УДК 681.51
ББК 3.9.6.5-01

СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ФОРНАЗИНИ–МАРКЕЗИНИ[1]

Емельянова Ю. П.[2]
(*Арзамасский политехнический институт НГТУ им. Р.Е. Алексеева, Арзамас*)

Рассматриваются 2D-системы, описываемые моделью Форназини–Маркезини. Доказаны прямая и обратная теоремы об экспоненциальной устойчивости таких систем в терминах векторной функции Ляпунова. Для решения задач стабилизации вводятся понятия экспоненциальной пассивности и векторной функции накопления. Приводится пример, демонстрирующий эффективность новых результатов.

Ключевые слова: 2D-системы, модель Форназини–Маркезини, устойчивость, функция Ляпунова, стабилизирующее управление, линейные матричные неравенства (ЛМН).

Введение

Системы с многомерной (nD)-динамикой описываются моделями, в которых число независимых переменных n больше одной. Теорию nD-систем очень сложно, а в ряде случаев невозможно, построить простым обобщением теории обычных 1D-систем. Например, в случае линейной динамики передаточная функция 2D-системы зависит от двух переменных. Отсюда возникает два характеристических полинома и отсутствие единой концепции решения задач устойчивости, управляемости и наблю-

[1] *Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №16-38-00192 мол_а.*
Автор признателен проф. П.В. Пакшину за ценное обсуждение содержания статьи.
[2] *Юлия Павловна Емельянова, к.ф.-м.н.* (*EmelianovaJulia@gmail.com*).

даемости таких систем. В связи с этим актуальной представляется задача построения общей теории устойчивости и стабилизации nD-систем.

В данной работе рассматривается наиболее часто встречающийся на практике случай 2D-систем. Среди этого класса систем распространение получили следующие модели: модель Форназини–Маркезини [8], модель Роессера [19] и модель в форме повторяющегося процесса [20]. Модель Роессера появилась в задачах обработки изображений, где вектор состояния делится на горизонтальную и вертикальную составляющие. Модель Форназини–Маркезини возникла в задачах построения двумерных цифровых фильтров; в модели один вектор состояния, но он является функцией двух независимых дискретных переменных.

Модели в форме повторяющегося процесса используются для описания динамики робототехнических систем, многократно повторяющих одну и ту же операцию на заданном интервале времени, каждый раз возвращаясь в начальное состояние. Эту операцию называют шагом, проходом или итерацией. Таким образом, вектор состояния повторяющегося процесса зависит от двух переменных – времени и номера шага, при этом все шаги имеют одинаковую длительность во времени. Выходной сигнал здесь обычно называется профилем повторения. Измеряя выходной сигнал и сравнивая его с желаемым с помощью управляющего воздействия можно достичь нужной точности выполнения той или иной операции. Такие задачи получили название задач управления с итеративным обучением.

Задачи управления с итеративным обучением являются важнейшим приложением теории 2D-систем. Итеративное обучение естественным образом применимо к повторяющимся процессам и основано на запоминании информации с предыдущих операций с целью ее использования на следующих итерациях для повышения точности. Первые результаты по применению итеративного обучения были опубликованы в [14]. Позднее появились теоретические и экспериментальные результаты решения задач управления с итеративным обучением линейными повторяющимися процессами [11, 18, 20].

Исследованию нелинейных 2D-систем посвящено значительно меньше работ [4, 5, 13, 15, 17, 25], несмотря на то, что в инженерной практике задачи встречаются в нелинейной постановке. Например, процесс высокоточного лазерного напыления металла [21, 22], многопроходный процесс резки угольных пластов [20], многопроходная сварка [22]. Если в линейном случае некоторые результаты, полученные для определенной модели, например, для линейных повторяющихся процессов, можно применить и к другим моделям, например, к модели Роессера, то в нелинейном случае необходимо рассматривать каждую модель по отдельности.

В статье рассматриваются нелинейные дискретные системы Форназини–Маркезини. Сформулирована и доказана теорема об экспоненциальной устойчивости таких систем и ее обращение. Далее эта теорема используется для решения задачи стабилизации. В теории 1D-систем одним из наиболее мощных методов решения задач стабилизации является теория диссипативности [23], где важную роль играет понятие пассивности [2]. В данной работе для рассматриваемого случая 2D-систем для решения задач стабилизации вводятся понятия экспоненциальной пассивности и векторной функции накопления. Приводится пример синтеза нелинейного закона управления, обеспечивающего экспоненциальную устойчивость процесса.

1. Постановка задачи

Рассмотрим нелинейную систему Форназини–Маркезини, описываемую следующей моделью в пространстве состояний

$$x_{i+1,j+1} = f(x_{i,j+1}, x_{i+1,j}, u_{i,j+1}, u_{i+1,j}), \quad i \geqslant m \geqslant 0, \ \ j \geqslant q \geqslant 0, \tag{1}$$

где $x_{i,j} \in \mathbb{R}^{n_x}$ – вектор состояния, $u_{i,j} \in \mathbb{R}^{n_u}$ – входной вектор управления, f – нелинейная функция, удовлетворяющая требованию $f(0,0,0,0) = 0$. Граничные условия заданы в виде

$$\begin{aligned} x_{i,q} &= \xi_q(i), \ i \geqslant m, \\ x_{m,j} &= \eta_m(j), \ j \geqslant q, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\xi(i)$ и $\eta(j)$ – известные функции от i и j соответственно. Предположим, что существуют конечные вещественные числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $0 < \zeta_0 < 1$ такие, что

$$
\begin{aligned}
|x_{i,q}|^2 = |\xi_q(i)|^2 \leqslant \alpha |x_{m,q}|^2 \zeta_0^{i-m},\ i \geqslant m \\
|x_{m,j}|^2 = |\eta_m(j)|^2 \leqslant \beta |x_{m,q}|^2 \zeta_0^{j-q},\ j \geqslant q,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

здесь $|q|$ обозначает Евклидову норму вектора q, ζ_0 определяет скорость сходимости начальных значений i и j вектора состояния.

1.1. Теорема об экспоненциальной устойчивости и ее обращение

Подавляющее большинство результатов и исследований по теории устойчивости 2D-систем, описываемых моделью Форназини–Маркезини, получены для линейных систем. Работ, посвященных исследованию нелинейных 2D-систем, совсем не много. Среди таких работ важно отметить работу [13], где получены достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости для нелинейных систем Форназини–Маркезини с использованием второго метода Ляпунова. В [15] получены достаточные условия глобальной асимптотической устойчивости тривиального решения системы, описываемой нелинейной моделью Форназини–Маркезини.

Определение 1. *Нелинейная система* (1), (2) *называется экспоненциально устойчивой, если существуют такие* $\kappa > 0$ *и* $0 < \lambda < 1$, *что*

$$
|x_{i,j}|^2 \leqslant \kappa |x_{m,q}|^2 \lambda^{i-m} \lambda^{j-q},\ i \geqslant m,\ j \geqslant q. \tag{4}
$$

Отметим, что экспоненциальная устойчивость линейной модели Форназини–Маркезини была рассмотрена в [16], где экспоненциальная устойчивость определялась по-другому.

Для исследования устойчивости 2D-системы (1) попытка использовать второй метод Ляпунова в отличие от 1D-случая приводит к серьезным затруднениям, поскольку 2D-система (1) не описывается в терминах полного приращения вектора состояния и в результате невозможно найти полное приращение функции Ляпунова.

По этой причине для исследования устойчивости 2D-систем в данной работе используется другой метод – метод векторных функций Ляпунова [4, 5, 6], где вместо полного приращения используется дивергенция векторного поля. Для дальнейшего анализа выберем функцию Ляпунова вида

$$V(x) = \begin{bmatrix} V_1(x_{i+1,j+1}) \\ V_2(x_{i+1,j+1}) \end{bmatrix}, \tag{5}$$

где $V_1(x) > 0,\ x \neq 0,\ \ V_2(x) > 0,\ x \neq 0,\ \ V_1(0) = 0,\ V_2(0) = 0.$ Аналог оператора дивергенции этой функции вдоль траекторий системы (1) имеет вид

$$\mathcal{D}V(x) = V_1(x_{i+1,j+1}) - V_1(x_{i,j+1}) + \\ + V_2(x_{i+1,j+1}) - V_2(x_{i+1,j}). \tag{6}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Нелинейная система* (1), (2) *экспоненциально устойчива, если существует векторная функция* (5) *и положительные скаляры* c_1, c_2, c_3 *такие, что*

$$c_1|x|^2 \leqslant V_1(x) \leqslant c_2|x|^2, \tag{7}$$

$$c_1|x|^2 \leqslant V_2(x) \leqslant c_2|x|^2, \tag{8}$$

$$\mathcal{D}V(x) \leqslant -c_3(|x_{i,j+1}|^2 + |x_{i+1,j}|^2). \tag{9}$$

Доказательство. Из (9), (7) и (8) следует, что существует такая $0 < \bar{c}_3 < c_3$, что

$$\begin{aligned} \mathcal{D}V(x) &\leqslant -c_3(|x_{i,j+1}|^2 + |x_{i,j+1}|^2) \leqslant \\ &\leqslant -\bar{c}_3(|x_{i,j+1}|^2 + |x_{i+1,j}|^2) \leqslant \\ &\leqslant -\frac{\bar{c}_3}{c_2}\left[V_1(x_{i,j+1} + V_2(x_{i+1,j})\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Из (6) и (10) получаем

$$0 < V_1(x_{i+1,j+1}) + V_2(x_{i+1,j+1}) \leqslant \left(1 - \frac{\bar{c}_3}{c_2}\right)\left[V_1(x_{i,j+1} + \right. \\ \left. + V_2(x_{i+1,j})\right]. \tag{11}$$

Из последнего неравенства (11) следует, что $1-\frac{\bar{c}_3}{c_2}>0$, и отсюда получаем, что $\bar{c}_3>0$ и $c_2>0$, $0<\frac{\bar{c}_3}{c_2}<1$ и $0<1-\frac{\bar{c}_3}{c_2}<1$. Обозначим $\lambda=1-\frac{\bar{c}_3}{c_2}$, и выбирая $\bar{c}_3$ достаточно малой, так что

$$\zeta_0^{\frac{1}{2}}<\lambda<1, \tag{12}$$

с учетом (11) перепишем (12) в виде

$$V_1(x_{i+1,j+1})\leqslant \lambda V_1(x_{i,j+1})+\lambda V_2(x_{i+1,j})-V_2(x_{i+1,j+1}). \tag{13}$$

Решая (13) относительно $V_1(x_{i,j+1})$, получим

$$\begin{gathered}V_1(x_{k+m,j+1})\leqslant \lambda^k V_1(x_{m,j+1})+\sum_{l=m}^{k+m-1}[\lambda V_2(x_{l+1,j})-\\ -V_2(x_{l+1,j+1})]\,\lambda^{k+m-1-l}=\lambda^k V_1(x_{m,j+1})+\\ +\lambda\sum_{l=m+1}^{k+m}V_2(x_{l,j})\lambda^{k+m-l}-\sum_{l=m+1}^{k+m}V_2(x_{l,j+1})\lambda^{k+m-l},\end{gathered} \tag{14}$$

и обозначая

$$W_{k,j}=\sum_{l=m+1}^{k+m}V_2(x_{l,j})\lambda^{k+m-l},$$

из (14) получим, что

$$W_{k,j+1}\leqslant \lambda W_{k,j}+\lambda^k V_1(x_{m,j+1})-V_1(x_{k+m,j+1}). \tag{15}$$

Решая (15) с учетом $W_{k,n}$, имеем

$$W_{k,n+q}\leqslant \lambda^n W_{k,q}+\sum_{p=q+1}^{n+q}\left[\lambda^k V_1(x_{m,p})\,-\,V_1(x_{k+m,p})\right]\lambda^{n+q-p},$$

или

$$\begin{gathered}\sum_{p=q+1}^{n+q}V_1(x_{k+m,p})\lambda^{n+q-p}+\sum_{l=m+1}^{k+m}V_2(x_{l,n+q})\lambda^{k+m-l}\leqslant\\ \leqslant \lambda^k\sum_{p=q+1}^{n+q}V_1(x_{m,p})\lambda^{n+q-p}+\lambda^n\sum_{l=m+1}^{k+m}V_2(x_{l,q})\lambda^{k+m-l}.\end{gathered}$$

Последнее неравенство перепишем в виде

$$(16)\quad \lambda^{-k}\sum_{p=q+1}^{q+n} V_1(x_{k,p})\lambda^{q-p} + \lambda^{-n}\sum_{l=m+1}^{m+k} V_2(x_{l,n+q})\lambda^{m-l} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{p=q+1}^{n+q} V_1(x_{m,p})\lambda^{q-p} + \sum_{l=m+1}^{k} V_2(x_{l,q})\lambda^{m-l},$$

и вычисляя правую часть (16) с учетом (3) и (12), имеем

$$(17)\quad \sum_{p=q+1}^{n+q} V_1(x_{m,p})\lambda^{q-p} + \sum_{l=m+1}^{k+m} V_2(x_{l,q})\lambda^{m-l} \leqslant$$

$$\leqslant c_2\left(\sum_{p=q+1}^{q+n} \beta|x_{m,q}|^2\zeta_0^{p-q}\lambda^{q-p} + \sum_{l=m+1}^{m+k} \alpha|x_{m,q}|^2\zeta_0^{l-m}\lambda^{m-l}\right) \leqslant$$

$$\leqslant c_2|x_{m,q}|^2\left(\beta\sum_{p=q+1}^{q+n} \zeta_0^{\frac{p-q}{2}}\zeta_0^{\frac{p-q}{2}}\lambda^{q-p} + \alpha\sum_{l=m+1}^{m+k} \zeta_0^{\frac{l-m}{2}}\zeta_0^{\frac{l-m}{2}}\lambda^{m-l}\right) \leqslant$$

$$\leqslant c_2|x_{m,q}|^2\left(\beta\sum_{p=q+1}^{q+n} \lambda^{p-q}\lambda^{p-q}\lambda^{q-p} + \alpha\sum_{l=m+1}^{m+k} \lambda^{l-m}\lambda^{l-m}\lambda^{m-l}\right) \leqslant$$

$$\leqslant c_2|x_{m,q}|^2\left(\beta\sum_{p=0}^{\infty}\lambda^p + \alpha\sum_{l=0}^{\infty}\lambda^l\right) = \frac{c_2|x_{m,q}|^2(\alpha+\beta)}{1-\lambda}.$$

Из (16), (7), (8) и (17), следует, что

$$(18)\quad c_1\lambda^{-k}\lambda^{-n}|x_{k+m,n+q}|^2 \leqslant \lambda^{-k}\sum_{p=q+1}^{n+q} V_1(x_{k+m,p})\lambda^{q-p} +$$

$$+ \lambda^{-n}\sum_{l=m+1}^{k+m} V_2(x_{l,n+q})\lambda^{m-l} \leqslant |x_{m,q}|^2\frac{c_2(\alpha+\beta)}{1-\lambda}.$$

И, наконец, из (18) следует (4) при $\kappa = \frac{c_2(\alpha+\beta)}{c_1(1-\lambda)}$ и $\lambda = 1 - \frac{\bar{c}_3}{c_2}$, удовлетворяющих (12), что и требовалось доказать.

В случае 1D-систем важнейшим результатом является обратная теорема Ляпунова, и в данной работе обратная теорема получена для рассматриваемого 2D-случая.

Теорема 2. *Если нелинейная система* (1)*,* (2) *экспоненциально устойчива, то существуют векторная функция Ляпунова* (5) *и положительные скаляры* c_1*,* c_2*,* c_3*, удовлетворяющие неравенствам* (7)*,* (8) *и* (9)*.*

Доказательство. Выберем компоненты векторной функции Ляпунова (5) в виде

$$V_1(x_{m,q}) = \alpha \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=q}^{\infty} |x_{i,j}|^2, \; V_2(x_{m,q}) = \beta \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=q}^{\infty} |x_{i,j}|^2,$$
$$\alpha > 0, \; \beta > 0, \; \alpha + \beta = 1.$$

Выбирая $c_1 \leqslant \min(\alpha, \beta)$, имеем

$$c_1|x_{m,q}|^2 \leqslant \alpha \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=q}^{\infty} |x_{i,j}|^2 = V_1(x_{m,q}),$$
$$c_1|x_{m,q}|^2 \leqslant \beta \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=q}^{\infty} |x_{i,j}|^2 = V_2(x_{m,q}),$$

и из условия экспоненциальной устойчивости следует, что

$$\sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=q}^{\infty} |x_{i,j}|^2 \leqslant \kappa |x_{m,q}|^2 \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=q}^{\infty} \lambda^{i-m} \lambda^{j-q} = \frac{\kappa |x_{m,q}|^2}{(1-\lambda)^2}.$$

Выбирая $c_2 \geqslant \max(\alpha, \beta) \frac{\kappa |x_{m,q}|^2}{(1-\lambda)^2}$, получим, что справедливы (7) и (8). Вычисляя дивергенцию (6) получим

$$\mathcal{D}V(x) = V_1(x_{m+1,q+1}) - V_1(x_{m,q+1}) + V_2(x_{m+1,q+1}) -$$
$$- V_2(x_{m+1,q}) = \alpha \left(\sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=q+1}^{\infty} |x_{i,j}|^2 - \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=q+1}^{\infty} |x_{i,j}|^2 \right) +$$
$$+ \beta \left(\sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=q+1}^{\infty} |x_{i,j}|^2 - \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=q}^{\infty} |x_{i,j}|^2 \right) =$$

$$= -\alpha \sum_{j=q+1}^{\infty} |x_{m,j}|^2 - \beta \sum_{i=m+1}^{\infty} |x_{i,q}|^2 \leqslant -\alpha |x_{m,q+1}|^2 -$$

$$- \beta |x_{m+1,q}|^2 \leqslant -\min(\alpha,\beta)(|x_{m,q+1}|^2 + |x_{m+1,q}|^2).$$

Таким образом, выполнено третье условие теоремы (9), где $c_3 = \min(\alpha, \beta)$. Теорема доказана.

2. Экспоненциальная пассивность и стабилизация

В данном разделе решается задача синтеза управления, обеспечивающего экспоненциальную устойчивость системы. Вводятся понятия экспоненциальной пассивности и векторной функции накопления вида (5).

Для дальнейшего анализа введем вспомогательную переменную $z_{i,j} \in \mathbb{R}^{n_z}$ следующего вида:

(19) $$z_{i,j} = h(\bar{x}_{i,j}, \bar{u}_{i,j}),$$

где $\bar{x}_{i,j} = [x_{i,j+1}^\top \; x_{i+1,j}^\top]^\top$, $\bar{u}_{i,j} = [u_{i,j+1}^\top \; u_{i+1,j}^\top]^\top$, вектор h удовлетворяет требованию $h(0,0) = 0$. Введем понятие пассивности.

Определение 2. *Нелинейная дискретная 2D-система* (1), (2) *называется экспоненциально пассивной, если существуют векторная функция* (5), *вектор z вида* (19) *и положительные постоянные c_1, c_2, c_3, удовлетворяющие условию*

(20) $$\mathcal{D}V(x) \;\leqslant\; z_{i,j}^\top G \bar{u}_{i,j} - c_3(|x_{i,j+1}|^2 + |x_{i+1,j}|^2),$$

где G – постоянная матрица соответствующего размера.

Это определение является обобщением на 2D-системы определения, введенного в [9] для 1D-систем, а вектор z можно рассматривать как вспомогательный выходной вектор, который используется для синтеза закона управления и обеспечения пассивности системы. Процедура выбора этого вектора в теории 1D-систем известна как процедура пассификации или пассивации [12]. Выбор этого вектора зависит от выбора функции накопления и представляет собой отдельную сложную задачу подобную задаче выбора функци Ляпунова для нелинейных систем.

Таким образом, задача – найти пару (z, V), удовлетворяющую условию (20), и ниже показано, как эта задача может быть решена для частного случая.

Следующая теорема является расширением хорошо известных результатов теории пассивности 1D-систем [9] на рассматриваемый 2D-случай.

Теорема 3. *Пусть дискретная нелинейная 2D-система* (1), (2) *экспоненциально пассивна. Предположим также, что существует функция* $\varphi(z)$ *такая, что* $\varphi(0) = 0$ *и* $z^\top G\varphi(z) > 0$ *при* $z \neq 0$. *Тогда закон управления вида*

$$\bar{u}_{i,j} = -\varphi(z_{i,j}) \tag{21}$$

обеспечивает экспоненциальную устойчивость системы.

Доказательство. Из (20), (21), (7) и (8) следует, что существует такая $0 < \bar{c}_3 < c_3$, что

$$\mathcal{D}V(x) \leqslant -z_{i,j}^\top G\varphi(z_{i,j}) - c_3(|x_{i,j+1}|^2 + |x_{i,j+1}|^2) \leqslant$$
$$\leqslant -\bar{c}_3(|x_{i,j+1}|^2 + |x_{i+1,j}|^2) \leqslant -\frac{\bar{c}_3}{c_2}\left[V_1(x_{i,j+1} + V_2(x_{i+1,j})\right],$$

остальная часть доказательства такая же, как в теореме 1.

Заметим, что векторная функция накопления (5) может рассматриваться как векторная функция Ляпунова для системы (1) с законом управления (21), который обеспечивает экспоненциальную устойчивость системы.

3. Пример

Рассмотрим частный случай системы (1), на котором продемонстрируем процедуру нахождения стабилизирующего управления с обратной связью:

$$x_{i+1,j+1} = A_1 x_{i,j+1} + A_2 x_{i+1,j} + \phi_1(x_{i,j+1}, x_{i+1,j})u_{i,j+1} + \\ + \phi_2(x_{i,j+1}, x_{i+1,j})u_{i+1\ j}, \tag{22}$$

где ϕ_1 и ϕ_2 – нелинейные векторные функции. В простейшем случае ϕ_1 и ϕ_2 – постоянные векторы и (22) – линейная 2D-система Форназини–Маркезини. В рассматриваемом частном случае система (22) состоит из линейной части, на которую управление действует через статические нелинейности ϕ_1 и ϕ_2, при этом стабилизирующее управление удается найти в явном виде.

Введем обозначения $A = [A_1 \quad A_2]$, $\phi(\bar{x}_{i,j}) = [\phi_1(x_{i,j+1}, x_{i+1,j}) \ \ \phi_2(x_{i,j+1}, x_{i+1,j})]$. Обозначим положительную определённость (отрицательную определённость) символом $\succ 0$ (соответственно $\prec 0$) и выберем векторную функцию накопления в виде (5) с компонентами $V_1(x) = \alpha x^\top Px,\ V_2(x) = \beta x^\top Px$, где $P \succ 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0$ и $\alpha + \beta = 1$ и удовлетворяют следующему линейному матричному неравенству

$$(23) \left[\begin{array}{cc} A_1^\top PA_1 - \alpha P + Q_{11} & A_1^\top PA_2 + Q_{12} \\ A_2^\top PA_1 + Q_{21} & A_2^\top PA_2 - \beta P + Q_{22} \end{array} \right] \prec 0,$$

где $Q = \left[\begin{array}{cc} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{array} \right] \succ 0.$

В данном случае оператор дивергенции векторной функции Ляпунова (5) будет иметь вид

$$(24) \quad \mathcal{D}V(x) = \bar{x}_{i,j}^\top \left(A^\top PA - \left[\begin{array}{cc} \alpha P & 0 \\ 0 & \beta P \end{array} \right] \right) \bar{x}_{i,j} + \\ + 2\bar{x}_{i,j}^\top A^\top P\phi(\bar{x}_{i,j})\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{i,j}^\top \phi^\top(\bar{x}_{i,j})P\phi(\bar{x}_{i,j})\bar{u}_{i,j}.$$

Анализ правой части (24) показывает, что если выбрать вспомогательный вектор выхода $z_{i,j}$ в виде

$$(25) \qquad z_{i,j} = 2\phi^\top(\bar{x}_{i,j})PA\bar{x}_{i,j} + \frac{1}{2}\phi^\top(\bar{x}_{i,j})P\phi(\bar{x}_{i,j})\bar{u}_{i,j},$$

то будет справедлива следующая оценка:

$$(26) \qquad \mathcal{D}V(x) \leqslant 2z_{i,j}^\top \bar{u}_{i,j} - \lambda_{\min}(Q)|\bar{x}_{i,j}|^2,$$

где $\lambda_{\min}(Q)$ – минимальное собственное значение матрицы Q, и из (26) следует, что система (22)–(25) экспоненциально пассивна относительно выходной переменной $z_{i,j}$ и входной переменнной $u_{i,j}$ при $G = 2I$, где I – единичная матрица соответствующего размера. Тогда согласно Теореме 1 стабилизирующий закон управления должен удовлетворять соотношению

$$(27) \ \bar{u}_{i,j} = -z_{i,j} = -(2\phi^\top(\bar{x}_{i,j})PA\bar{x}_{i,j} + \frac{1}{2}\phi^\top(\bar{x}_{i,j})P\phi(\bar{x}_{i,j})\bar{u}_{i,j}).$$

Из уравнения (27) находим закон управления в явном виде:

$$(28) \qquad \bar{u}_{i,j} = -[I + \phi^\top(\bar{x}_{i,j})P\phi(\bar{x}_{i,j})]^{-1}\phi^\top(\bar{x}_{i,j})PA\bar{x}_{i,j}.$$

Этот закон будет обеспечивать экспоненциальную устойчивость системы (22).

4. Заключение и перспективы работы

В работе получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости нелинейных 2D-систем, описываемых моделью Форназини–Маркезини. Доказана обратная теорема. Получены новые результаты по использованию теории пассивности для анализа устойчивости и решения задач стабилизации рассматриваемого класса 2D-систем. Эти результаты могут служить основой для дальнейшей исследований.

Дальнейшие исследования предполагаются в следующих направлениях. В [24] линейная модель Форназини–Маркезини использовалась для синтеза управления высокоточным прокатом металла. Для большей эффективности управления следует учитывать имеющиеся в этой системе ограничения, в результате которых система становится нелинейной. Разработанная в статье теория может быть применена для этих целей.

Другое направление связано с синтезом управления в системах, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных типа Гурса–Дарбу [1, 7, 10], с использованием дискретных аппроксимаций. Дискретная аппроксимация этих уравнений приводит к уравнениям типа Форназини–Маркезини. Результаты статьи здесь также могут быть эффективно применены.

Литература

1. ПЛОТНИКОВ В.И., СУМИН В.И. *Проблемы устойчивости нелинейных систем Гурса–Дарбу* // Дифференциальные уравнения. – 1972. – Том VII, вып. 5. – С. 845–856.
2. BYRNES C., ISIDORI A., WILLEMS J. *Passivity, feedback equivalence and the global stabilization of minimun phase nonlinear systems* // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1991. – Vol. 36. – P. 1228–1240.
3. DU C., XIE L. *Stability analysis and stabilization of uncertain two-dimensional discrete systems: an LMI approach* // IEEE Trans. on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications. – 1999. – Vol. 46. – P. 1371–1374.
4. EMELIANOVA J., PAKSHIN P., GAIKOWSKI K., ROGERS E. *Vector Lyapunov function based stability of a class of applications relevant 2D nonlinear systems* // IFAC Proceedings Volumes (IFACPapersOnLine) – 2014. – Vol. 47, Issue 3. – P. 8247–8252.
5. EMELIANOVA J., PAKSHIN P., GAIKOWSKI K., ROGERS E. *Stability of nonlinear discrete repetitive processes with Markovian switching* // Systems & Control Letters. – 2015. – Vol. 75. – P. 108–116.
6. EMELIANOVA J., PAKSHIN P., GAIKOWSKI K., ROGERS E. *Stability of nonlinear 2D systems described by the continuous-time Roesser model* // Automation and Remote Control. – 2014. – Vol. 7. – P. 845–858.
7. DYMKOV M., GALKOWSKI K., ROGERS E., DYMKOU V., DYMKOU S. *Modeling and Control of a Sorption Process using 2D Systems Theory* // Proc. 7th Int. Worskop on Multidimensional Systems (NDS'11). – 2011. – P. 1–6.

8. FORNASINI E., MARCHESINI G. *Doubly indexed dynamical systems: state models and structural properties* // Mathematical Systems Theory. – 1978. – Vol. 12. – P. 59–72.
9. FRADKOV A., HILL D. *Exponential feedback passivity and stabilizability of nonlinear systems* // Automatica. – 1998. – Vol. 34. – P. 697–703.
10. HMAMED A., MESQUINE F., TADEO F., BENHAYOUN M., BENZAOUIA A. *Stabilization of 2D saturated systems by state feedback control* // Multidimensional Systems and Signal Processing. – 2010. – Vol. 21. – P. 277–292.
11. HLADOWSKI L., GALKOWSKI K., CAI Z., ROGERS E., FREEMAN C.T., LEWIN P.L. *Experimentally supported* 2*D systems based iterative learning control law design for error convergence and performance* // Control Engineering Practice. – 2010. – Vol. 18(4). – P. 339–348.
12. KHALIL H. *Nonlinear Systems.* Third Edition. – New Jersey: Prentice Hall, 2002.
13. KUREK J. *Stability of nonlinear time-varying digital 2-D Fornasini- Marchesini system* // Multidimensional Systems and Signal Processing, vol. open access at Springerlink.com – 2012. – P. 1–10.
14. KUREK J.E., ZAREMBA M.B. *Iterative learning control synthesis based on 2D system theory* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 1993. – Vol. 38. – P. 121–125.
15. LIU D. *Lyapunov stability of two-dimensional digital filters with overflow nonlinearities* // IEEE Trans. on Circuits and SystemsI: Fundamental Theory and Applications. – 1998. – Vol. 45. – P. 574–577.
16. PANDOLFI L. *Exponential stability of 2D systems* // Systems & Control Letters. – 1984. – Vol. 4. – P. 381–385.
17. PAKSHIN P., GAIKOWSKI K., ROGER E. *Stability and stabilization of systems modeled by 2D nonlinear stochastic Roesser models* // Proc. 7th Int. Workshop on Multidimensional (nD) systems. – 2011. – P. 1–6.

18. PASZKE W., ROGERS E., GALKOWSKI K., CAI Z. *Robust finite frequency range iterative learning control design and experimental verification* // Control Engineering Practice. – 2013. – Vol. 21. – P. 1310–1320.
19. ROESSER R.P. *A discrete state-space model for linear image processing* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 1975. – Vol. AC-20(1). – P. 1–10.
20. ROGERS E., GALKOWSKI K., OWENS D.H. *Control Systems Theory and Applications for Linear Repetitive Processes* // Lecture Notes in Control and Information Sciences. – Springer-Verlag, Berlin. – 2007. – Vol. 349.
21. SAMMONS P.M., BRISTOW D.A., LANDERS R.G. *Iterative learning control of bead morphology in laser metal deposition processes* // Proc. American Control Conference. – 2013. – P. 5962–5967.
22. SAMMONS P.M., BRISTOW D.A., LANDERS R.G. *Height dependent laser metal deposition process modeling* // Journal of Manufacturing Science and Engineering. – 2013. – Vol. 135, No. 5. – P. 1–7.
23. WILLEMS J. *Dissipative dynamical systems part I: General theory* // Arch. Rational Mech. Analysis. – 1972. – Vol. 45. – P. 325–351.
24. YAMADA M., XU L., SAITO O. *2D Model-Following Servo System* // Multidimensional Systems and Signal Processing. – 1999. – Vol. 10. – P. 71–91.
25. YEGANEFAR N., YEGANEFAR N., GHAMGUI M., MOULAY E. *Lyapunov theory for 2D nonlinear Roesser models: Application to asymptotic and exponential stability* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2013. – Vol. 58. – P. 1299—1304.

STABILIZATION OF NONLINEAR 2D- FORNASINI–MARCHESINI SYSTEM

Julia Emelianova, Arzamas Polytechnic Institute of R.E. Alekseev Nizhny Novgorod State Technical University, assistant professor (EmelianovaJulia@gmail.com).

Abstract: The paper considers nonlinear 2D-system described by Fornasini–Marchesini state-space model. Sufficient conditions for the property of exponential stability are developed in terms of vector Lyapunov functions and a converse stability theorem is proved. A form of passivity, termed exponential passivity, is defined and used together with a vector storage function. This technique makes it possible to develop a new control law design algorithm to guarantee exponential stability of the system. As an example the algorithm is applied to a physically relevant case of systems with nonlinear actuator dynamics. Further research will focus on two directions. In earlier work linear Fornasini–Marchesini model was applied to a high-precision rolling system. The results of this paper can be useful to devise a nonlinear control system that will improve the efficiency. Other possible application is related to discrete approximation of Darboux differential equations systems which leads to Fornasini–Marchesini equations. Our results can be applied to problems of this sort.

Keywords: 2D-systems, Fornasini–Marchesini model, exponential stability, Lyapunov function, stabilizing control, linear matrix inequality (LMI).

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Б. Р. Андриевским.

Поступила в редакцию 30.07.2016.
Дата опубликования 30.11.2016.