УДК 519.179.2
ББК 22.176 + 65.23

СТЕПЕНЬ ПАРАЛЛЕЛИЗМА ОБОБЩЕННЫХСТОХАСТИЧЕСКИХ СЕТЕВЫХ ГРАФИКОВ

Иванов Н. Н.[1]
(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

Для обобщенного стохастического сетевого графика введено понятие степени параллелизма. Предложена методика определения этой величины, позволяющей производить выбор минимального числа исполнителей сетевого графика, при котором не происходит образование очередей на прохождение дуг.

Ключевые слова: обобщенный стохастический сетевой график, путь, распределения времени прохождения дуг, алгоритм Брона–Кербоша.

1. Введение

Сетевые графики, применяемые для моделирования сложных взаимосвязанных временных процессов, благодаря своей наглядности нашли широкое применение при моделировании процессов выполнения проектной документации, строительства зданий, сборочных процессов, процессов выполнения в реальном времени управляющих программ в вычислительных системах и т.п. В настоящее время эти графики рассматриваются в предположениях, основанных на рассмотрении времен прохождения отдельных дуг как случайных величин с известными распределениями [1].

В работе рассматривается обобщенный вариант стохастических сетевых графиков (ОССГ) [6], в которых допускаются

---

[1] *Николай Николаевич Иванов, доктор технических наук, доцент* (*ivanov.nni@yandex.ru*).

двойственные дисциплины возбуждения вершин: классическая дисциплина «И», которой соответствует возбуждение вершины в результате прохождения всех дуг, в нее входящих (вершина типа $\tilde{x}$ в классификации, приведенной в [1]), и альтернативная дисциплина «исключенное ИЛИ» (далее просто ИЛИ), которой соответствует возбуждение вершины в результате прохождения первой из входящих в нее дуг (вершина типа $\tilde{\beta}$ [1]).

Пользователей подобных графиков не в последнюю очередь интересует вопрос о числе исполнителей, например, бригад сборщиков, строителей, каналов параллельных управляющих вычислительных систем (ВС) и т.п., которые необходимы для реализации комплекса работ, моделируемых отдельными дугами графиков, без образования очередей на их прохождение.

В основу всех рассуждений ниже положен принцип «одна работа – один исполнитель», при этом каждый исполнитель может выполнять любую работу. Очевидно, что при избыточном числе исполнителей отсутствие очередей может сопровождаться простоями исполнителей, что также может быть нежелательным. Таким образом, актуальным является нахождение такого числа исполнителей, при котором отсутствие очередей сочетается с минимизацией простоев исполнителей. Вообще говоря, это число может оказаться зависящим от набора случайных времен прохождения дуг сетевого графика и от распределений этих времен.

В работе поставлена задача нахождения оценки сверху этого числа в предположении, что распределение времени прохождения каждой дуги сетевого графика определено каким-либо образом на полуинтервале $[0, +\infty)$ (это имеет место, например, в случае экспоненциального распределения), которую будем называть степенью параллелизма сетевого графика. В реальности при ограниченных распределениях, заданных на промежутках $[a, b]$, $a \geq 0$, $b < +\infty$, степень параллелизма может служить верхней оценкой числа исполнителей, необходимого для предотвращения образования очередей.

Особое значение приобретает этот показатель при проектировании архитектуры ВС, управляющих в реальном времени по программам, структурированным ОССГ. В работах [2, 4, 5, 8, 9], посвященных проблеме организации временной надежности управляющих в реальном времени параллельных ВС, рассматривалась структуризация управляющих взаимодействующих программных комплексов с помощью сетевых графиков. При этом предлагалась реализация этих комплексов в ВС с ограниченным числом каналов (как правило, двумя). В дальнейшем процедуры обеспечения временной надежности были дополнены организацией аппаратной надежности для случая одиночной неисправности ВС в двухканальной ВС [10]. Использование ограниченного числа каналов ВС предполагало буферизацию готовых к выполнению программных комплексов, что вызывало необходимость назначения их приоритетов и порядка выполнения.

В дальнейшем определился альтернативный подход к решению упомянутой проблемы, основанный на принципе независимости организации временной надежности выполнения управляющих программ и аппаратной надежности многопроцессорной ВС, на которой они выполняются. При этом в силу новых технических возможностей было предложено выбирать такое число каналов ВС без ограничения, при котором не происходит образования очередей на выполнение программных комплексов, что снимало необходимость буферизации и давало возможность использовать различные схемы резервирования в условиях множественных отказов и сбоев [7–9].

Знание верхней оценки степени параллелизма ОССГ, моделирующего комплекс взаимосвязанных программных модулей, или в ряде случаев его точного значения позволяет выбрать оптимальное число параллельных каналов ВС, при котором не потребуется буферизация программных модулей.

Следует заметить, что визуальное определение степени параллелизма становится весьма затруднительным в случае достаточно большого числа вершин и дуг, особенно в случае, когда ОССГ не является планарным графом [11]. Рассматриваемые ниже процедуры определения этого показателя осуществимы машинным способом, что снимает все проблемы вычислительного характера.

2. Основы метода

Множество дуг сетевого графика в дальнейшем будет обозначено как W. Цепочкой назовем произвольную последовательность связанных дуг. Пустой считается цепочка, не содержащая дуг. Таким образом, две дуги, одна из которых является входной, а другая – выходной для некоторой вершины, связаны пустой цепочкой.

Узлом сетевого графика будет называться вершина, имеющая более одной входящей дуги.

Путем в данной работе называется цепочка, которая начинается в начальной вершине сетевого графика и заканчивается в конечной.

Определение 1. Дуги u и v сетевого графика, в котором события наступают в соответствии с дисциплиной «И», находятся в отношении $\varphi \subset W \times W$ ($u\varphi v$), если они не связаны цепочкой (включая пустую цепочку).

Определение 2. Дуги u и v сетевого графика, в котором события могут наступать в соответствии с дисциплинами «И» или «ИЛИ», находятся в отношении φ ($u\varphi v$), если они либо не связаны цепочкой, либо каждая соединяющая их (возможно, пустая) цепочка, содержит хотя бы один узел типа «ИЛИ».

Сетевой график (на примере сетевого графика с вершинами только типа *И*) задает на множестве W отношение следования $\psi^* \subset W \times W$, при котором две дуги u и v связаны пустой цепочкой и v есть последователь u: $u\psi^*v$. Производя транзитивное и рефлексивное замыкания отношения ψ^*, приходим к отношению частичного порядка ψ, задаваемому матрицей A, у которой $a_{ii} = 1$, $a_{ij} = 1$ и $a_{ji} = 0$, если $u_i\psi u_j$. Матрица A^{T} обратного отношения ψ^{-1} может быть получена транспонированием матрицы A. Рассмотрим теперь (симметричное, рефлексивное) отношение $\pi = \psi \cup \psi^{-1}$ с матрицей $B = A + A^{\mathrm{T}} - E$. Отношение φ, рассматриваемое в определении 1, описывает отношение между дугами как дополнение по отношению к π $(u, v \in U, u\varphi v \Leftrightarrow \overline{u\pi v})$. Следовательно, заменяя в матрице B нули единицами, а единицы на нули, получаем симметрическую матрицу C, соответствующую отношению φ. Аналогичные построения проводятся для сетевых графиков со смешанными типами узлов, за исключением того, что дуги u и v, связанные пустой цепочкой и разделенные вершиной типа «ИЛИ», не могут находиться в отношении ψ*.

В соответствии с отношением φ (по матрице C) может быть построен неориентированный граф G, вершинами которого являются дуги сетевого графика. Вершины u и v связаны в G дугой в случае, если $u\varphi v$. Представление графа G матрицей C, элементами которой являются * и –, предпочтительно в связи с дальнейшими манипуляциями с этим графом $(u * v \Leftrightarrow u\varphi v)$.

Максимальный полный подграф графа G называется кликой. Заметим, что у графа G может существовать несколько клик.

Утверждение. Верхняя оценка степени параллелизма сетевого графика при оговоренных выше распределениях времен прохождения дуг не превосходит наибольшее число вершин в кликах графа G. Для графиков с единственной дисциплиной «И» эта оценка является точным значением степени параллелизма.

Доказательство.

Пусть для некоторого набора случайных времен прохождения дуг число одновременно проходимых в некоторый момент времени дуг равно k и не существует наборов и моментов времени, для которых это число больше k. Это означает, что число k является степенью параллелизма рассматриваемого сетевого графика. Очевидно, все эти дуги попарно находятся в отношении φ либо в соответствии с определением 1, либо в соответствии с определением 2. Таким образом, эти дуги образуют полный подграф в некоторой клике графа G, откуда следует неравенство $k \le N$, где N – кликовое число графа G.

Пусть теперь для некоторого сетевого графика с единственным типом узлов «И» на графе G, построенном в соответствии с определением 1, существует клика максимального размера N. Рассмотрим дуги, входящие в эту клику. Пусть для некоторого случайного набора U времен прохождения всех дуг времена окончания прохождения рассматриваемых N дуг равны $t_1, \ldots, t_N$. Очевидно, что существует константа C такая, что $C + \min_{1\le i\le N}\{t_i\} > \max_{1\le i\le N}\{t_i\}$.

Поскольку для сетевых графиков с единственным типом узлов «И» выполнение отношения φ для каждой пары дуг означает независимость времен начала и конца их прохождения друг от друга, можно построить теперь случайный набор $\tilde{U}$, для которого времена окончания прохождения рассматриваемых N дуг совпадают и равны $C + \min\limits_{1 \le i \le N}\{t_i\}$, не изменяя при этом времена прохождения для остальных дуг в сравнении с исходным набором U. Выбирая некоторый момент времени, заключенный в промежутке $[\max\limits_{1 \le i \le N}\{t_i\}, C + \min\limits_{1 \le i \le N}\{t_i\}]$, получаем, что в этот момент времени все N дуг проходятся одновременно. Отсюда степень параллелизма удовлетворяет неравенству $k \ge N$, что для сетевых графиков с единственным типом узлов «И» с учетом выше доказанного неравенства приводит к равенству $k = N$. ■

Таким образом, ключевой является задача нахождения клик графа G. Для ее решения может быть привлечен алгоритм Брона–Кербоша [12].

В случае смешанных дисциплин возникновения событий этот метод может завышать оценку степени параллелизма, поскольку выполнение отношения φ является лишь необходимым условием для одновременного прохождения дуг. Это связано с тем, что дуга, первой приходящая в некоторый узел типа «ИЛИ», и некоторые ее дуги-предшественники, не могут одновременно проходиться с дугами, исходящими из данного узла, и с некоторыми их дугами-последователями. Ниже показано, как это можно использовать для снижения получаемых оценок. Вместе с тем, выполнение отношения φ для графиков с дисциплиной «И» является необходимым и достаточным условием для одновременного прохождения дуг (см. доказательство утверждения).

В качестве примера рассматривается граф, представленный на рис. 1. В соответствии с нумерацией дуг, приведенной на рис. 1, по 45 неупорядоченным парам дуг сетевого графика построены две таблицы – матрицы инцидентности графов G_A и G_B для случаев, когда события, представляемые вершинами 2 и 4, наступают по дисциплине «И» (матрица A) и по дисциплине «ИЛИ» (матрица B).

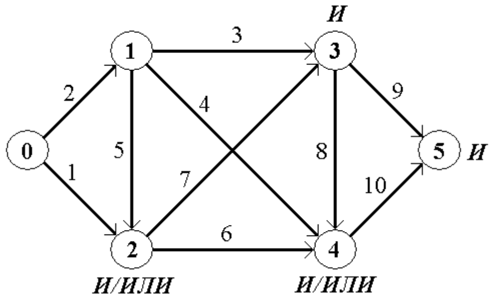

Рис. 1. Сетевой график

$$
A = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccccc}
- & * & * & * & * & - & - & - & - & - \\
* & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\
* & - & - & * & * & * & * & - & - & - \\
* & - & * & - & * & * & * & * & * & - \\
* & - & * & * & - & - & - & - & - & - \\
- & - & * & * & - & - & * & * & * & - \\
- & - & * & * & - & * & - & - & - & - \\
- & - & - & * & - & * & - & - & * & - \\
- & - & - & * & - & * & - & * & - & * \\
- & - & - & - & - & - & - & - & * & -
\end{array}\right]
\end{array},\quad
B = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccccc}
- & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
* & - & - & - & - & * & * & - & - & * \\
* & - & - & * & * & * & * & - & - & * \\
* & - & * & - & * & * & * & * & * & * \\
* & - & * & * & - & * & * & * & * & * \\
* & * & * & * & * & - & * & * & * & * \\
* & * & * & * & * & * & - & - & - & * \\
* & - & - & * & * & * & - & - & * & * \\
* & - & - & * & * & * & - & * & - & * \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & -
\end{array}\right]
\end{array}.
$$

Матрица B покрывает матрицу A в том смысле, что если $a_{ij} = a_{ji} = *$, то $b_{ij} = b_{ji} = *$.

Используя алгоритм Брона–Кербоша, получаем следующие множества клик максимального размера. Для графа G_A, представленного матрицей A: {(1 3 4 5), (3 4 6 7), (4 6 8 9)}, для графа G_B с матрицей B: {(1 3 4 5 6 7 10), (1 4 5 6 8 9 10)}. В качестве примера на рис. 2 приведен граф G_A. На этом графе видны приведенные выше клики максимального размера.

Из приведенных множеств клик следует, что для сетевого графика, в котором все узлы имеют тип «И», степень параллелизма равна 4. В то же время для сетевого графика со смешанными дисциплинами возникновения событий верхняя оценка степени параллелизма определятся как 7.

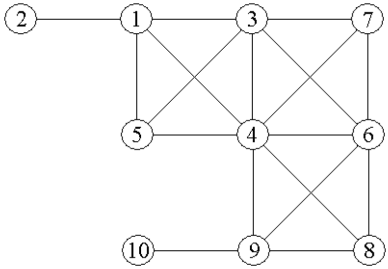

Рис.2. Граф G_A

Для сетевых графиков со смешанной дисциплиной возникновения событий для снижения верхней оценки степени параллелизма можно, основываясь на сказанном выше, из получаемой оценки вычесть число, равное минимальному количеству узлов типа «ИЛИ», входные дуги которых входят в клики максимального размера. Однако при этом потребуют проверки клики, не содержащие входных дуг узлов типа «ИЛИ». В рассматриваемом примере оценка может быть снижена до 5.

3. Альтернативный метод

В качестве альтернативного метода нахождения степени параллелизма можно предложить построение дерева состояний сетевого графика [4, 5].

Состоянием считается вектор, составленный из номеров дуг, проходимых в текущий момент времени, в отличие от прототипа, в котором для фиксированного числа исполнителей учитывалось также множество дуг, находящихся в очереди на прохождение. Но в нашем случае сетевой график выполняется без ограничения ресурсов, поэтому эта составляющая состояния в сравнении с прототипом может быть опущена.

Каждая дуга дерева состояний помечена номером дуги сетевого графика, исходящей из состояния дерева, в котором данная дуга объявлена в качестве составляющей вектора состояния. Начальным состоянием дерева состояний назначается вектор из номеров дуг, исходящих из начальной вершины сетевого графика. Конечному состоянию соответствует пустой вектор.

Алгоритм построения дерева состояний состоит в рекурсивном пополнении состояний дерева, начиная с начального. Если предположить, что построено состояние s k-го уровня этого дерева, то для построения состояний $(k+1)$-го уровня, непосредственно связанных с состоянием s, нужно из s вывести дуги числом, соответствующим числу дуг сетевого графика, входящих в s. Каждая такая дуга u, помеченная номером выбранной дуги сетевого графика, ведет в некоторое состояние q, которое содержит дуги, входящие в s, за исключением u, и пополненное дугами, активируемыми в случае, если прохождение дуги u вызвало свершение некоторого события.

Построение дерева состояний в лексикографическом порядке может вестись так, что если состояние, соответствующее рассматриваемой вершине, в процессе построения дерева уже было достигнуто ранее, то оно подчеркивается, и построение ее продолжения обрывается.

Дерево состояний обладает тем замечательным свойством, что каждому случайному вектору, составленному из времен прохождения всех дуг сетевого графика, соответствует ровно одна траектория из начальной в заключительную вершину. Таким образом, все ветви дерева имеют длину, равную числу дуг сетевого графика. При этом можно утверждать, что в силу принятых в работе требований к распределениям случайных времен прохождения дуг любая траектория этого дерева реализуема при некотором наборе этих времен.

На рис. 3 приведена начальная часть дерева состояний рассмотренного выше сетевого графика, у которого все узлы имеют тип «И». Дальнейшее построение продолжений для неподчеркнутых вершин дерева не имеет смысла, поскольку в нижних уровнях уже не могут встретиться состояния, у которых длина вектора превышает значение 4.

Таким образом, степень параллелизма рассматриваемого ОССГ равна 4. В приводимом ниже примере показано, что эта оценка для некоторого распределения завышает необходимое число исполнителей, не вызывающее образование очередей.

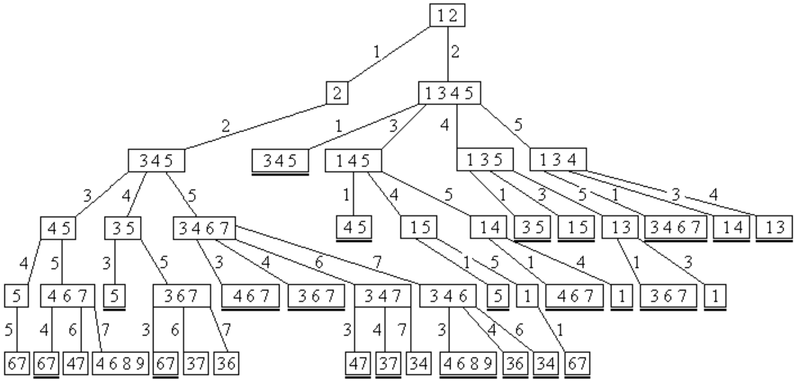

Рис. 3. Дерево состояний графика с дисциплиной «И»

Для сетевых графиков, в которых имеются узлы типа «ИЛИ», построение дерева состояний в свете поставленных в работе задач имеет некоторые отличительные черты. Так, если дуга приходит в некоторый узел типа «ИЛИ», а остальные дуги, ведущие в него же, еще не пройдены, то эти дуги в дальнейшем построении дерева не участвуют, но во всех вершинах-последователях тех вершин, в которых они были активированы, фигурируют в векторах из номеров дуг. При этом их прохождение в зависимости от значений случайных времен прохождения дуг может, вообще говоря, закончиться уже после того, как будет достигнуто заключительное состояние сетевого графика.

На рис. 4 представлена начальная часть левой половины дерева состояний для сетевого графика с рис. 1, в котором узлы 2 и 4 имеют тип «ИЛИ», и в начальном состоянии дуга 1, исходящая из начального состояния, пройдена раньше дуги 2. Например, в вершине (34567) инициализируется дуга 5, ведущая в узел 2 типа «ИЛИ». Однако событие, соответствующее узлу 2, уже свершилось после прохождения дуги 1. По этой причине, исходя из сказанного выше, в вершине (34567) и во всех ее последователях отсутствуют исходящие дуги, помеченные 5.

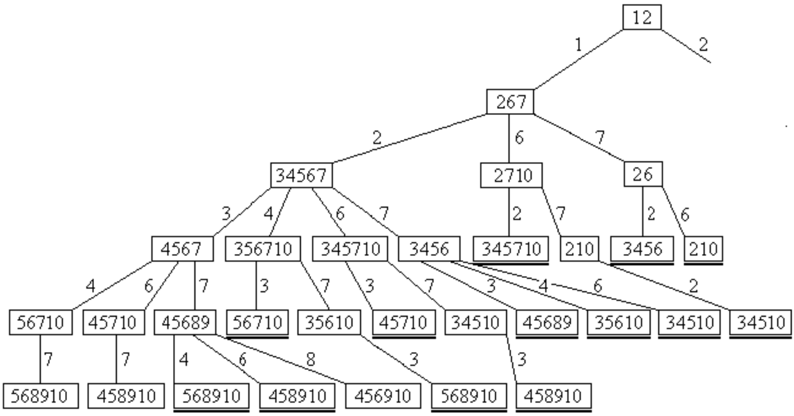

Рис. 4. Дерево состояний графика со смешанной дисциплиной

Таким образом, находя в дереве все состояния максимальной длины, получаем состояния с дугами, которые могут проходиться одновременно при некоторых наборах времен прохождения дуг. В дереве, приведенном на рис. 3, такими состояниями являются состояния (1 3 4 5), (3 4 6 7) и (4 6 8 9), что соответствует проведенному выше анализу. В левой части дерева состояний, приведенной на рис. 3, можно видеть все состояния, соответствующие наборам дуг, не содержащим дугу 1. Состояния, содержащие эту дугу, находятся в правой части дерева, не показанной на рис. 4. Из рис. 4 (в полном объеме) установлено, что точное значение степени параллелизма равно 5.

Полученные значения степени параллелизма (любым из рассмотренных методов) могут оказаться недостижимыми при некоторых наборах случайных времен прохождения дуг. Например, траектория с начальной частью 12345, показанной на рис. 3, не содержит состояний длины, большей 3. По этой причине степень параллелизма является оценочной величиной. Однако ни при каких наборах случайных времен прохождения дуг число потребных исполнителей не может ее превзойти.

Имитационное моделирование сетевого графика, приведенного на рис. 1 с узлами типа «И», было проведено в иллюстративных целях. Была поставлена цель показать, что для распределений, заданных на конечных интервалах, вычисленная каким-либо способом степень параллелизма может не достигаться на некоторых наборах X случайных времен прохождения дуг. Более того, показано, что существуют распределения, для которых ни при каких наборах X степень параллелизма не достигается. Таким образом, степень параллелизма может служить лишь верхней оценкой числа исполнителей, не приводящего к образованию очередей.

Времена прохождения дуг, распределенных по нормальному закону $\boldsymbol{N}(a, \sigma)$, ограниченному на интервалах $(a - 3, a + 3)$, при следующих параметрах распределений: $x_1 = \boldsymbol{N}(5, 5\sqrt{2}, 1)$, $x_2 = x_5 = x_7 = \boldsymbol{N}(8, 1)$, $x_3 = \boldsymbol{N}(6, 1)$, $x_4 = \boldsymbol{N}(6\sqrt{2}, 1)$, $x_6 = \boldsymbol{N}(10\sqrt{2}, 1)$, $x_8 = \boldsymbol{N}(7, 1)$, $x_9 = \boldsymbol{N}(3, 1)$, $x_{10} = \boldsymbol{N}(9, 1)$ (здесь x_i – время прохождения i-й дуги) моделировались по методике, описанной в [3].

Моделирование было проведено на основе программной реализации дерева состояний, начальная часть которого приведена на рис. 3. Оно показало, что вероятности появления состояний (1 3 4 5), (3 4 6 7) и (4 6 8 9) имеют следующие значения: $p_{1345} \approx 0{,}44$, $p_{3467} \approx 0{,}07$, $p_{4689} \approx 0$. Таким образом, лишь с вероятностью 0,48 состояния длины 4 при данных распределениях по крайней мере один раз могут оказаться достижимыми.

Для приведенных выше распределений, с уменьшенными в 30 раз среднеквадратическими отклонениями, вероятности перечисленных выше состояний приняли нулевые значения. Необходимое число исполнителей, при котором отсутствуют очереди на прохождение дуг, оказалось равным трем. Этот же результат получен для детерминированных распределений вектора X при нулевых среднеквадратических отклонениях.

В заключение этого раздела проведем сравнительный анализ предложенных методов нахождения степени параллелизма.

1. Метод, основанный на применении алгоритма Брона–Кербоша, для ОССГ с узлами типа «И» в соответствии с доказанным в п. 2 утверждением позволяет найти точное значение степени параллелизма. В случае смешанных дисциплин свершения событий этот метод дает лишь верхнюю оценку этого параметра, что можно считать недостатком метода.

Альтернативный метод позволяет для графиков со смешанными типами узлов получать точные значения степени параллелизма. Для ОССГ с узлами только типа «И» оба метода равнозначны по получаемым результатам.

2. Однако альтернативный метод обладает большей сложностью. В случае его программной реализации потребуется разработка алгоритма построения дерева состояний. В то же время процедура построения матрицы G, используемой в методе п. 2, несравнимо проще, а ее анализ осуществляется стандартным алгоритмом Брона–Кербоша.

3. Точное значение числа исполнителей, необходимое для отсутствия очередей, при распределениях, заданных на конечных интервалах, может быть получено при имитационном моделировании дерева состояний ОССГ. При этом не требуется предварительное построение дерева состояний: для каждого случайного вектора времен прохождения дуг программным путем находится траектория на дереве состояний с определением всех требуемых параметров (максимального числа одновременно проходимых дуг, времени выполнения графика, критического пути и т.п.). Однако этот способ является существенно более трудоемким по сравнению с определением степени параллелизма, особенно при использовании метода, описанного в п. 2. Возможная при этом некоторая избыточность числа исполнителей, например, в случае проектирования архитектуры ВС, на современном этапе не является критичной.

4. Сетевые графики с видоизмененными узлами типа «ИЛИ»

Рассмотрим сетевые графики со смешанными типами узлов, для которых видоизменен алгоритм прохождения дуг, ведущих в узлы типа «ИЛИ». Если в рассмотренных выше графиках все дуги, входящие в некоторый узел типа «ИЛИ», проходились до конца независимо от того, в каком порядке происходит окончание их прохождения, то видоизмененная процедура предполагает, что после прохождения первой из входящих дуг прохождение всех остальных дуг приостанавливается. Также для этих дуг их прохождение блокируется, если оно еще не началось.

На рис. 5 представлен фрагмент графика с видоизмененным узлом 1 типа «ИЛИ», в который первой приходит дуга *1*. В этом случае прохождение дуги *2* приостанавливается, если оно уже началось. В противном случае дуга *3* может проходиться одновременно с дугами *4* и *5*, чего не может быть в случае, если узел 1 типа «И». Однако по завершении прохождения дуг *4* и *5* прохождение дуги *2* не начнется.

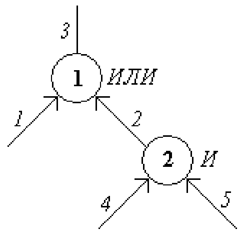

Рис. 5. Фрагмент сетевого графика

Применительно к сетевым графикам этого типа определение отношения φ претерпевает изменение.

Определение 2^*. Дуги u и v сетевого графика с видоизмененными узлами типа «ИЛИ» находятся в отношении φ ($u\varphi v$), если они либо не связаны цепочкой, либо всякая непустая цепочка соединяющих их дуг, содержит хотя бы один узел типа «ИЛИ», для которого ни u, ни v не являются входными.

Для графика на рис. 1, в котором узлы 2 и 4 имеют видоизмененный тип «ИЛИ», матрица графа G имеет вид:

$$
C = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
- & * & * & * & * & - & - & - & - & * \\
* & - & - & - & - & * & * & - & - & * \\
* & - & - & * & * & * & * & - & - & * \\
* & - & * & - & * & * & * & * & * & - \\
* & - & * & * & - & - & - & - & - & * \\
- & * & * & * & - & - & * & * & * & - \\
- & * & * & * & - & * & - & - & - & * \\
- & - & - & * & - & * & - & - & * & - \\
- & - & - & * & - & * & - & * & - & * \\
* & * & * & - & * & - & * & - & * & -
\end{bmatrix}
\end{array}.
$$

Алгоритм Брона–Кербоша применительно к графу G с матрицей инцидентности C позволяет найти следующие максимальные клики: (1 3 4 5), (1 3 5 10), (3 4 6 7) и (4 6 8 9). Альтернативный метод, основанный на построении дерева состояний (рис. 5), выявляет аналогичные клики. Знаком ■ на рис. 6 помечено заключительное состояние дерева. На этом дереве также можно проследить траекторию 16237910, при прохождении которой степень параллелизма, равная 4, не достигается.

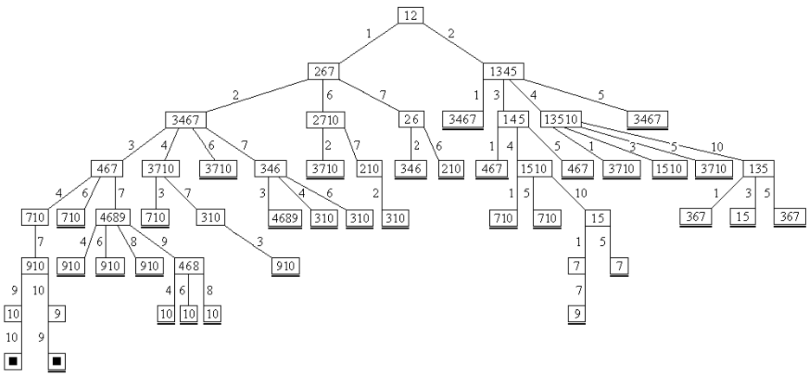

Рис. 6. Дерево состояний графика с блокированием дуг

5. Заключение

В работе рассмотрены два метода нахождения степени параллелизма обобщенных сетевых графиков, в которых допускаются две дисциплины свершения событий. Степень параллелизма характеризует максимальную загруженность производительных ресурсов во время исполнения сетевого графика, при которой не происходит образования очередей.

В случае произвольных ограниченных распределений времени прохождения дуг степень параллелизма может служить верхней оценкой числа исполнителей, при котором не происходит образования очередей на прохождение дуг.

Предложенная методика может служить составной частью построения архитектуры управляющих ВС для определения числа параллельных каналов с различными схемами резервирования.

Литература

1. ГОЛЕНКО-ГИНЗБУРГ Д.И. *Стохастические сетевые модели планирования и управления разработками*. – Воронеж: Научная мысль, 2010. – 283 с.
2. ЕЛИСЕЕВ В.В., ИГНАТУЩЕНКО В.В. *Проблема надежного выполнения сложных наборов задач в управляющих параллельных вычислительных системах* // Проблемы управления. – 2006. – №6. – С. 6–18.
3. ЕРМАКОВ С.М., МИХАЙЛОВ Г.А. *Статистическое моделирование*. – М.: Наука, 1982. – 296 с.
4. ИВАНОВ Н.Н., ИГНАТУЩЕНКО В.В., МИХАЙЛОВ А.Ю. *Статическое прогнозирование времени выполнения комплексов взаимосвязанных работ в многопроцессорных вычислительных системах* // Автоматика и телемеханика. – 2005. – №6. – С. 89–103.
5. ИВАНОВ Н.Н., ИГНАТУЩЕНКО В.В., МИХАЙЛОВ А.Ю. *Вычисление оценок распределения времени выполнения комплексов взаимосвязанных работ в многопроцессорных вычислительных системах* // Труды Института. – М.: ИПУ РАН, 2006. – Том XXVII. – С. 124–135.

6. ИВАНОВ Н.Н. *Аналитико-имитационное моделирование обобщенных стохастических сетевых графиков* // Управление большими системами. 2015. – Вып. 53. – С. 27–44.
7. ИВАНОВ Н.Н. *Резервирование в параллельных вычислительных системах, выполняющих комплексы взаимосвязанных работ* // Труды 6-й Международной конференции «Параллельные вычисления и задачи управления» (PACO'2012, Москва). – М.: ИПУ РАН, 2012. – Т. 1. – С. 134–139.
8. ИВАНОВ Н.Н. *Оптимальное резервирование в параллельных вычислительных системах, выполняющих комплексы взаимосвязанных работ* // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2014, Москва). – М.: ИПУ РАН, 2014. – С. 7246–7255.
9. ИВАНОВ Н.Н., ШАСТУН В.В. *Определение точных верхних оценок времени выполнения сложных наборов задач в управляющих параллельных вычислительных системах* // Автоматика и телемеханика. – 2010. – №9. – С. 174–184.
10. ИГНАТУЩЕНКО В.В., ИСАЕВА Н.А. *Резервирование взаимосвязанных программных модулей для управляющих параллельных вычислительных систем: организация, оценка отказоустойчивости, формализованное описание* // Автоматика и телемеханика. – 2008. – №10. – С. 142–161.
11. ХАРАРИ Ф. *Теория графов*. – Москва: Мир, 1973. – 300 с.
12. BRON C., KERBOSH J. *Algorithm 457– Finding all cliques of an undirected graph* // Comm. of ACM. – 1973. – Vol. 16. – P. 575–577.

THE DEGREE OF PARALLELISM IN GENERALIZED STOCHASTIC NETWORK

Nikolay Ivanov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, ivanov.nni@yandex.ru).

Abstract: We propose a novel concept of parallelism degree for generalized stochastic networks. This concept could be used in design of real-time parallel computing systems. It characterizes the maximal load which does not lead to queue emergence. In the case when arc duration distributed according to arbitrary bounded distributions the parallelism degree estimates the minimum number of processors in the network at which no queues emerges on the network arcs. We also developed a method for finding this parameter.

Keywords: generalized stochastic network, path, distributions of arcs duration, Bron–Kerbosh algorithm.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 08.09.2016.
Опубликована 31.01.2017.