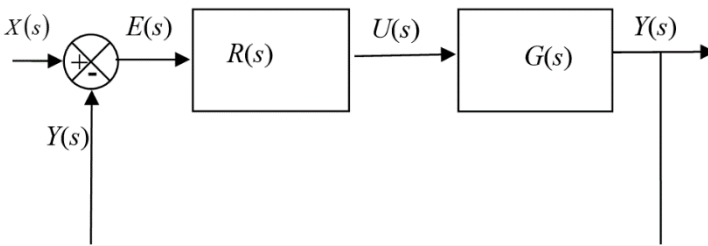


Рис. 6. Схема замкнутой системы регулирования с отрицательной обратной связью

Здесь  $u(t)$  – управляющее воздействие, вырабатываемое регулятором;  $\varepsilon(t)$  – рассогласование между задающим воздействием  $x(t)$  и выходным сигналом  $y(t)$  объекта (2), т.е.  $\varepsilon(t) = x(t) - y(t)$ ;  $U(s)$ ,  $E(s)$  и  $Y(s)$  – их изображения по Лапласу соответственно.

Согласно рис. 6, передаточная функция разомкнутой системы регулирования, связывающая  $E(s)$  и  $Y(s)$ , имеет вид

$$(8) \quad W_{раз}(s) = R(s) \cdot G(s).$$

Тогда передаточная функция замкнутой системы с отрицательной обратной связью примет вид

$$(9) \quad W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{W_{раз}(s)}{1 + W_{раз}(s)}.$$

Или после подстановки (8) в (9):

$$(10) \quad W(s) = \frac{R(s) \cdot G(s)}{1 + R(s) \cdot G(s)}.$$

Заменим для удобства коэффициент  $1/T_I$  в формуле (5) на  $K_I$  и приведем дроби к общему знаменателю. Получим передаточную функцию регулятора в виде

$$(11) \quad R(s) = \frac{K_R s + K_I}{s}.$$

Подставим (11) и (2) в выражение (10). Получим:

$$(12) \quad W(s) = \frac{KK_I \cdot \left( \frac{K_R}{K_I} s + 1 \right)}{T^3 s^3 + 2\xi T s^2 + (1 + KK_R) \cdot s + KK_I}.$$

Обозначим

$$\frac{K_R}{K_I} = \tau, \quad 1 + KK_R = \alpha, \quad KK_I = \beta, \quad \varphi = 2\xi T.$$

Тогда (12) примет вид

$$(13) \quad W(s) = \beta \cdot \frac{\tau s + 1}{T^3 s^3 + \varphi s^2 + \alpha s + \beta}.$$

Найдем корни характеристического уравнения

$$(14) T^3 s^3 + \varphi s^2 + \alpha s + \beta = 0.$$

Воспользуемся формулой Кордано [9]. Кубическое уравнение (14) имеет три корня. Один действительный:

$$s_1 = q$$

и два комплексно-сопряженных:

$$s_2 = u - iv, \quad s_3 = u + iv.$$

Тогда (14) можно представить в виде

$$\begin{aligned} T^3 s^3 + \varphi s^2 + \alpha s + \beta &= T^3 (s - q) \cdot (s - u + iv) \cdot (s - u - iv) = \\ &= T^3 (s - q) \cdot \left( (s - u)^2 + v^2 \right) = T^3 (s - q) \cdot \left( s^2 - 2us + (u^2 + v^2) \right). \end{aligned}$$

Обозначим

$$G = -q, \quad E = -2u, \quad F = u^2 + v^2.$$

Тогда (13) принимает вид

$$(15) W(s) = \beta \cdot \frac{\nu s + 1}{(s + G) \cdot (s^2 + Es + F)}.$$

Изображение по Лапласу выходного сигнала получается по правилу

$$(16) Y(s) = \frac{Ap}{s} \cdot \frac{\beta}{T^3} \cdot \frac{\nu s + 1}{(s + G) \cdot (s^2 + Es + F)}.$$

Здесь задающее воздействие – ступенчатая функция  $Ap/s$  с амплитудой  $Ap$ .

Чтобы было возможно применение таблицы обратного преобразования Лапласа [11], представим передаточную функцию (15) в виде суперпозиции двух более простых передаточных функций. Используем метод неопределенных коэффициентов [1].

$$(17) \frac{\nu s + 1}{(s + G) \cdot (s^2 + Es + F)} = \frac{A_1}{s + G} + \frac{A_2 s + A_3}{s^2 + Es + F}.$$

Приведа к общему знаменателю и приравняв коэффициенты полиномов числителя в левой и правой частях уравнения (17), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$ :



$$A_1 + A_2 = 0,$$

$$(18) \quad A_1 E + A_2 G + A_3 = \nu,$$

$$A_1 F + A_3 G = 1.$$

Решение системы (18) имеет вид

$$A_1 = \frac{1 - G\nu}{G^2 - EG + F},$$

$$(19) \quad A_2 = \frac{G\nu - 1}{G^2 - EG + F},$$

$$A_3 = \frac{G - E + F\nu}{G^2 - EG + F}.$$

С учетом (19) выражение (16) приобретает следующий вид:

$$Y(s) = \frac{Ap}{s} \cdot \frac{\beta}{T^3} \cdot \left( \frac{A_1}{s+G} + \frac{A_2 s + A_3}{s^2 + Es + F} \right) = Y_1(s) + Y_2(s).$$

Здесь

$$(20) \quad Y_1(s) = \frac{Ap}{s} \cdot \frac{\beta}{T^3} \cdot \frac{A_1}{s+G} = \frac{ApA_1\beta}{T^3 G} \cdot \frac{1}{s \left( \frac{1}{G}s + 1 \right)},$$

$$(21) \quad Y_2(s) = \frac{Ap}{s} \cdot \frac{\beta}{T^3} \cdot \frac{A_2 s + A_3}{s^2 + Es + F} = \frac{ApA_3\beta}{T^3 F} \cdot \frac{\frac{A_2}{A_3}s + 1}{s \left( \frac{1}{F}s^2 + \frac{E}{F}s + 1 \right)}.$$

Введем обозначения:

$$\rho = \frac{A_2}{A_3}, N^2 = \frac{1}{F}, \text{ где } N = \frac{1}{\sqrt{F}},$$

$$2\eta N = \frac{E}{F}, \text{ где } \eta = \frac{E}{2NF} = \frac{E}{2\sqrt{F}}.$$

Тогда (21) примет вид

$$(22) \quad Y_2(s) = \frac{ApA_3\beta}{T^3 F} \cdot \frac{\rho s + 1}{s \cdot (N^2 s^2 + 2\eta N s + 1)}.$$

Оригинал изображения (19) согласно таблице преобразований Лапласа [11] примет вид

$$(23) \quad y_1(t) = \frac{ApA_1\beta}{T^3G} \cdot (1 - e^{-Gt}).$$

Оригинал изображения (21) имеет вид

$$(24) \quad y_2(t) = \frac{ApA_3\beta}{T^3F} \cdot (1 + Ce^{-\gamma t} (\sin(\lambda t - \theta))),$$

где параметры находятся по следующим формулам:

$$\gamma = \frac{\eta}{N}; \quad \lambda = \frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{N}; \quad \theta = \arctg \frac{\lambda N}{\rho - \gamma N^2};$$

$$C = \frac{\sqrt{\rho^2 + (1 - 2\gamma\rho)N}}{\lambda N^2}.$$

Таким образом, учитывая (22) и (23), переходная характеристика замкнутой системы (14) принимает вид

$$(25) \quad y(t) = \frac{Ap\beta}{T^3} \cdot \left[ \frac{A}{G} \cdot (1 - e^{-Gt}) + \frac{C}{F} \cdot (1 + Ce^{-\gamma t} (\sin(\lambda t - \theta))) \right].$$

При нахождении оптимальных настроек параметров регулятора используем в качестве критерия минимум времени переходного процесса  $\tau^*$  в замкнутой системе.

Определим время переходного процесса как время, когда кривая  $y(t)$  входит в заданный коридор  $(Ap - \delta; Ap + \delta)$  и больше не покидает его. Таким образом, необходимо выполнение условия

$$(26) \quad |Ap - y(t)| \leq \delta.$$

Так как переходный процесс колебательный, переходная характеристика (24) может пересекать полосу  $2\delta$  несколько раз. Для того чтобы убедиться, что система достигла с заданной точностью установившегося значения, проверим дополнительное условие – равенство нулю производной ее переходной характеристики:

$$(27) \quad |y'(t)| \leq \Delta.$$

Для начального симплекса, приведенного на рис. 3, параметров объекта (2)  $K = 1$ ,  $T = 2$  и задающего воздействия с амплитудой  $Ap = 7$  оптимальные параметры регулятора оказались следующими:  $K_R = 0,24$  и  $K_I = 0,34$ .

Минимальное время переходного процесса  $\tau^* = 7,806$  с.

Здесь параметры симплекс метода были заданы следующими:

$$\delta = 0,001; \Delta = 0,001; \mu = 0,001.$$

Результат визуализации последовательного построения симплекса приведен на рис. 7.

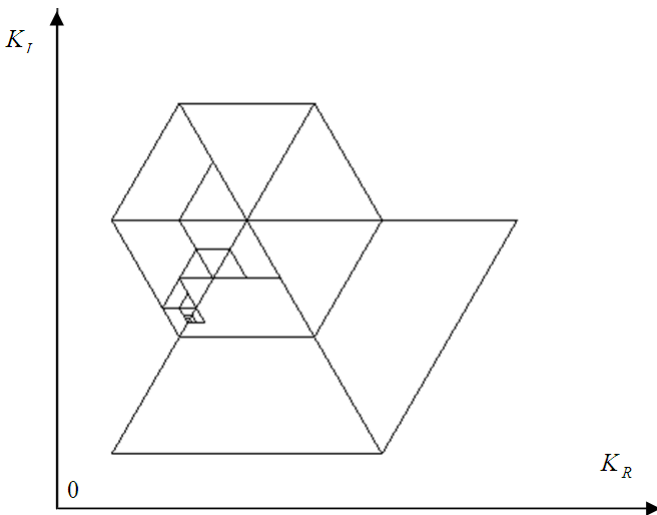


Рис. 7. Результат визуализации последовательного построения симплекса при минимизации времени переходного процесса

Теперь возьмем за критерий качества регулирования минимум перерегулирования.

Для начального симплекса, приведенного на рис. 3, параметров объекта (2)  $K = 1$ ,  $T = 2$  и задающего воздействия с амплитудой  $Ap = 7$  оптимальные параметры регулятора оказались равными  $K_R = 0,63$  и  $K_I = 0,04$ .

Минимальное перерегулирование  $\sigma^* = 0,005$ .

Здесь параметры симплекс метода были заданы следующими:

$$\delta = 0,001; \Delta = 0,001; \mu = 0,001.$$

Результат визуализации последовательного построения симплекса приведен на рис. 8.

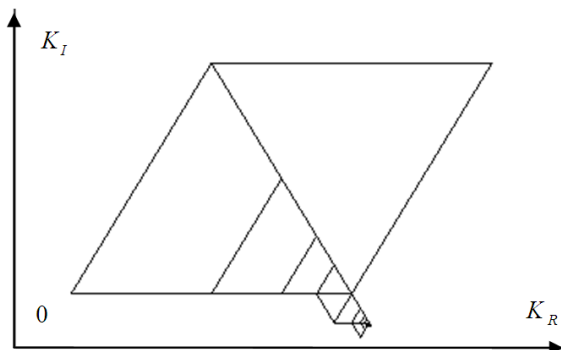


Рис. 8. Результат визуализации последовательного построения симплекса при минимальном перерегулировании

### 3.3. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ

На примере колебательного звена (2) и различных параметров объекта проанализируем значения оптимальных настроек параметров регулятора в зависимости от выбора критерия качества регулирования.

В таблице 1 приведены значения оптимальных настроек для различных значений параметров  $K$  и  $T$  объекта (2) и критериев качества регулирования 1) MinTime – минимальное время переходного процесса; 2) MinHigh – минимальное перерегулирование.

Анализ таблицы позволяет сделать вывод о том, что при использовании различных критериев настройки параметра регулятора существенно отличаются.

Так, если за критерий взять минимальное время переходного процесса, то коэффициент пропорциональности регулятора в среднем больше, чем в случае, когда качество регулирования определялось минимальным перерегулированием. Напротив,

постоянная времени интегрирования  $T_I = 1/K_I$  в среднем больше во втором случае.

Таблица 1. Сравнительный анализ оптимальных настроек регулятора при различных критериях качества регулирования *MinTime* и *MinHigh*

Параметры объекта		Параметры регулятора при <i>MinTime</i>		Параметры регулятора при <i>MinHigh</i>	
$K$	$T$	$K_R$	$K_I$	$K_R$	$K_I$
1	4	0,35	0,1	0,659	0,010
2	3	0,131	0,046	0,646	0,021
3	3	0,224	0,098	0,0004	0,029
5	5	0,725	1,179	0,064	0,0002

Более того, при возрастании использования в качестве критерия регулирования минимального перерегулирования постоянная времени интегрирования неограниченно растет, как следствие, интегрирующая составляющая формулы ПИ-регулятора (5) неограниченно уменьшается. Это ведет к тому, что регулятор превращается из пропорционально-интегрального просто в пропорциональный.

Это можно объяснить тем, что если приоритетом является минимум времени переходного процесса, то воздействие на объект осуществляется в большей степени пропорциональной составляющей регулятора. Если же главное – не допустить большого перерегулирования, то переходный процесс растягивается за счет увеличения постоянной времени интегрирования.

### Литература

1. БАХВАЛОВ Н.С. *Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения)*. – М.: Наука, Гл.ред.физ.-мат.лит., 1973. – 632 с.
2. БЕСЕКЕРСКИЙ В.А. *Радиоавтоматика: учебное пособие для вузов спец. «Радиотехника»*/ Под ред. В.А. Бесекерского. – М.: Высшая школа, 1985. – 271 с.
3. ВОРОНОВ А.А., КИМ Д.П., ЛОХИН В.М. *Теория автоматического управления*. – М.: Высшая школа, 1986. – 504 с.

4. ГАЙДУК А.Р., БЕЛЯЕВ В.Е., ПЬЯВЧЕНКО Т.А. *Теория автоматического управления в примерах и задачах с решениями в MATLAB: учебное пособие.*– С.-Пб.: Лань, 2011. – 464 с.
5. ГУТОВА С.Г., КАЗАКЕВИЧ И.А. *Применение симплекс-планирования для настроек параметров регулятора* // Сборник научных трудов II Международной конференции «Информационные технологии в науке, управлении, социальной сфере и медицине», Национальный исследовательский Томский политехнический университет, 2015. Часть I. / Под ред. О.Г. Берестневой, О.М. Гергет.– Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2015. – С. 32–36.
6. ЖИГЛЯЕВ А.А., ЖИЛИНСКАС А.Г. *Методы поиска глобального экстремума.*– М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – 248 с.
7. КАФАРОВ В.В. *Методы кибернетики в химии и химической технологии.*– М.: Химия, 1985. – 448 с.
8. КОНОВАЛОВ Б.И., ЛЕБЕДЕВ Ю.М. *Теория автоматического управления: учебное пособие.*– Томск: Томский государственный университет системуправления и радиоэлектроники, 2010. – 163 с.
9. КОРН Г., КОРН Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров.*– М.: Наука, 1968. – 47 с.
10. КУО Б. *Теория и проектирование цифровых систем управления.*– М.: Машиностроение, 1986. – 448 с.
11. МАКАРОВ И.М., МЕНСКИЙ Е.М. *Линейные автоматические системы.*– М.: Машиностроение, 1982. – 464 с.
12. МОСКАЛЕНКО В.В. *Электрический привод: учебник для студ. высш. учеб. заведений.*– М.: Издательский центр «Академия», 2007. – 368 с.
13. МИХАЛЕВИЧ С.С. *Частотный метод параметрического синтеза ПИД-регулятора для стационарных, интервальных и многосвязных САУ:* автореферат дис. ... канд. техн. наук. – Томск: Национальный исследовательский Томский гос. ун-т, 2015. – 22 с.
14. *Настройка типовых регуляторов по методу Циглера – Никольса: метод. указания к выполнению лаб. работы для*

*студентов, обучающихся по направлениям 210100 «Электроника и наноэлектроника» и 201000 «Биотехнические системы и технологии» / Сост. О.С. Вадутов.– Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. – 10 с.*

15. ФИТЕРМАН М.Я., ОРИЦУК А.А. *Настройка контуров регулирования САП*// Промышленные АСУ и контроллеры. – 2007. – №8.– [Электронный ресурс] – URL: <http://www.industrialauto.ru/modules/myarticles/article.php?storyid=57> (дата обращения: 28.04.2016).
16. ЧУДНЫЙ А.Ю. *Моделирование нелинейных характеристик для текущего контроля в АСУТП*: автореферат дис. ... канд. техн. наук. –Орел: Орловский гос. техн. ун-т, 2004. –17 с.

## **TUNING PARAMETERS PROPORTIONAL-INTEGRAL CONTROLLER USING THE METHOD OF SIMPLEX PLANNING**

**Svetlana Gutova**, State University of Kemerovo, Kemerovo, associate professor (gsg1967@mail.ru).

**Ivan Kazakevitch**, State University of Kemerovo, Kemerovo, master student (iakaz93@mail.ru).

*Abstract: The article addresses the problem of finding the optimal parameters of a proportional-integral controller using the two-dimensional simplex approach. When building a closed control system of oscillatory dynamic objects different regulatory criteria are used. In conclusion we provide the comparative analysis of the controller parameters found under different regulatory criteria.*

**Keywords:** proportional-integral controller, parameters adjustment, oscillatory link, simplex planning.

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии П.С. Щербаковым*

*Поступила в редакцию 07.01.2016.*

*Опубликована 31.05.2016.*