

УДК 519.2/.6+368.5  
ББК 2.22

## ОБОСНОВАНИЕ РЕГИОНАЛЬНОЙ МУЛЬТИРИСКОВОЙ ПРОГРАММЫ СТРАХОВАНИЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ КУЛЬТУР

Киселев В. Г.<sup>1</sup>

(ФИЦ ИУ РАН, Вычислительный центр  
им. А.А. Дородницына, Москва)

*Приводятся особенности страхования в сельском хозяйстве. Приводится математическая модель одной программы страхования – мультирисковой программы. Приводится математическая модель функционирования страховой компании. Приводится математическая модель экономики агрофирмы и исследуется эффект от страхования в зависимости от степени участия в страховании государства. Обсуждается процедура согласования параметров программы страхования между участниками страховой операции – агрофирмами, страховой компанией и государством.*

Ключевые слова: агрострахование, критерии приемлемости, информационная база, вероятностные характеристики, имитационное моделирование.

### 1. Введение

Основным способом обеспечения финансовой устойчивости сельскохозяйственных производителей является страхование сельскохозяйственных рисков. Практически для всех видов страхования разработаны приемлемые методики, основанные на имеющихся в достаточной мере статистических данных и использующие современные достижения актуарной математики

---

<sup>1</sup> Валерий Георгиевич Киселев, кандидат физико-математических наук, доцент (vgkiselev@yandex.ru).

(последние достижения в актуарной математике приведены в переводной монографии [1]). Исключение составляет страхование в сельском хозяйстве и особенно в его растениеводческой отрасли. В работах [5–10] отмечались основные особенности страхования сельскохозяйственного производства. Основная особенность заключается в том, что для обоснования различных программ агрострахования не хватает основного – достаточной информационной базы. Не исключены такие случаи, когда нет даже минимальной информации – данных о средних значениях урожайности страхуемой культуры, особенно когда речь идет о страховании вновь созданных агрофирм, или об использовании инновационных методов производства, или о страховании интродуцируемых культур. Второй важной особенностью является коррелированность страховых случаев, объясняющаяся тем, что многие застрахованные агрофирмы находятся в одной агроклиматической зоне, и если в некоторый год сложились неблагоприятные погодные условия в этой зоне, то недобор урожая будет у всех застрахованных хозяйств этой зоны и им всем придется выплачивать причиненный погодой ущерб, а это возможно только при наличии больших средств, которые страховая фирма может накопить в другие благоприятные годы. Это существенное отличие агрострахования от других классических видов страхования, когда страховые случаи независимы и одновременно происходят лишь у малой части страхователей и страховые выплаты можно производить за счет большого количества других участников страховой компании, не потерпевших ущерба.

Третьей особенностью, отличающей агрострахование от классических видов страхования, является оценка доли участия застрахованных природных факторов в недоборе урожая. Достоверная оценка потерь урожая является очень сложной задачей. Величина потерь зависит не только от природных (объективных) факторов, но и от человеческого фактора, коим является производственная деятельность агрофирмы. Вопросы о величине потерь урожая должны рассматриваться совместно с представителями агрофирмы (страхователя) и страховой компании (страховщика).

Наконец, четвертой, очень важной особенностью является участие государства в страховании сельскохозяйственного производства. Как показывает опыт, без участия государства агрострахование невозможно.

## **2. Цель и задачи исследования**

В настоящее время система страхования в сельском хозяйстве Российской Федерации находится в стадии активного становления. Пока по существу только вырабатываются концепции системы страхования, и это связано с изменением целей и принципов конструируемого механизма защиты интересов сельскохозяйственных производителей, что, в свою очередь, связано с известными перестроечными процессами в стране. Для выработки приемлемых программ страхования урожая необходим системный подход, учитывающий интересы всех участников процедуры страхования: страховых фирм, страхователей-агрофирм, а также государственные интересы.

Целью данного исследования является создание системы математических моделей, с помощью которых можно будет построить процедуру согласования интересов участвующих в данной программе страхования всех трех заинтересованных сторон и разработка самой этой процедуры.

Для этого будут рассмотрены следующие задачи:

- построение экономических моделей функционирования страховой компании и агрофирмы в условиях выполнения обязательств, взятых по заключению страхового договора по данной программе, и исследование этих моделей;
- исследование вопроса о необходимой и имеющейся информационной базе;
- разработка процедуры согласования параметров, определяющих свойства данной программы страхования производства сельскохозяйственной культуры.

Следует отметить, что касается экономических моделей агрострахования, то публикации на эту тему вообще отсутствуют, а в доступных публикациях (например, [12, 13]) приводятся

лишь словесные описания некоторых программ и даются некоторые рекомендации относительно значений традиционных параметров программ страхования, таких как величина страхового тарифа, степень участия государства в данной страховой программе и т.д.

Что касается вопроса о необходимой информации, то при описании программ страхования обычно ограничиваются рекомендацией использовать информацию только за последние годы (как правило, это 5 лет). Это никак не обосновывается и, как будет следовать из дальнейшего изложения, этой информации недостаточно для принятия обоснованных решений.

Что же касается процедуры согласования параметров, определяющих страховую программу, то в реальной жизни такая процедура вообще отсутствует. Как происходит подобное согласование можно судить по автострахованию ОСАГО – оно происходит путем народного обсуждения и даже обсуждения на уровне Госдумы. Хотелось бы иметь прозрачную процедуру согласования, основанную на достоверной информации и подтвержденную достоверными результатами исследований.

Все эти перечисленные задачи будут рассмотрены на примере одной программы агрострахования.

Все результаты, касающиеся агрострахования, получены автором. В тех же немногих случаях, когда рассматриваются общие вопросы актуарной математики, сделаны соответствующие ссылки.

### **3. Мультирисковая программа страхования сельскохозяйственных культур**

Имеется достаточно много видов программ страхования в сельском хозяйстве. Основные программы описаны в [4, 9]. Здесь мы будем рассматривать применение только одной программы страхования – мультирисковой программы страхования производства сельскохозяйственных культур. Это самый распространенный, если не единственный, вид агрострахования в нашей стране.

Рассмотрим сначала случай страхования урожая одной культуры одной фирмой на площади  $S$ . Пусть  $y_-$  и  $y_+$  – минимальная и максимальная урожайности соответственно, а  $Ey$  – ее среднее значение. Пусть цена единицы полученной продукции равна  $c$ . Страховая урожайность  $y_a$  – то значение урожайности, ниже которой страховая компания выплачивает страховое возмещение, равное стоимости недополученного урожая. Обычно значение страховой урожайности задают в виде  $y_a = \alpha Ey$ , где  $0 < \alpha < 1$  – некоторый коэффициент. При сделанных предположениях страховая сумма, исходя из которой определяется величина страхового взноса, равна  $cSy_a$ .

Страховой взнос (страховая премия) – это плата за страхование – сумма, которую страхователь должен заплатить страховой компании, равен  $\pi = \delta cSy_a$ , где  $0 < \delta < 1$  – страховой тариф – ставка страховой компании, задаваемая ею с учетом собственного финансового благополучия. С другой стороны, как это принято в страховом деле [1], страховая премия вычисляется из условия  $\pi = cS(1 + \theta)Er$ , где  $\theta > 0$  – величина страховой надбавки, а страховое возмещение  $r = cS(y - y_a)_+$  (нижний знак (+) означает функцию Хевисайда). Будем считать, что часть  $0 < \gamma < 1$  страховой премии выплачивается из федерального и местного бюджетов. Следовательно, страхователь должен заплатить страховой фирме только величину  $(1 - \gamma)\pi$ . Такова мультирисковая программа страхования.

### *ВЛИЯНИЕ СТРАХОВАНИЯ НА ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ АГРОФИРМЫ.*

Будем предполагать, что известна функция распределения урожайности выращиваемой культуры. Первый показатель, ради чего и производится страхование, – это надежность получения урожая. Здесь все просто. Если страховая урожайность равна  $y_a$ ,  $P(y < y_a) = p_a$ , то это значит, что с вероятностью  $(1 - p_a)$  производитель будет получать запланированный урожай, а с вероятностью  $p_a$  будет недобор, который в какой-то мере будет компенсироваться страховой компанией.

Пусть страхователь выбрал для себя значение  $y_a$  и решил застраховать урожай с площади  $S$ . Тогда страховые выплаты

страхователя – плата за получаемую надежность – равны  $\pi_f = cS\delta\alpha y_\alpha(1 - \gamma)$ , где  $\gamma$  – доля участия государства.

В работах [7, 8] показано, что

$$\delta = (1 + \theta) \int_{y_-}^{y_\alpha} \left(1 - \frac{y}{y_\alpha}\right) f(y) dy,$$

т.е. величина страхового тарифа  $\delta$  определяется величиной страховой надбавки  $\theta$ .

С учетом изложенного выше

$$\pi_f = cS(1 - \gamma)(1 + \theta) \int_{y_-}^{y_\alpha} (y_\alpha - y) f(y) dy.$$

В конкретный год доход агрофирмы

$$D_f = cS y + r_f - \pi_f,$$

т.е. равен доходу от реализации выращенной продукции, равному  $cSy$ , минус страховые платежи  $\pi_f = (1 - \gamma)\pi_l$  ( $\pi_l$  – премия, получаемая страховой компанией) и плюс страховое возмещение  $r_f = (y_\alpha - y)_+$ , полученное от страховой компании при недостаточном урожае.

Средний доход агрофирмы в этом случае равен

$$\frac{1}{cS} ED_f = Ey + \psi \int_{y_-}^{y_\alpha} (y_\alpha - y) f(y) dy = Ey + \psi Er,$$

где

$$\psi = \gamma - \theta(1 - \gamma) -$$

очень важный показатель, который мы назовем индикатором программы страхования. Отсюда следует, что при  $\psi > 0$  средний доход агрофирмы при страховании больше среднего дохода без страхования.

Это условие удобно переписать или в виде

$$\theta < \frac{\gamma}{1 - \gamma},$$

или в виде

$$\gamma > \frac{\theta}{1 + \theta}.$$

В первом случае – это ограничение сверху на величину рискованной надбавки при фиксированном  $\gamma$ , а второе неравенство является ограничением снизу на величину господдержки при фиксированной страховой надбавке. В противном случае страхование уменьшает средний доход агрофирмы. При отсутствии господдержки ( $\gamma = 0$ ) при страховании средний доход фирмы убывает.

### ЭКОНОМИКА СТРАХОВОЙ ФИРМЫ ПРИ МУЛЬТИРИСКОВОМ СТРАХОВАНИИ

Исследуем теперь вопрос о том, как влияет рассматриваемое страхование на страховую фирму.

Годовой доход страховой компании равен

$$D_t = (1 + \theta)Er - r ,$$

а средний доход

$$ED_t = \theta Er .$$

Другое выражение для среднего дохода можно представить в следующем виде:

$$ED_t = cS\theta \int_{y_-}^{y_\alpha} (y_\alpha - y)f(y)dy .$$

При нулевой рискованной надбавке  $\theta$  средний доход страховой компании также нулевой, поскольку вся премия в среднем идет на компенсацию рисков. Необходимым условием функционирования страховой компании является условие  $\theta > 0$ . Часть премии в размере  $\theta cSEr$  идет на содержание фирмы (аренда и содержание помещения, проведение необходимых работ по страхованию, зарплата сотрудников, отчисления на развитие фирмы и т.д.).

Выделим отдельно важную составляющую расходов – расходы на содержание службы сопровождения программ страхования. Достоверная оценка причин потерь урожая является очень сложной задачей. Величина потерь зависит не только от природных (объективных) факторов, но и от человеческого фактора, коим является производственная деятельность агрофирмы

Вопросы о величине потерь урожая должны рассматриваться совместно с представителями агрофирмы (страхователя) и страховой компании (страховщика). Эти вопросы становятся более актуальными, если агрофирма пользуется господдержкой в страховании своего урожая.

Все эти противоречия между страхователем и страховщиком по определению ущерба должны решаться независимой экспертизой, которая, в свою очередь, должна опираться на достоверную информацию. Такую информацию должна предоставлять служба сопровождения программ страхования, которая по имеющейся агроклиматической информации с помощью комплекса математических моделей должна уметь вычислять эти ущербы.

Это очень важная составляющая затрат страховой компании, особенно в рассматриваемой мультирисковой программе страхования. Как показывает зарубежный опыт, в структуре тарифа в этом виде страхования на службу мониторинга уходит примерно 20–30% страховой премии.

При разработке стратегии функционирования страховой компании кроме среднего дохода используются (см., например [1]) такие показатели, как вероятность неразорения, величина максимальных потерь и другие, связанные с финансовой устойчивостью фирмы. Из показателей, связанных с устойчивой деятельностью фирмы, наиболее важным является вероятность неразорения. На интуитивном уровне понятно, что это такое, а детальное описание этого факта будет проведено в следующих разделах.

Для того чтобы обезопасить себя от разорения, страховые компании могут прибегнуть к механизму перестрахования, который состоит в следующем. Страховщик при заключении договоров страхования принимает на себя финансовую ответственность за возможные риски и за это получает премию. Если для страховой компании крупные выплаты нежелательны, а это, как мы видели, весьма вероятно в агростраховании, то она может передать часть премии другой страховой компании – перестраховщику взамен на обязательство оплатить часть риска. Существуют разные схемы перестрахования, но экономическая



суть перестрахования для страховой компании одна, а именно: в результате перестрахования страховщик получает средний доход меньше. Эта оценка получена в [8] для случая одного хозяйства и одной страхуемой культуры, но она справедлива и для общего случая, поскольку не используют конкретный вид получаемых премий и конкретный вид премий.

Для классических видов страхования показано (см. [1, 2]), что при перестраховании вероятность неразорения повышается, т.е. повышается надежность функционирования страховой системы. Однако этот результат является естественным, и мы вправе предположить выполнение этого свойства и для агрострахования. Но строгое обоснование надежности страховой компании требует самостоятельного исследования. Таким образом, смысл перестрахования заключается в том, что за счет уменьшения дохода страховая фирма повышает надежность заключенных сделок.

#### **4. Информационная база региональной системы агрострахования**

Из изложенного выше следует, что для вычисления необходимых величин, т.е. для обоснования программы агрострахования, необходимо знать распределение случайной величины – урожайности страхуемой культуры. Для этого необходимо иметь достаточно длинные статистические ряды. Такая информация имеется как для всей России в целом, так и для отдельных административных единиц в ежегодных статистических справочниках, например, таких как [14].

В работах [7, 10] был проведен анализ этих рядов, который показал, что эти ряды не могут относиться к одной стационарной случайной величине, что имеются на некоторых временных отрезках тренды, и там же были названы причины этого факта. В частности, были отмечены основные факторы, влияющие на урожайность:

- климатические условия, которые со временем имеют тенденцию к изменению;

- научно-технический прогресс – использование новых перспективных сортов, современных технологий и современной техники;
- человеческий фактор – качество выполняемых работ.

Последний социальный фактор очень важен. Известно, что на опытных участках урожайности культур могут быть в несколько раз выше, чем в соседних хозяйствах при использовании одних и тех же технологий выращивания.

Таким образом, необходимо рассматривать урожайность как случайный процесс с ненулевым трендом и вычислять по имеющимся рядам эмпирические характеристики этого процесса и прогнозировать на перспективу урожайности нужно весьма осторожно. Если первый климатический фактор определяет в основном разброс получаемых урожаев, то второй и третий факторы в значительной степени определяют тренды средних значений. Так, падение урожайностей на 10-летнем интервале примерно с 1988 г. по 1998 г., совпадающем с периодом не очень понятных преобразований в стране, можно объяснить всеобщей неразберихой, а после этого в связи со стабилизацией обстановки в целом по стране наблюдался рост урожайности. Таким же образом можно объяснить медленный положительный тренд с 1970 г. по 1988 г., когда сельскому хозяйству стали уделять большое внимание. Однако это всего лишь один из возможных способов объяснения подобных явлений. По-видимому, найдутся и другие правдоподобные объяснения, в частности, возможно, что эти тренды объясняются климатическими изменениями. В общем, здесь ситуация абсолютно идентична той, которая наблюдается с объяснениями изменения климата, когда одни специалисты считают, что наблюдается всеобщее потепление, и объясняют причины этого явления, а другие с не меньшей убежденностью объясняют наблюдаемый факт повышения температуры временным явлением, за которым последует похолодание.

Таким образом, мы отметили влияние антропогенного фактора на урожайность сельскохозяйственных культур, и это влияние может существенно изменить характеристики случайного процесса – урожайности.

Следовательно, в силу приведенных причин мы не можем считать, что длинный временной ряд относится к одной случайной величине – урожайности страхуемой культуры. Но, с другой стороны, нам необходимо знать функцию распределения этой случайной величины, которая тем точнее, чем больше привлекается измерений для ее построения. В данной ситуации остается один выход – воспользоваться методами имитационного моделирования [11], которые в данном случае будут заключаться в рассмотрении различных вариантов использования имеющейся информации, в частности, ее корректировке на основании каких-либо гипотез. Если речь идет о страховании интродуцируемой культуры или о новой агрофирме, о чем говорилось выше, такой подход является единственно возможным.

Не останавливаясь подробно на деталях такого подхода, будем считать, что в нашем распоряжении имеется эмпирическая функция распределения случайной величины – урожайности страхуемой сельскохозяйственной культуры.

## **5. Региональное мультирисковое страхование**

В разделе 3 была рассмотрена мультирисковая программа страхования урожая одной культуры одним хозяйством. Обобщим теперь сказанное на более реальный случай, когда в страховании участвуют несколько агрофирм и страхуется несколько культур.

Пусть  $j$  означает номер хозяйства;  $J$  – множество всех хозяйств, участвующих в страховании своей продукции;  $k$  – номер культуры;  $K$  – множество всех культур. Пусть считается известным, что  $j$ -я фирма заключила со страховой компанией договор на страхование  $k$ -й культуры на площади  $S_{kj}$  со страховым уровнем  $y_{akj}$ .

Пусть страховой тариф при страховании  $k$ -й культуры для  $j$ -й фирмы равен  $\delta_{kj}$  (страховые тарифы для разных культур и разных фирм в общем случае могут различаться)

Страховое возмещение  $j$ -й агрофирме по  $k$ -й культуре равно

$$r_{kj} = c_k S_{kj} (y_{akj} - y_{kj})_+,$$

где смысл обозначений очевиден. Всего страховая фирма возьмет всем хозяйствам по всем застрахованным культурам

$$R = \sum_{k,j} r_{kj}.$$

Страховая премия, полученная страховой фирмой от всех хозяйств по всем страхуемым культурам, равна

$$\Pi = \sum_{k,j} \pi_{k,j} = (1 + \theta) \sum_{k,j} E r_{k,j},$$

где  $\theta$  – введенная ранее страховая надбавка.

С другой стороны,

$$\pi_{k,j} = c_k \delta_{kj} S_{kj} y_{\alpha kj},$$

$$\Pi = \sum_{k,j} c_k \delta_{kj} S_{kj} y_{\alpha kj} = (1 + \theta) \sum_{k,j} E r_{k,j},$$

и мы можем получить зависимость величины страхового тарифа от величины страховой надбавки  $\theta$ , которую задавать более естественно при формировании программы страхования. Это соотношение можно получить, приравняв два выражения для  $\pi_{kj}$ . Из этого равенства получим

$$\delta_{kj} = (1 + \theta) E \left(1 - \frac{y_{kj}}{y_{\alpha kj}}\right)_+.$$

Отсюда следует, что, задав одну единственную величину  $\theta$  – страховую надбавку, страховщик может назначить величину страхового тарифа для каждой культуры и для каждой фирмы.

Далее, зная только значение  $\theta$ , можно назначить, например, средний для всех хозяйств страховой тариф по каждой культуре. Для этого надо воспользоваться соотношением

$$\sum_j \pi_{kj}(\delta_k) = (1 + \theta) \sum_j E r_{kj}.$$

Преобразуем это соотношение следующим образом:

$$c_k \delta_k \sum_j S_{kj} y_{\alpha kj} = (1 + \theta) \sum_j E r_{kj}.$$

Отсюда получим искомое выражение для страхового тарифа для  $k$ -й культуры.

$$\delta_k = (1 + \theta) \frac{\sum_j S_{kj} E(y_{\alpha kj} - y_{kj})_+}{\sum_j S_{kj} y_{\alpha kj}}.$$

Заметим, что страховой тариф, средний для всех культур, по-видимому, не имеет смысла, поскольку риски по выращиванию этих культур могут сильно отличаться.

### *ФИНАНСОВЫЕ ПОТОКИ В СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ ПРИ МУЛЬТИРИСКОВОМ СТРАХОВАНИИ*

Рассмотрим сначала стационарный случай функционирования страховой компании, когда заключенные с агрофирмами страховые договора со временем не меняются, т.е. величины  $c$  и  $S_{kj}$  постоянны.

Финансы страховой компании складываются следующим образом. Ежегодный доход равен

$$D_I = \Pi - R$$

или

$$D_I = (1 + \theta) \sum_{k,r} E r_{kj} - \sum_{k,r} r_{k,j}.$$

Тогда средний доход страховой фирмы – один из основных показателей ее благополучия – можно вычислить следующим образом:

$$E D_I = \theta \sum_{k,j} E r_{k,j}.$$

Преобразуем это выражение, используя соотношение для выплат  $r_{kj}$ :

$$E D_I = \theta \sum_{k,j} c_k S_{kj} E(y_{\alpha kj} - y_{kj})_+,$$

и поскольку

$$E(y_{\alpha kj} - y_{kj})_+ = \int_{\bar{y}_{kj}}^{y_{\alpha kj}} (y_{\alpha kj} - y_{kj}) dF_{kj},$$

где  $F_{kj}$  – эмпирическая функция распределения урожайности  $y_{kj}$ , то

$$ED_I = \theta \sum_{k,j} c_k S_{kj} \int_{y_{kj}^-}^{y_{\alpha kj}} (y_{\alpha kj} - y_{kj}) f(y_{kj}) dy_{kj}.$$

Заметим, что при  $\theta = 0$  средний доход страховой компании равен нулю, поскольку вся премия идет на компенсацию рисков.

### *ВЕРОЯТНОСТЬ НЕРАЗОРЕНИЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ ПРИ МУЛЬТИРИСКОВОМ СТРАХОВАНИИ*

Как уже было сказано выше, из показателей, связанных с устойчивой деятельностью фирмы, наиболее важным является вероятность неразорения.

Введем следующие обозначения. Деятельность фирмы будем рассматривать на конечном интервале времени в  $T$  лет, т.е. время будет принимать дискретные значения  $t = 0, 1, 2, \dots, T$ . Пусть  $U(t)$  – капитал страховой фирмы к концу года  $t$ , а начальный капитал равен  $u$ , т.е.  $U(0) = u$ . Пусть  $\pi(t)$  означает страховые поступления в год  $t$ , а  $r(t)$  – выплаты в этот год. Тогда можно записать следующее соотношение:

$$U(t) = U(t-1) + \pi(t) - r(t),$$

$$U(0) = u, \quad t = 1, 2, \dots.$$

Решая это разностное уравнение, для любого времени  $t$  получим

$$U(t) = u + \Pi(t) - R(t),$$

где  $\Pi(t) = \sum_{\tau=1}^t \pi(\tau)$ ,  $R(t) = \sum_{\tau=1}^t r(\tau)$  – суммарные за  $t$  лет поступления и выплаты соответственно.

При конкретной реализации процесса  $U(t)$  может так случиться, что в некоторый момент времени  $\tau$  требуемые выплаты превысят имеющийся капитал, т.е.  $U(\tau) < 0$ . Такой момент времени называют моментом разорения. Вероятность  $\Psi(u, t) = P(\tau \leq t)$  называют вероятностью разорения до момента  $t$ , при условии, что начальный капитал равен  $u$  (мы здесь будем рассматривать только практически интересный случай конечного времени, хотя разорению на бесконечном интервале посвящено больше исследований). Соответственно,  $\varphi(u, t) = 1 - \Psi(u, t)$  будет вероятностью неразорения.

Изучению этой характеристики страхования посвящено очень много исследований (см. [1, 2]), однако все они проведены в предположении, что известны характеристики соответствующих процессов, что является допустимым предположением для классических видов страхования, но в агростраховании максимум, что может быть известно, – это эмпирическая функция распределения случайной величины – урожайности страхуемой культуры. В работе [8] приведены два метода вычисления вероятности неразорения для такого случая информированности и для страхования одной культуры одним хозяйством.

Реально же страховая компания заключает договора с большим количеством хозяйств и по нескольким культурам. Поэтому реальное уравнение, описывающее динамику финансов страховой компании, с учетом соотношений должно иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
 U(t) &= u + \sum_{\tau=1}^t [\Pi(\tau) - R(\tau)] = u + \Pi(t) - \sum_{\tau=1}^t R(\tau) = \\
 &= u + \Pi(t) - \sum_{\tau=1}^t \sum_{k,r} c_k S_{kj} [y_{akj} - y_{kj}(\tau)]_+ = \\
 &= u + \sum_{\tau=1}^t [(1 + \theta) \sum_{k,r} Er_{kj}(\tau) - \sum_{k,r} r_{k,j}(\tau)] = \\
 &= u + \sum_{\tau=1}^t \sum_{k,r} c_k S_{kj} [(1 + \theta) E(y_{akj} - y_{kj}(\tau))_+ - (y_{akj} - y_{kj}(\tau))_+].
 \end{aligned}$$

Здесь приведено нужное нам соотношение в нескольких видах, удобных в разных случаях. Заметим, что это соотношение справедливо в предположении, что страховые договора с хозяйствами не меняются от года к году.

Перепишем это соотношение еще в одном, удобном для нашего исследования, виде

$$U(t) = u + \Pi(t) - \sum_{\tau=1}^t \sum_k \sum_j r_{kj}(\tau).$$

Первые два слагаемые в этом выражении – детерминированные величины, третье – случайная величина. Следовательно,

для вычисления вероятности неразорения необходимо знать функцию распределения суммы

$$\sum_{\tau=1}^t \sum_k \sum_j r_{kj}(\tau).$$

Как следует из предыдущего раздела о зональном агростраховании, урожайности хозяйств любой культуры в информационной зоне страхования связаны линейным соотношением  $y_j(t) = \alpha_j y(t)$ , где  $y(t)$  – средняя урожайность какой-либо культуры в зоне страхования. Таким образом,

$$r_{kj}(\tau) = r_{kj}(y_k(\tau))$$

и

$$\sum_j r_{kj}(\tau) = \sum_j r_{kj}(y_k(\tau)) = r_k(y_k(\tau)) -$$

выплаты страховой компании всем хозяйствам по  $k$ -й культуре в год номера  $\tau$ .

Тогда

$$\sum_{\tau=1}^t r_k(y_k(\tau)) = R_k(t) -$$

суммарные выплаты за  $t$  лет всем хозяйствам по страхуемой культуре.

Поскольку случайные величины  $y_k(\tau)$ ,  $\tau = 1, 2, \dots$ , – независимы, то и  $r_k(y_k(\tau))$  – независимые, и  $R_k(t)$  является суммой независимых случайных величин. Закон распределения этой суммы согласно центральной предельной теореме стремится к нормальному с параметрами

$$N(ER_k, DR_k).$$

Поскольку  $r_k(y_k(\tau))$ ,  $\tau = 1, 2, \dots$ , независимы и одинаково распределены, то

$$ER_k(y_k) = t ER_k(y_k), DR_k = t DR_k(y_k).$$

Таким образом, при достаточно больших  $t$  случайная величина

$$R(t) = \sum_{\tau} \sum_k \sum_j = \sum_k R_k(t)$$

является композицией  $|K|$  независимых случайных величин, распределенных приближенно по нормальному закону, т.е. и сама



она распределена приближенно по нормальному закону с параметрами

$$ER(t) = \sum_k ER_k(t),$$

$$DR(t) = \sum_k DR_k(t) + 2 \sum_{k_1 < k_2} \rho_{k_1 k_2}(t) \sqrt{DR_{k_1} DR_{k_2}},$$

где  $\rho_{k_1 k_2}(t)$  – коэффициент корреляции случайных величин  $R_{k_1}(t)$  и  $R_{k_2}(t)$ ,  $k_1, k_2 \in K$ .

К сожалению, эти коэффициенты корреляции неизвестны, можно лишь эмпирически определить коэффициенты корреляции урожайностей культур, т.е.  $\rho_{k_1 k_2}(R_{k_1}(1), R_{k_2}(1))$ .

Для получения нижней оценки вероятности неразорения можно воспользоваться принципом гарантированного результата [3]. В данном случае это выглядит следующим образом. Выпишем цепочку соотношений

$$\varphi(u, t) = P(U(t) > 0) = P(R(t) < u + \Pi(t)) = F_R(u + \Pi(t)),$$

$$\varphi(u, t) \geq \min_{k_1, k_2 \in K} F_{R(k_1, k_2)}(u + \Pi(t)),$$

где  $F_R(x)$  – функция распределения нормальной величины  $R(t)$ , зависящей от коэффициентов корреляции согласно выше приведенному соотношению.

Можно получить и верхнюю оценку вероятности неразорения. Для этого воспользуемся очевидным ее свойством: функция  $\varphi(u, t)$  убывает по  $t$  к  $\varphi(t)$  – вероятности неразорения на бесконечном интервале времени. Это свойство отражает тот факт, что чем больше рисков, тем меньше надежность системы.

Из этого свойства следует, что для получения верхней оценки вероятности неразорения достаточно рассмотреть первый год функционирования страховой компании.

Тогда с учетом предыдущих обозначений

$$\varphi(u, 1) = P(u + \pi > R(1)) =$$

$$= P \left[ \sum_{k,j} c_k S_{kj} y_{kj} \geq \sum_{k,j} c_k S_{kj} y_{\alpha kj} (1 - \delta_{kj}) - u \right].$$

Далее, учитывая отмеченную ранее линейную зависимость урожайностей в хозяйствах и введя соответствующее обозначение, получим

$$\varphi(u, 1) = P \left[ \sum_k \alpha_k y_k \geq A - u \right].$$

Эмпирическую функцию распределения суммы в последнем выражении можно построить, имея достаточно длинные временные ряды (об этом говорилось выше в соответствующем разделе), и получить нужную нам оценку.

Далее, имея такую функцию распределения, можно оценить величину требуемого начального капитала для обеспечения требуемой вероятности неразорения.

В качестве примера рассмотрим простейший случай страхования одной культуры. Тогда

$$\varphi(u, 1) = P \left[ y > y_\alpha (1 - \delta) - \frac{u}{cS} \right].$$

Зададимся некоторым уровнем вероятности неразорения  $\tilde{p}$ , т.е. потребуем, чтобы вероятность неразорения была бы не меньше этой величины. Тогда должно выполняться неравенство

$$P \left[ y > y_\alpha (1 - \delta) - \frac{u}{cS} \right] \geq \tilde{p}.$$

Отсюда следует неравенство

$$y_\alpha (1 - \delta) - \frac{u}{cS} \leq y_{\tilde{p}},$$

и, следовательно,

$$u > cS(y_\alpha (1 - \delta) - y_{\tilde{p}}).$$

Здесь  $y_{\tilde{p}} = \arg[F(y) = 1 - \tilde{p}]$ , а  $F(y)$  – функция распределения случайной величины  $y$ .

Заметим, что в случае абсолютной надежности  $\tilde{p} = 1$  и последнее неравенство принимает вид

$$u > cS(y_\alpha (1 - \delta) - y_-).$$

### МЕХАНИЗМ ПЕРЕСТРАХОВАНИЯ

Механизм перестрахования о котором вкратце упоминалось в разделе 2, состоит в следующем. Страховщик при заключении договоров страхования принимает на себя финансовую ответственность за возможные риски и за это получает премию. Если для страховой компании крупные выплаты нежелательны, а это, как мы видели, весьма вероятно в агростраховании, то она может передать часть премии другой страховой компании – перестраховщику взамен на обязательство оплатить часть риска. Существуют разные схемы перестрахования. Мы здесь опишем одну из них, используя ранее введенные обозначения.

### ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЕ ПЕРЕСТРАХОВАНИЕ

В данном случае схема перестрахования следующая. Величина премии страховщика в год  $t$  с учетом нескольких страхуемых культур и многих страхователей – агрофирм равна

$$\pi(t) = \sum_{k,j} c_k S_{kj} \delta_k y_{\alpha kj},$$

а выплаты по риску равны

$$r(t) = \sum_{k,j} c_k S_{kj} (y_{\alpha kj} - y_{kj}(t))_+.$$

Часть риска  $\beta r(t)$ ,  $0 \leq \beta \leq 1$ , выплачивает страховщик, а остальную  $(1 - \beta)r(t)$  – перестраховщик. За это перестраховщик получает некоторую часть премии страховщика. Пусть рисковые запасы страховщика и перестраховщика равны  $\theta$  и  $\theta_1$  соответственно. Как правило,  $\theta_1 < \theta$ , поскольку у перестраховщика меньше издержки.

Премия страховщика – то, что он получает от страхователей, равна  $\pi(t) = Er(t)(1 + \theta)$ , а премия перестраховщика  $\pi_1(t) = (1 - \beta) Er(t)(1 + \theta_1)$ . В результате перестрахования страховщик получает средний доход

$$\begin{aligned} E\tilde{D}_t &= \pi(t) - \pi_1(t) - \beta Er(t) = \\ &= Er(t)(\theta - \theta_1(1 - \beta)) < \theta Er(t) = ED_t. \end{aligned}$$

Эта и другие оценки, которые будут приведены в данном разделе, получены в [2] для случая одного хозяйства и одной

страхуемой культуры, но они справедливы и для общего случая, поскольку не используют конкретный вид получаемых премий.

Для классических видов страхования показано (см. [1, 2]), что при перестраховании вероятность неразорения повышается, т.е. повышается надежность функционирования страховой системы. Этот результат является естественным, и мы вправе предположить выполнение этого свойства и для агрострахования.

Средние доходы перестраховщика в рассматриваемом нами пропорциональном перестраховании равны

$$E\tilde{D} = Er(t)\theta_1(1 - \beta),$$

а суммарные доходы равны

$$E\tilde{D}_1 + E\tilde{D} = \theta Er(t) = ED_1,$$

и это естественно.

Таким образом, финансовые показатели страховой компании ухудшаются, но показатели надежности повышаются. В этом заключается смысл перестрахования – за счет некоторой потери прибыли повысить надежность функционирования системы.

## 6. Выводы

Целью данной работы была разработка системы математических моделей, с помощью которых можно построить процедуру согласования интересов участвующих в данной программе страхования всех трех заинтересованных сторон. Для этого были предложены математические модели, описывающие интересы всех заинтересованных участников – агрофирм, страховой компании и государства.

При некоторых предположениях были проведены исследования, показывающие, как зависят интересы всех участников от определяющих параметров конкретной программы агрострахования и выявившие основные экономические свойства страхования растениеводческих культур.

Был также исследован вопрос о необходимом и имеющемся информационном обеспечении агрострахования. На одном

примере было показано, что получение необходимых достаточно длинных рядов возможно только с помощью имитационного моделирования и рассмотрении различных гипотез предыстории и будущего. Это принципиальное отличие от классических видов страхования.

По-видимому, все несколько идеализированные аналитические исследования могут только помочь понять некоторые закономерности финансового состояния как страховой компании, так и агрофирмы, а реальные выводы необходимо делать, проводя эксперименты с помощью имитационного моделирования на некоторых искусственно спрогнозированных рядах урожайности. Эти случайные ряды урожайности должны учитывать скорректированную предыдущую статистику, возможные тренды, связанные с привлечением новых технологий, новых сортов и т.д.

### **Литература**

1. БАУЭРС Н., ГЕРБЕР Х., ДЖОНС Д. и др. *Актuarная математика*. – М.: Янус-К, 2001. – 655 с.
2. БОЙКОВ А.В. *Страхование: актуарные расчеты и математические модели страхования*. – М.: ОРГСЕРВИС-2000, 2008. – 172 с.
3. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. *Введение в теорию исследования операций*. – М.: Наука, 1971. – 383 с.
4. ДОВБИЙ И.П. *Страхование агрорисков за рубежом // Банки. Лизинг. Страхование*. – 2008. – №6.
5. КИСЕЛЕВ В.Г. *Математические модели экономики страховой агрокомпании*. – М.: ВЦ РАН, 2013. – 30 с.
6. КИСЕЛЕВ В.Г. *Имитационная система мониторинга программ агрострахования*. – М.: ВЦ РАН, 2010. – 34 с.
7. КИСЕЛЕВ В.Г. *Информационная база региональной системы агрострахования // Труды 5-й международной конференции «Управление большими системами»*. – М.: ИПУ РАН, 2011.
8. КИСЕЛЕВ В.Г. *Актuarная математика в агростраховании*. – М.: ВЦ РАН, 2011. – 29 с.

9. КИСЕЛЕВ В.Г. *Системный анализ основных систем агро-страхования*. – М.: ВЦ РАН, 2012. – 28 с.
10. КИСЕЛЕВ В.Г. *Особенности информационного обеспечения системы страхования сельскохозяйственного производства* // Материалы международной научно-практической конференции «Математика и ее приложения. Экономическое прогнозирование: модели и методы». – Орел, 2011. – С. 236–240.
11. ПАВЛОВСКИЙ Ю.Н., БЕЛОТЕЛОВ Н.В., БРОДСКИЙ Ю.И. *Имитационное моделирование*. – М.: Академия, 2008. – 236 с.
12. *Страхование урожая сельскохозяйственных культур с государственной поддержкой*. – Практическое пособие по организации страхования сельхозкультур. – М.: МСХ РФ, ФГУФАГПССАП (Федеральное государственное учреждение «Федеральное агентство по государственной поддержке страхования в сфере агропромышленного производства» Министерства сельского хозяйства РФ).
13. *Современная практика сельскохозяйственного страхования*. // Агрострахование в России. – 2004. – Октябрь. – С. 29–42.
14. *Сельское хозяйство Тверской области. Статистический сборник*. – Тверь, 2002.

## **TO THE RATIONALE MULTIRISQUE REGIONAL PROGRAM OF CROP INSURANCE**

**Valeriy Kiselev**, A.A. Dorodnicyn Computing Center of RAS, Moscow, Cand.Sc., assistant professor (vgkiselev@yandex.ru).

*We describe the specific features of agricultural insurance. A mathematical model for the multi-risk insurance is developed. An agricultural firm mathematical model is developed and the effect of insurance is investigated depending on the degree of government participation. We also discuss the procedure of negotiation between participants of the insurance operation: agricultural firms, insurance companies and the government.*

**Keywords:** insurance, eligibility criteria, information framework, probabilistic characteristics, simulation.

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Н.И. Базенковым.*

*Поступила в редакцию 01.06.2015.  
Опубликована 31.05.2016.*