УДК 519.715 + 681.514
ББК 22.1

АНИЗОТРОПИЙНЫЙ АНАЛИЗ В СЛУЧАЕ НЕНУЛЕВЫХ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ[1]

Бойченко В. А.[2]
(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

Обычно анизотропийная теория управления изучает линейные стохастические системы с нулевыми начальными условиями. В данной работе объектом анизотропийного анализа являются линейные дискретные стационарные системы с ненулевыми начальными условиями. В соответствии с основными постулатами анизотропийной теории в качестве критерия качества используется обобщённый анизотропийный коэффициент усиления, который определяется как максимум обобщённого среднеквадратичного коэффициента усиления системы с ненулевыми начальными условиями и случайным входом, анизотропия которых не превышает заданного неотрицательного значения a.

Ключевые слова: анизотропийная теория управления, анизотропийная норма, $\mathcal{H}_2$-норма, $\mathcal{H}_\infty$-норма.

Введение

Хорошо известные $\mathcal{H}_2$- и $\mathcal{H}_\infty$-теории построения оптимальных регуляторов, минимизирующих влияние внешних возмущений на выход линейной стационарной системы, основаны на использовании в качестве критериев качества $\mathcal{H}_2$- и $\mathcal{H}_\infty$-норм матричнозначных передаточных функций замкнутых систем. $\mathcal{H}_2$-теория предполагает, что на вход системы поступает случай-

[1] *Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 17-08-00185 А.*

[2] *Виктор Александрович Бойченко, научный сотрудник* (*victor@ipu.ru*).

ный сигнал, являющийся гауссовским белым шумом. $\mathcal{H}_\infty$-теория предполагает, что входное возмущение является квадратично суммируемым сигналом.

В анизотропийной теории управления вводится понятие анизотропийной нормы системы, которая является мерой чувствительности выхода системы к случайному входному сигналу с известным в определённом смысле отклонением от последовательности, являющейся гауссовским белым шумом. Анизотропийная норма системы является индуцированной нормой, предельными случаями которой являются $\mathcal{H}_2$- и $\mathcal{H}_\infty$-нормы, когда анизотропия a входного сигнала $a \to 0$ и $a \to \infty$ соответственно.

Обычно в рамках анизотропийной теории управления рассматриваются стохастические системы с нулевыми начальными условиями. Нет никаких принципиальных препятствий для расширения стандартного анизотропийного анализа и включения в рассмотрение систем с ненулевыми начальными условиями, чему и посвящена данная работа.

1. Основополагающие концепции анизотропийного анализа

Приведем основные определения и фундаментальные понятия анизотропийного анализа — анизотропия случайного вектора, средняя анизотропия стационарной эргодической последовательности гауссовских случайных векторов, анизотропийная норма линейной дискретной стационарной системы. Систематическое изложение анизотропийного анализа робастного качества, первоначально разработанного и представленного в [3, 10], можно найти в [1, 2, 6, 9][3].

1.1. АНИЗОТРОПИЯ СЛУЧАЙНОГО ВЕКТОРА

Обозначим через $\mathbb{L}_2^m$ класс $\mathbb{R}^m$-значных квадратично интегрируемых случайных векторов, распределённых абсолютно

[3] *Список литературы содержит в основном работы научной школы А.П. Курдюкова. Работы по анизотропийной теории вне этой школы отсутствуют.*

непрерывно относительно m-мерной лебеговой меры mes_m. Для любого вектора $w \in \mathbb{L}_2^m$ с плотностью распределения вероятности $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_+$ *анизотропия* $\mathbf{A}(w)$ определяется в [1, 8] как *минимальное* информационное уклонение Кульбака–Лейблера $\mathbf{D}(f\|p_{m,\lambda})$ распределения вектора w от семейства гауссовских распределений $p_{m,\lambda}$ на $\mathbb{R}^m$ с нулевым средним и скалярными ковариационными матрицами λI_m:

$$\mathbf{A}(w) = \min_{\lambda>0} \mathbf{D}(f\|p_{m,\lambda}) = \frac{m}{2}\ln\left(\frac{2\pi\mathrm{e}}{m}\mathbf{E}[|w|^2]\right) - \mathbf{h}(w), \tag{1}$$

здесь $\mathbf{E}[\cdot]$ — математическое ожидание, $\mathbf{h}(w)$ — дифференциальная энтропия вектора w относительно mes_m (см., например, [7]). В [1] показано, что минимум в (1) по всевозможным $\lambda > 0$ достигается при $\lambda = \mathbf{E}[|w|^2]/m$.

Обозначим через $\mathbb{G}^m(\Sigma)$ класс $\mathbb{R}^m$-значных гауссовских случайных векторов w с нулевым средним $\mathbf{E}[w] = 0$ и невырожденной ковариационной матрицей $\mathbf{cov}(w) = \Sigma$. Соответствующая плотность распределения вероятности имеет вид

$$p(w) = (2\pi)^{-m/2}(\det\Sigma)^{-1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}\|w\|^2_{\Sigma^{-1}}\right),$$

где $\|x\|_Q = \sqrt{x^{\mathrm{T}}Qx}$ — норма вектора x, индуцированная положительно определённой симметричной матрицей Q.

Лемма 1 (см. [1]).

а) *Анизотропия* $\mathbf{A}(w)$, *определённая посредством* (1)*, инвариантна относительно вращений и гомотетий* w*, т.е.* $\mathbf{A}(\lambda U w) = \mathbf{A}(w)$ *для любого* $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *и любой ортогональной матрицы* $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$.

б) *Для любой положительно определённой матрицы* $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times m}$

$$\min\{\mathbf{A}(w):\ w \in \mathbb{L}_2^m,\ \mathbf{E}[ww^{\mathrm{T}}] = \Sigma\} = -\frac{1}{2}\ln\det\frac{m\Sigma}{\mathrm{tr}\,\Sigma},$$

причём минимум достигается лишь на $w \in \mathbb{G}^m(\Sigma)$.

в) *Для любого* $w \in \mathbb{L}_2^m$ *выполняется* $\mathbf{A}(w) \geqslant 0$*, причём* $\mathbf{A}(w) = 0$ *в том и только том случае, если* $w \in \mathbb{G}^m(\lambda I_m)$ *для некоторого* $\lambda > 0$.

В силу утверждения а) этой леммы анизотропия $\mathbf{A}(w)$ может интерпретироваться как теоретико-энтропийная характеристика неинвариантности распределения случайного вектора w относительно группы унитарных преобразований и характеризует собой неизотропность распределения случайного вектора по направлению. Подобная интерпретация величины $\mathbf{A}(w)$ даёт содержательную физическую интерпретацию теоретико-информационных критериев, возникающих в стохастических задачах управления.

1.2. СРЕДНЯЯ АНИЗОТРОПИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Пусть $W = \{w_k\}_{-\infty<k<+\infty}$ — стационарная последовательность векторов $w_k \in \mathbb{L}_2^m$, интерпретируемая как дискретный случайный сигнал. Объединим элементы последовательности W, принадлежащие временно́му интервалу $[s, t]$, в случайный вектор

$$W_{s:t} = \begin{bmatrix} w_s \\ \vdots \\ w_t \end{bmatrix}.$$

Будем предполагать, что $W_{0:N}$ распределен абсолютно непрерывно для каждого $N \geqslant 0$. Определим согласно [1] *среднюю анизотропию* последовательности W как среднюю интенсивность анизотропии в единицу времени:

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = \lim_{N\to+\infty} \frac{\mathbf{A}(W_{0:N-1})}{N}. \tag{2}$$

Пусть $V = \{v_k\}_{-\infty<k<+\infty}$ — последовательность независимых случайных векторов $v_k \in \mathbb{G}^m(I_m)$, т.е. m-мерный гауссовский белый шум. Предположим, что $W = GV$ производится из V устойчивым формирующим фильтром с передаточной функцией $G(z) \in \mathcal{H}_2^{m\times m}$. Тогда спектральная плотность W определяется выражением

$$S(\omega) = \widehat{G}(\omega)\widehat{G}^*(\omega), \quad -\pi \leqslant \omega < \pi, \tag{3}$$

где $\widehat{G}(\omega) = \lim_{r\to 1-} G(re^{i\omega})$ — граничное круговое значение передаточной функции $G(z)$. В [9] показано, что средняя анизотропия (2) вычисляется в терминах спектральной плотности (3) и

$\mathcal{H}_2$-нормы формирующего фильтра G по формуле

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\det\frac{mS(\omega)}{\|G\|_2^2}d\omega. \tag{4}$$

Функционал средней анизотропии (4) всегда неотрицателен. Он принимает конечные значения, если формирующий фильтр G имеет полный ранг, в противном случае $\overline{\mathbf{A}}(G) = +\infty$ (см. [9, 10]). Равенство $\overline{\mathbf{A}}(G) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда формирующий фильтр G является системой полного пропускания (фазовращающей системой) с точностью до ненулевого постоянного множителя. В этом случае спектральная плотность (3) имеет вид $S(\omega) = \lambda I_m$, $-\pi \leqslant \omega < \pi$, для некоторого $\lambda > 0$, так что W представляет собой гауссовский белый шум с нулевым средним и скалярной ковариационной матрицей.

Для вычисления средней анизотропии помимо формулы (4), использующей функцию спектральной плотности S, можно использовать формулу типа Колмогорова–Сегё, которая выражает среднюю анизотропию в терминах вторых стохастических моментов, т.е. в терминах ковариационных матриц.

Пусть $W = GV$ — стационарная гауссовская последовательность, созданная формирующим фильтром $G \in \mathcal{H}_2^{m\times m}$. Введем последовательность предсказателей $\widehat{W} = \{\widehat{w}_k\}_{-\infty<k<+\infty}$ и последовательность ошибок предсказания $\widetilde{W} = \{\widetilde{w}_k\}_{-\infty<k<+\infty}$:

$$\widehat{w}_k = \mathbf{E}[w_k|\{w_j\}_{j<k}], \quad \widetilde{w}_k = w_k - \widehat{w}_k, \tag{5}$$

где $\mathbf{E}[\cdot|\cdot]$ – условное математическое ожидание. Так как при известных $\{w_j\}_{j<k}$ условное математическое ожидание $\mathbf{E}[\widetilde{w}_k|\{w_j\}_{j<k}]$ равно нулю:

$$\mathbf{E}[\widetilde{w}_k|\{w_j\}_{j<k}] = \mathbf{E}[w_k|\{w_j\}_{j<k}] - \widehat{w}_{k|k-1} = 0,$$

то последовательность $\{\widetilde{w}_k\}$ является последовательностью гауссовских векторов с нулевым математическим ожиданием и, в общем случае, с не единичной ковариационной матрицей.

Лемма 2 (см. [2, с. 36])**.** *Средняя анизотропия* (4) *последовательности $W = GV$, сгенерированной фильтром $G \in \mathcal{H}_2^{m\times m}$*

максимального ранга, выражается в терминах моментов второго порядка W и $\widetilde{W}$ следующим образом:

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = -\frac{1}{2}\,\ln\det\left(\frac{m\,\mathbf{E}[\widetilde{w}_0\widetilde{w}_0^{\mathrm{T}}]}{\mathbf{E}\left[|w_0|^2\right]}\right). \tag{6}$$

В силу матричного тождества

$$\mathbf{E}[\widetilde{w}_0\widetilde{w}_0^{\mathrm{T}}] = \left(\mathbf{E}[w_0w_0^{\mathrm{T}}]\mathbf{E}^{-1}[\widetilde{w}_0\widetilde{w}_0^{\mathrm{T}}]\right)^{-1}\mathbf{E}[w_0w_0^{\mathrm{T}}],$$

среднюю анизотропию (6) можно представить в виде суммы временнóй $\overline{\mathbf{A}}_t(W)$ и пространственной $\overline{\mathbf{A}}_s(W)$ компонент:

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = \overline{\mathbf{A}}_t(W) + \overline{\mathbf{A}}_s(W), \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{A}}_t(W) &= \frac{1}{2}\,\ln\det\left(\mathbf{E}[w_0w_0^{\mathrm{T}}]\left(\mathbf{E}[\widetilde{w}_0\widetilde{w}_0^{\mathrm{T}}]\right)^{-1}\right),\\
\overline{\mathbf{A}}_s(W) &= -\frac{1}{2}\,\ln\det\left(\frac{m\,\mathbf{E}[w_0w_0^{\mathrm{T}}]}{\mathbf{E}\left[|w_0|^2\right]}\right).
\end{aligned}$$

Пространственная составляющая $\overline{\mathbf{A}}_s(W)$ средней анизотропии не зависит от предыстории $\{w_j\}_{j<0}$, совпадает со значением анизотропии $\mathbf{A}(w_0)$ вектора w_0 и характеризует собой неравномерность распределения случайного вектора по компонентам в сечении случайной стационарной последовательности W. Следует отметить, что для скалярных сигналов величина $\overline{\mathbf{A}}_s(W)$ тождественно равна нулю и представляет интерес только при размерности входного сигнала $m > 1$.

Временнáя составляющая $\overline{\mathbf{A}}_t(W)$ средней анизотропии инвариантна относительно невырожденного преобразования координат в $\mathbb{R}^m$, т.е. $\overline{\mathbf{A}}_t(W) = \overline{\mathbf{A}}_t(TW)$ для любой невырожденной матрицы $T \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Благодаря вероятностной структуре последовательностей, образуемых векторами (5), временнóй член $\overline{\mathbf{A}}_t(W)$ совпадает с количеством информации $\mathbf{I}$ о векторе w_0, удержанной в части истории $\{w_j\}_{j<0}$:

$$\overline{\mathbf{A}}_t(G) = \mathbf{I}(w_0,\,\{w_j\}_{j<0})$$

и, следовательно, характеризует собой «предсказуемость» входного сигнала.

1.3. АНИЗОТРОПИЙНАЯ НОРМА МАТРИЦЫ

Пусть $F \in \mathbb{R}^{p\times m}$ – произвольная фиксированная матрица. Интерпретируя её как линейный оператор со случайным входом $w \in \mathbb{L}_2^m$, определим среднеквадратичный коэффициент усиления оператора F следующим образом (см. [1]):

$$\mathbf{Q}(F,w) = \sqrt{\frac{\mathbf{E}|Fw|^2}{\mathbf{E}|w|^2}}. \tag{8}$$

Для любого фиксированного $w \in \mathbb{L}_2^m$ функция $\mathbf{Q}(\,\cdot\,, w)$ задаёт индуцированную норму на $\mathbb{R}^{p\times m}$. Если, помимо квадратичной интегрируемости w, множество входов ничем не ограничено, то величина $\mathbf{Q}(F,w)$ может быть выбрана сколь угодно близкой к наибольшему сингулярному значению $\|F\|_\infty$ матрицы F.

Допустим теперь, что множество входных векторов w ограничено условием $\mathbf{A}(w) \leqslant a$, где $a \geqslant 0$ – заданный параметр. Например, если $a = 0$, то в силу утверждения в) леммы 1 множество входов будет состоять только из гауссовских случайных векторов $w_{a=0} \in \bigcup_{\lambda>0} \mathbb{G}^m(\lambda I_m)$ с нулевым средним и скалярными ковариационными матрицами λI_m. Для любого такого $w_{a=0}$ прямым вычислением получим:

$$\mathbf{Q}(F, w_{a=0}) = \frac{1}{\sqrt{m}}\|F\|_2,$$

где $\|F\|_2 = \sqrt{\mathrm{tr}(F^{\mathrm{T}}F)}$ – фробениусова норма матрицы F.

В случае произвольного $a \geqslant 0$ определим *a-анизотропийную норму* матрицы F таким образом (см. [1]):

$$|\!|\!|F|\!|\!|_a = \sup\left\{\mathbf{Q}(F,w) : w \in \mathbb{L}_2^m,\ \mathbf{A}(w) \leqslant a\right\}. \tag{9}$$

В [4, 10] показано, что a-анизотропийная норма любой фиксированной матрицы $F \in \mathbb{R}^{p\times m}$ является неубывающей функцией средней анизотропии a и удовлетворяет соотношениям:

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\|F\|_2 = |\!|\!|F|\!|\!|_0 \leqslant |\!|\!|F|\!|\!|_a \leqslant \lim_{a\to+\infty} |\!|\!|F|\!|\!|_a = \|F\|_\infty. \tag{10}$$

Таким образом, $\mathcal{H}_2$- и $\mathcal{H}_\infty$-нормы являются предельными случаями a-анизотропийной нормы при $a \to 0$ и $a \to +\infty$ соответственно.

2. Основные результаты

Рассмотрим объект, который описывается линейной дискретной стационарной системой с ненулевыми начальными условиями:

$$\begin{cases} x_{k+1} = A\,x_k + B\,w_k, & x_0 \neq 0, \\ z_k \quad = C\,x_k + D\,w_k, & k = 0, 1, 2, \ldots; \end{cases} \tag{11}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times l}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times l}$, A – асимптотически устойчивая матрица (спектральный радиус ϱ матрицы A меньше единицы $\varrho(A) < 1$), $x_k \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния объекта и x_0 – случайный вектор ненулевых начальных условий, $z_k \in \mathbb{R}^p$ – выход, $w_k \in \mathbb{R}^l$ – внешнее случайное возмущение. Пусть вектор начальных условий x_0 и входная последовательность $W = \{w_k\}_{0\leqslant k<+\infty}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\mathbf{E}\left[x_0 w_k^{\mathrm{T}}\right] = S_{xw} = 0, \tag{12}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E}\left[|w_k|^2\right] < \infty, \tag{13}$$

$$\mathbf{E}\left[w_j^{\mathrm{T}} w_i\right] = \operatorname{tr}\mathbf{E}\left[w_i w_j^{\mathrm{T}}\right] = \operatorname{tr} S_{ij} = \begin{cases} \operatorname{tr} S_i & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \tag{14}$$

Следуя анизотропийной теории управления [2] определим обобщённый среднеквадратичный коэффициент усиления Θ для системы (11) с ненулевыми начальными условиями и произвольной входной последовательностью, которые удовлетворяют условиям (12)–(14):

$$\Theta = \sqrt{\frac{\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E}\left[|z_k|^2\right]}{\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E}\left[|w_k|^2\right] + \mathbf{E}\left[|x_0|^2\right]}}. \tag{15}$$

Запишем решение системы (11) при $k > 0$ в явном виде (для $k = 0$, $x_0 \neq 0$ и $z_0 = Cx_0 + Dw_0$):

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B\, w_i\,,$$

$$z_k = CA^k x_0 + C \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B\, w_i + D\, w_k\,.$$

Введем вспомогательное обозначение для выхода $z_k = \mathring{z}_k + CA^k x_0$, где

$$\mathring{z}_k = \sum_{i=0}^{k} Z_{ki} w_i,$$

$$Z_{ki} = \begin{cases} CA^{k-i-1}B & \text{при } 0 \leqslant i < k, \\ D & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \notin [0, k]. \end{cases} \tag{16}$$

Тогда $|z_k|^2 = z_k^{\mathrm{T}} z_k$ можно представить в виде

$$|z_k|^2 = \mathring{z}_k^{\mathrm{T}} \mathring{z}_k + \mathring{z}_k^{\mathrm{T}} CA^k x_0 + x_0^{\mathrm{T}} (A^k)^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}} \mathring{z}_k + x_0^{\mathrm{T}} (A^k)^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}} CA^k x_0.$$

Усредним это уравнение и при усреднении учтем, что в соответствии с условием (12) $\mathbf{E}[w_k^{\mathrm{T}} M x_0] = \mathrm{tr}(M S_{xw}) = 0$ при $i \neq j$ для любой матрицы M и, следовательно:

$$\mathbf{E}\left[\mathring{z}_k^{\mathrm{T}} CA^k x_0\right] = \mathbf{E}\left[\sum_{i=0}^{k} w_i^{\mathrm{T}} Z_{ki}^{\mathrm{T}} CA^k x_0\right] =$$
$$= \sum_{i=0}^{k} \mathrm{tr}\left(Z_{ki}^{\mathrm{T}} CA^k \mathbf{E}\left[x_0 w_i^{\mathrm{T}}\right]\right) =$$
$$= \sum_{i=0}^{k} \mathrm{tr}\left(Z_{ki}^{\mathrm{T}} CA^k S_{xw}\right) = 0,$$

$$\mathbf{E}\left[x_0^{\mathrm{T}} (A^k)^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}} \mathring{z}_k\right] = \mathbf{E}\left[\left(\mathring{z}_k^{\mathrm{T}} CA^k x_0\right)^{\mathrm{T}}\right] = 0.$$

Тогда числитель в определении (15) примет такой вид (напомним, что операции усреднения, суммирования и взятия следа матрицы коммутируют между собой):

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E}\left[|z_k|^2\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E}\left[|\mathring{z}_k|^2\right] + \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E}\left[x_0^{\mathrm{T}}(A^k)^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}CA^k x_0\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E}\left[|\mathring{z}_k|^2\right] + \mathbf{E}\left[x_0^{\mathrm{T}}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(A^k)^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}CA^k\right)x_0\right].$$

Бесконечная сумма в круглых скобках — это грамиан наблюдаемости Γ

$$\Gamma = \Gamma^{\mathrm{T}} = \sum_{k=0}^{+\infty}(A^k)^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}CA^k, \tag{17}$$

который является решением уравнения Ляпунова

$$A^{\mathrm{T}}\Gamma A - \Gamma + C^{\mathrm{T}}C = 0.$$

Введем обозначение $S_{x_0} = \mathbf{E}[x_0x_0^{\mathrm{T}}]$ и запишем квадрат обобщённого коэффициента усиления (15) в виде

$$\Theta^2 = \frac{\mathrm{tr}\,(\Gamma S_{x_0}) + \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E}\left[|\mathring{z}_k|^2\right]}{\mathrm{tr}\,S_{x_0} + \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E}\left[|w_k|^2\right]}. \tag{18}$$

Теперь рассмотрим второе слагаемое в числителе дроби (18) и перепишем $|\mathring{z}_k|^2 = \mathring{z}_k^{\mathrm{T}}\mathring{z}_k$ в таком виде

$$|\mathring{z}_k|^2 = \sum_{j=0}^{k} w_j^{\mathrm{T}}Z_{kj}^{\mathrm{T}} \sum_{i=0}^{k} Z_{ki}w_i = \sum_{i,j=0}^{k} w_j^{\mathrm{T}}Z_{kj}^{\mathrm{T}}Z_{ki}w_i =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} w_i^{\mathrm{T}}Z_{ki}^{\mathrm{T}}Z_{ki}w_i + \sum_{\substack{i,\,j=0\\ i\neq j}}^{k} w_j^{\mathrm{T}}Z_{kj}^{\mathrm{T}}Z_{ki}w_i.$$

Так же как и в случае начальных условий усредним последнее равенство, но при усреднении воспользуемся условием (14), согласно которому $\mathbf{E}[w_j^{\mathrm{T}}Mw_i] = \mathrm{tr}(MS_{ij}) = 0$ при $i \neq j$ для любой матрицы M. Тогда второе слагаемое в числителе (18) примет следующий вид:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E}\left[|\mathring{z}_k|^2\right] = \mathrm{tr}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{k} Z_{ki}^{\mathrm{T}} Z_{ki} S_i\right). \tag{19}$$

Согласно определению (16) $Z_{ki} = 0$ при $i > k$, поэтому положим верхний предел суммирования по i равным $+\infty$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E}\left[|\mathring{z}_k|^2\right] = \mathrm{tr}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} Z_{ki}^{\mathrm{T}} Z_{ki} S_i\right).$$

Так как ряд (19) сходится абсолютно, то результат не зависит от порядка суммирования:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E}\left[|\mathring{z}_k|^2\right] = \mathrm{tr}\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} Z_{ki}^{\mathrm{T}} Z_{ki}\right) S_i.$$

Сумма в круглых скобках равна $B^{\mathrm{T}}\Gamma B + D^{\mathrm{T}}D$ и не зависит от i. Действительно, так как $Z_{ki} = 0$ при $k < i$, то нижний предел суммирования можно положить равным i:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} Z_{ki}^{\mathrm{T}} Z_{ki} = \sum_{k=i}^{+\infty} Z_{ki}^{\mathrm{T}} Z_{ki}.$$

Согласно (16) $Z_{kk} = D$, поэтому

$$\sum_{k=0}^{+\infty} Z_{ki}^{\mathrm{T}} Z_{ki} = D^{\mathrm{T}}D + \sum_{k=i+1}^{+\infty} Z_{ki}^{\mathrm{T}} Z_{ki}.$$

Выпишем Z_{ki} при $k > i$ в явном виде:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} Z_{ki}^{\mathrm{T}} Z_{ki} = D^{\mathrm{T}}D + \sum_{k=i+1}^{+\infty} B^{\mathrm{T}}(A^{k-i-1})^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}} C A^{k-i-1} B.$$

Сделаем замену $k = n + i + 1$ и получим:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} Z_{ki}^{\mathrm{T}} Z_{ki} = D^{\mathrm{T}}D + B^{\mathrm{T}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(A^n)^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}} C A^n\right) B.$$

Бесконечная сумма в круглых скобках – это грамиан наблюдаемости $\mathit{\Gamma}$ (17). Введём обозначение $S_w = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} S_k$ и запишем, в итоге, (19) в таком виде:

(20) $$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E}\left[|\mathring{z}_k|^2\right] = \operatorname{tr}\left[(B^{\mathrm{T}}\mathit{\Gamma} B + D^{\mathrm{T}}D)S_w\right].$$

Формальный вывод соотношения (20) проиллюстрируем наглядным примером. Для этого выпишем в явном виде несколько первых членов бесконечной суммы (19), предварительно упорядочив слагаемые для каждого $\mathring{z}_k$: сначала слагаемое, пропорциональное $D^{\mathrm{T}}D$, а затем остальные слагаемые в порядке убывания степени матрицы A. В силу громоздкости выражений сначала выпишем первое и второе слагаемые, затем – третье и четвёртое:

$$\begin{array}{lclcr}
\mathbf{E}[|\mathring{z}_0|^2]_{1,2} & = & \operatorname{tr}(D^{\mathrm{T}}DS_0) & & \\
\mathbf{E}[|\mathring{z}_1|^2]_{1,2} & = & \operatorname{tr}(D^{\mathrm{T}}DS_1) & + & \operatorname{tr}[B^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}CBS_0] \\
\mathbf{E}[|\mathring{z}_2|^2]_{1,2} & = & \operatorname{tr}(D^{\mathrm{T}}DS_2) & + & \operatorname{tr}[B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}CABS_0] \\
\mathbf{E}[|\mathring{z}_3|^2]_{1,2} & = & \operatorname{tr}(D^{\mathrm{T}}DS_3) & + & \operatorname{tr}[B^{\mathrm{T}}(A^2)^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}CA^2BS_0] \\
\mathbf{E}[|\mathring{z}_4|^2]_{1,2} & = & \operatorname{tr}(D^{\mathrm{T}}DS_4) & + & \operatorname{tr}[B^{\mathrm{T}}(A^3)^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}CA^3BS_0]
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcrcr}
\mathbf{E}[|\mathring{z}_2|^2]_{3,4} & = & \operatorname{tr}[B^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}CBS_1] & & \\
\mathbf{E}[|\mathring{z}_3|^2]_{3,4} & = & \operatorname{tr}[B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}CABS_1] & + & \operatorname{tr}[B^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}CBS_2] \\
\mathbf{E}[|\mathring{z}_4|^2]_{3,4} & = & \operatorname{tr}[B^{\mathrm{T}}(A^2)^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}CA^2BS_1] & + & \operatorname{tr}[B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}CABS_2]
\end{array}$$

Так как ряд (19) сходится абсолютно, то результат не зависит от порядка суммирования, поэтому от суммирования по строкам перейдем к суммированию по столбцам и после очевидных преобразований получим (20).

И, наконец, запишем квадрат обобщённого коэффициента усиления (18) в следующем виде:

(21) $$\Theta^2 = \frac{\operatorname{tr}(\mathit{\Gamma} S_{x_0}) + \operatorname{tr}\left[(B^{\mathrm{T}}\mathit{\Gamma} B + D^{\mathrm{T}}D)S_w\right]}{\operatorname{tr} S_{x_0} + \operatorname{tr} S_w} = \frac{\operatorname{tr}(\Lambda S)}{\operatorname{tr} S},$$

здесь Λ and S – квадратные блочно-диагональные матрицы размером $m = n + l$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathit{\Gamma} & 0 \\ 0 & B^{\mathrm{T}}\mathit{\Gamma}B + D^{\mathrm{T}}D \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} S_{x_0} & 0 \\ 0 & S_w \end{pmatrix}.$$

В соответствии с анизотропийной теорией управления [2] определим обобщённый анизотропийный коэффициент усиления Θ_a системы (11)–(14) как максимум коэффициента усиления по всем входам, анизотропия $\mathbf{A}(S)$ которых не превышает заданного значения a:

$$\Theta_a^2 = \max_{\mathbf{A}(S)\leqslant a} \Theta^{\,2} = \max_{\mathbf{A}(S)\leqslant a} \frac{\mathrm{tr}(\Lambda S)}{\mathrm{tr}\, S}\,. \tag{22}$$

Теорема 1. *Для любого $a \geqslant 0$ анизотропийный обобщённый коэффициент усиления* (22) *вычисляется по формуле*

$$\Theta_a^2 = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{1 - q\lambda_i}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{1 - q\lambda_i}}\,, \tag{23}$$

где λ_i – собственные значения неотрицательно определённой матрицы Λ и q – единственное решение уравнения

$$-\frac{1}{2}\ln\det \frac{m(I_m - q\Lambda)^{-1}}{\mathrm{tr}[(I_m - q\Lambda)^{-1}]} = a.$$

Доказательство. Перепишем определение (22) в эквивалентном виде:

$$\Theta_a^2 = \max_S \left\{ \mathrm{tr}\,(\Lambda S) : -\frac{1}{2}\ln\det(mS) \leqslant a,\ \mathrm{tr}\, S = 1 \right\}. \tag{24}$$

Будем искать максимум этого выражения методом неопределённых множителей Лагранжа. Функция Лагранжа будет иметь вид

$$L[S] = \mathrm{tr}(\Lambda S) + \lambda_1 \left(a + \frac{1}{2}\ln\det(mS) \right) + \lambda_2\,(1 - \mathrm{tr}\, S)\,,$$

где $\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$ – множители Лагранжа. Решение задачи нахождения экстремума сводится к решению уравнения на производную Фреше $dL[S] = 0$:

$$\begin{aligned} dL[S] &= \operatorname{tr}(\Lambda\, dS) + \frac{\lambda_1}{2}\operatorname{tr}(S^{-1}dS) - \lambda_2 \operatorname{tr}(dS) = \\ &= \operatorname{tr}\left[\left(\Lambda + \frac{\lambda_1}{2}S^{-1} - \lambda_2 I_m\right) dS\right] = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$S = \sigma(I_m - q\Lambda)^{-1},$$

где $\sigma = \dfrac{\lambda_1}{2\lambda_2} > 0$ и $q = \dfrac{1}{\lambda_2} > 0$.

Согласно последнему уравнению матрица S является функцией матрицы Λ. Следовательно, эти матрицы коммутируют между собой:

$$\Lambda S - S\Lambda = 0.$$

Кроме того, они симметричны и неотрицательно определены: грамиан наблюдаемости $\mathit{\Gamma} = \mathit{\Gamma}^{\mathrm{T}}$ – по определению (17), матрица $B^{\mathrm{T}}\mathit{\Gamma}B + D^{\mathrm{T}}D$ – по построению, а матрицы S_{x_0} и S_w^{T} являются таковыми по определению:

$$\begin{pmatrix} S_{x_0}^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & S_w^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{x_0} & 0 \\ 0 & S_w \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \mathit{\Gamma}^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & (B^{\mathrm{T}}\mathit{\Gamma}B + D^{\mathrm{T}}D)^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathit{\Gamma} & 0 \\ 0 & B^{\mathrm{T}}\mathit{\Gamma}B + D^{\mathrm{T}}D \end{pmatrix}.$$

Следовательно, существует унитарная матрица $U^* = U^{-1}$, которая одновременно приводит матрицы Λ и S к диагональному виду [5], следовательно, собственные числа λ_i и s_i матриц Λ и S будут связаны соотношением

$$s_i = \frac{\sigma}{1 - q\lambda_i}\,.$$

Выбирая тем или иным образом матрицу U, можно так или иначе упорядочить собственные значения λ_i матрицы Λ. Для определённости выберем матрицу U таким образом, чтобы собственные значения λ_i были упорядочены по убыванию:

$$\lambda_{\max} = \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{m-1} \geqslant \lambda_m = \lambda_{\min}.$$

Тогда и собственные значения s_i корреляционной матрицы S будут упорядочены аналогичным образом:

$$s_{\max} = s_1 \geqslant s_2 \geqslant \ldots \geqslant s_{m-1} \geqslant s_m = s_{\min}.$$

Для того чтобы собственные числа s_i матрицы S были положительными, необходимо, чтобы положительный параметр q был ограничен:

$$0 \leqslant q < \lambda_{\max}^{-1}(\Lambda).$$

Для нахождения положительного параметра σ воспользуемся условием $\operatorname{tr} S = 1$:

$$\operatorname{tr} S = \sigma \operatorname{tr}\left[(I_m - q\Lambda)^{-1}\right] = 1.$$

Следовательно,

$$\sigma = \frac{1}{\operatorname{tr}\left[(I_m - q\Lambda)^{-1}\right]}.$$

Таким образом, корреляционная матрица, на которой коэффициент усиления (24) достигает максимума, равна

$$S(q) = \frac{(I_m - q\Lambda)^{-1}}{\operatorname{tr}\left[(I_m - q\Lambda)^{-1}\right]}. \tag{25}$$

Переменная $q \in \left[\,0, \lambda_{\max}^{-1}(\Lambda)\,\right)$ параметризует искомое множество матриц $S(q)$. Используя полученное выражение (25), запишем как функцию q анизотропию $\mathcal{A}(q)$ и обобщённый анизотропийный коэффициент усиления $\Theta^2(q)$:

$$\mathcal{A}(q) = -\frac{1}{2} \ln\det \frac{m(I_m - q\Lambda)^{-1}}{\operatorname{tr}[(I_m - q\Lambda)^{-1}]}, \tag{26}$$

$$\Theta^2(q) = \frac{\operatorname{tr}\left[\Lambda(I_m - q\Lambda)^{-1}\right]}{\operatorname{tr}\left[(I_m - q\Lambda)^{-1}\right]} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\lambda_i}{1 - q\lambda_i}}{\sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{1}{1 - q\lambda_i}}. \tag{27}$$

Функции $\mathcal{A}(q)$ и $\Theta^2(q)$ являются однозначными и неубывающими по q [2], поэтому обобщённый анизотропийный коэффициент усиления как функцию a можно записать в виде $Q_a^2 =$

$Q^2(\mathcal{A}^{-1}(a))$, где $\mathcal{A}^{-1}$ – функция, обратная $\mathcal{A}$:

$$\Theta_a^2 = \Theta^2(\mathcal{A}^{-1}(a)) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\lambda_i}{1 - q\lambda_i}}{\sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{1}{1 - q\lambda_i}} \quad \text{при } q : \mathcal{A}(q) = a.$$

■

В качестве примера вычислим обобщённые анизотропийные коэффициенты усиления Θ_0 при $a = 0$ и Θ_∞ при $a \to +\infty$. Согласно уравнению (26) $a = 0$ тогда и только тогда, когда $q = 0$. Следовательно,

$$\Theta_0^2 = \frac{\operatorname{tr}\Lambda}{m} = \frac{\operatorname{tr}\mathit{\Gamma} + \operatorname{tr}(B^{\mathrm{T}}\mathit{\Gamma}B + D^{\mathrm{T}}D)}{m}.$$

Анизотропия $a \to +\infty$ при $q \to \lambda_{\max}^{-1}$, поэтому

$$\Theta_\infty^2 = \lambda_{\max}(\Lambda) = \max\left(\lambda_{\max}(\mathit{\Gamma}),\ \lambda_{\max}(B^{\mathrm{T}}\mathit{\Gamma}B + D^{\mathrm{T}}D)\right).$$

Следует отметить, что матрицы $\mathit{\Gamma}$ и $B^{\mathrm{T}}\mathit{\Gamma}B + D^{\mathrm{T}}D$ являются числовыми матрицами, поэтому вычисление Θ_0 и Θ_∞ сводится к стандартным операциям линейной алгебры.

3. Численный пример

Рассмотрим численную реализацию системы (11):

$$A = \begin{pmatrix} 0,23596 & -0,85556 & -0,68156 \\ -0,77842 & 0,00756 & -0,26014 \\ 1,09960 & -0,93759 & -0,22880 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -0,52481 & 1,8551 \\ 1,12830 & -0,2773 \\ 0,55014 & 1,06661 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -2,09920 & 0,37147 & 0,69535 \\ 0,63848 & -0,37418 & 0,87763 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1,03360 & 0,60107 \\ 0,41979 & -0,67402 \end{pmatrix}.$$

На рис. 1 приведены результаты вычисления обобщённого анизотропийного коэффициента усиления Θ_a как функции анизотропии a.

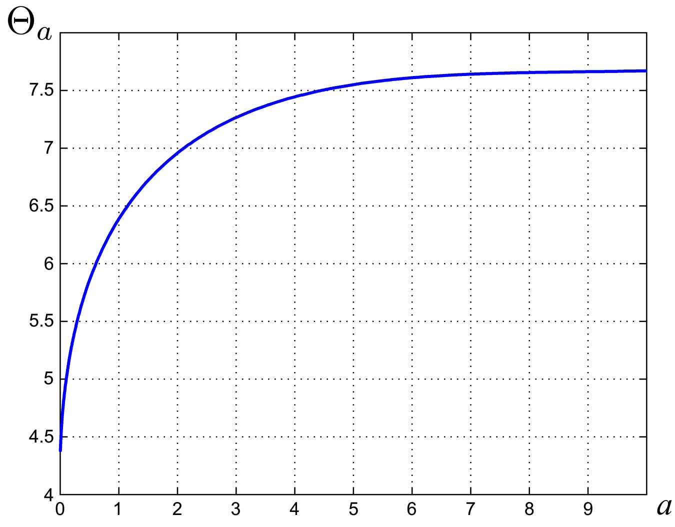

Рис. 1. Обобщённый анизотропийный коэффициент усиления

4. Заключение

В работе методами анизотропийного анализа исследуются линейные дискретные стационарные системы с ненулевыми начальными условиями. В соответствии с основными постулатами анизотропийной теории в качестве критерия качества используется обобщённый анизотропийный коэффициент усиления, который определяется как максимум обобщённого среднеквадратичного коэффициента усиления системы с ненулевыми начальными условиями и случайным входом, анизотропия которых не превышает заданного неотрицательного значения a. Вычисление обобщённого анизотропийного коэффициента усиления сводится к стандартной процедуре линейной алгебры (нахождение собственных значений матрицы) и решению полиномиального уравнения относительно скалярного параметра q.

Литература

1. ВЛАДИМИРОВ И.Г., ДАЙМОНД Ф., КЛОЕДЕН П. *Анизотропийный анализ робастного качества линейных нестационарных дискретных систем на конечном временном интервале* // Автоматика и телемеханика. – 2006. – №8. – С. 92–111.
2. ВЛАДИМИРОВ И.Г., КУРДЮКОВ А.П., МАКСИМОВ Е.А., ТИМИН В.Н. *Анизотропийная теория управления – новый подход к стохастической теории робастного управления* // Труды IV Междунар. конф. «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO ’05. – М.: ИПУ РАН, 2005. – С. 29–94.
3. ВЛАДИМИРОВ И.Г., КУРДЮКОВ А.П., СЕМЕНОВ А.В. *Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем* // Доклады АН. – 1995. – Т. 342, №3. – С. 583–585.
4. ВЛАДИМИРОВ И.Г., КУРДЮКОВ А.П., СЕМЕНОВ А.В. *Асимптотика анизотропийной нормы линейных стационарных систем* // Автоматика и телемеханика. – 1999. – №3. – С. 78–87.
5. ГАНТМАХЕР Ф.Р. *Теория матриц.* – М.: Физматлит, 2004. – 560 с.
6. КУСТОВ А.Ю., КУРДЮКОВ А.П., НАЧИНКИНА Г.Н. *Стохастическая теория анизотропийного робастного управления.* – М.: ИПУ РАН, 2012. – 128 с.
7. COVER T.M., THOMAS J.A. *Elements of Information Theory.* – N.Y.: Wiley, 1991. – 542 p.

8. DIAMOND P., KLOEDEN P., VLADIMIROV I.G. *Mean anisotropy of homogeneous Gaussian random fields and anisotropic norm of linear translation-invariant operators on multidimensional integer lattices* // J. Appl. Math. and Stoch. Anal. – 2003. – Vol. 16. – P. 209–231.
9. DIAMOND P., VLADIMIROV I.G., KURDYUKOV A.P., SEMYONOV A.V. *Anisotropy-based performance analysis of linear discrete time invariant control systems* // Int. J. Contr. – 2001. – Vol. 74. – P. 28–42.
10. VLADIMIROV I.G., KURDYUKOV A.P., SEMYONOV A.V. *On computing the anisotropic norm of linear discrete-time-invariant systems* // Proc. 13-th IFAC World Congress. – San-Francisco, CA, USA. – 1996. – P. 179–184.

ANISOTROPY-BASED ANALYSIS FOR CASE OF NONZERO INITIAL CONDITION

Victor Boichenko, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, (victor@ipu.ru).

Abstract: Well-known $\mathcal{H}_2$-norm- and $\mathcal{H}_\infty$-norm-theories allow construction of optimal regulators that minimize external disturbances' influence on the linear time-idependent system output. They are based on quality criteria of $\mathcal{H}_2$- and $\mathcal{H}_\infty$-norms of closed-loop transfer functions. In anisotropy theory, a notion of anisotropy norm is introduced. Usually in the context of the anisotropy-based robust performance analysis stochastic systems with zero initial condition are investigated. In this paper we extend this analysis and consider a linear discrete time invariant system under random disturbances and with the nonzero initial condition. In accordance with the basic postulates of the anisotropy-based control theory, the disturbance attenuation capabilities of system are quantified by the anisotropic generalized gain which is defined as the largest root mean square gain of the system with respect to a random input and the nonzero initial condition, anisotropy of which is bounded by a given nonnegative parameter a. A numerical example is considered.

Keywords: anisotropy-based control theory, anisotropic norm, $\mathcal{H}_2$-norm, $\mathcal{H}_\infty$-norm.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии И.Б. Фуртатом.

Поступила в редакцию 05.03.2017.
Дата опубликования 31.05.2017.