УДК 519.816
ББК 22.18

РЕПЕРНЫЕ ФУНКЦИИ[1]

Подиновский В. В.[2]
(*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва*)

Введено понятие реперной функции. Она оцифровывает все элементы конечного упорядоченного множества так, что для тех его элементов, которые могут играть роль реперных уровней (полезности, ценности, предпочтительности, качества, эффективности, или, напротив, вредности, опасности и т.п.) и, в частности, быть охарактеризованы содержательными оценками (например, словесными оценками «отлично», «хорошо» и т.д.), назначаются соответствующие числовые оценки (например, 5, 4 и т.д.). Рассмотрено несколько примеров таких функций, представляющих прикладной интерес.

Ключевые слова: упорядоченное множество, функция перечисления, функция полезности (ценности), лексимин, лексимакс, рейтинг.

1. Введение

Функции ценности, или полезности, широко используются для моделирования предпочтений, в том числе в задачах управления (см., например, [3, 6]). Они могут вводиться либо изначально (известный пример – взвешенная сумма частных крите-

[1] *Статья подготовлена в ходе работы в рамках Программы фундаментальных исследований Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ) и с использованием средств субсидии из государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации "«5-100"».*

[2] *Владислав Владимирович Подиновский, доктор технических наук, профессор* (podinovski@mail.ru).

риев в многокритериальных задачах принятия решений [14]), либо использоваться для представления полученного упорядочения объектов (управлений, стратегий, планов, вариантов решений и т.п.) по предпочтительности. Далее будет рассматриваться второй из указанных случаев. Кроме упорядочения по предпочтительности, или полезности[1], будут рассматриваться и упорядочения по обратной предпочтительности, или по вредности[2].

Пусть на непустом множестве A произвольной природы задан *строгий порядок* P. Он может иметь смысл предпочтения, или превосходства в полезности, и тогда aPb означает, что элемент a предпочтительнее, или полезнее элемента b. Но может иметь и смысл обратного предпочтения, или превосходства во вредности, и тогда aPb означает, что элемент a вреднее элемента b, или что элемент a менее предпочтителен, чем элемент b.

По определению, строгий порядок P – это иррефлексивное и транзитивное (а потому и асимметричное) бинарное отношение: для любых $a, b, c \in A$ неверно aPa и из aPb и bPc следует aPc (и поэтому если верно aPb, то bPa неверно). Кроме того, будем полагать, что строгий порядок P является *линейным*: для любых неравных элементов $a, b \in A$ верно либо aPb, либо bPa. Таким образом, все множество A оказывается упорядоченным (по полезности или же вредности). Упорядоченное множество, полученное из A при помощи P, будем обозначать $A_{\uparrow}$.

Определенная на A и принимающая числовые значения функция ψ называется *представляющей* на A строгий линейный порядок P, если $\psi(a) > \psi(b)$ верно тогда и только тогда, когда верно aPb. Если P – отношение предпочтения (превосходства в

---

[1] *Как отмечалось в экономической теории, бывают случаи, когда вместо слова «полезность» больше подходит слово «желаемость» (например, при сравнении удовольствий, которые могут и не быть полезными) или слово «желательность».*

[2] *Слово «вредность» употребляется нами как антоним к слову «полезность».*

полезности), то ψ называется *функций полезности* (или ценности), или предпочтения, и обозначается буквой u (или v). Для этой функции более предпочтительному (более полезному) элементу соответствует большее ее значение. Если же P – отношение обратного предпочтения (превосходства во вредности), то ψ назовем *функцией вредности* и обозначим буквой h. Большее значение этой функции приписывается менее предпочтительному (более вредному) элементу.

Далее будем полагать, что конечное множество A содержит $n \geq 3$ элементов. Среди них существует один наибольший a^* и один наименьший a_* элементы: для любого $a \neq a^*$ верно a^*Pa и для любого $a \neq a_*$ верно aPa_*. Если P – отношение полезности, то a_* – наихудший, наименее полезной элемент, а a^* – наилучший, наиболее полезный. Если P – отношение вредности, то a_* –наименее вредный элемент, a^* – наиболее вредный.

Поскольку множество A конечно, то представляющая функция ψ существует. Однако она не является единственной: если φ – возрастающая числовая функция, то $\varphi(\psi)$ также является представляющей функцией. Используя язык теории измерений [15], можно сказать, что представляющая функция «измеряет» полезность или же вредность в порядковой шкале.

Среди всех представляющих функций выделяют *функцию перечисления* ψ^e, которая приписывает n элементам множества A натуральные значения от 1 до n так, что $\psi^e(a_*) = 1$ и $\psi^e(a^*) = n$. Значения этой функции получаются в результате последовательного перечисления элементов множества от наименьшего к наибольшему. Во многих отношениях такая функция ценности является достаточно привлекательной. Однако ей присущи и недостатки. Например, при большом числе элементов n ее значения оказываются тоже большими, что не всегда удобно, так как, например, затрудняет их содержательную интерпретацию (см. примеры ниже). С другой стороны, все элементы получают номера «на равных основаниях» в соответствии с их местом в упорядоченном множестве $A_\uparrow$, хотя среди них могут быть такие, которые, с точки зрения выраженности полезности или вредности, явно выделяются (или могут быть выделены) среди всех остальных. Для устранения этих недостатков предлагается новый класс представляющих функций, которые имеют также и свои привлекательные свойства.

2. Реперные функции

Пусть среди элементов множества A выделено $r < n$ *реперных* элементов $a^1 = a_*$, a^2, …, $a^r = a^*$, занумерованных в порядке упорядочения согласно строгому линейному порядку P, т.е. верно a^2Pa^1, a^3Pa^2, …, a^rPa^{r-1}. В конкретных задачах в роли реперных могут выступать элементы, полезность или вредность которых имеет содержательную интерпретацию, и поэтому им можно приписать некоторые характеристические значения конструируемой функции ψ. Для упрощения записи далее будем полагать, что $\psi(a^1) = 1$, $\psi(a^2) = 2$, …, $\psi(a^r) = r$. Для элементов, находящихся в упорядоченном множестве $A_\uparrow$ между соседними реперными элементами a^j и a^{j+1} (обозначим их число через t_j), значения функции ψ назначим следующим образом: элементам приписываются, в порядке возрастания полезности или вредности, значения, выражаемые простыми дробями

$$j\frac{1}{t_j+1},\ j\frac{2}{t_j+1},\ \ldots,\ j\frac{t_j}{t_j+1}.$$

Эти дроби показывают, на каком «расстоянии», выражаемом числом «шагов» длиной $1/(t_j + 1)$, находится полезность или вредность рассматриваемого элемента от «реперной» полезности или вредности j. Назначение указанных дробных значений можно считать результатом своеобразной линейной интерполяции. Разумеется, вместо простых дробей можно использовать и десятичные (с приемлемым числом значащих цифр), однако при этом наглядность, по-видимому, уменьшится.

Введенные указанным способом представляющие функции будем называть *реперными* и в общем случае обозначать ψ^r. Значения реперной функции ψ^r называют *рейтинговыми индексами* элементов.

Если P – отношение превосходства в полезности, то будем говорить о *реперной функции полезности* и использовать обозначение u^r. А если P – отношение превосходства во вредности, то будем использовать наименование *реперная функция вредности* и обозначение h^r.

3. Реперные функции в многокритериальных задачах

В многокритериальных задачах считаются заданными множество объектов X и определенный на нем векторный критерий $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, состоящий из $m \geq 2$ частных критериев f_i. Под частным критерием f_i понимается функция с областью задания X и числовой областью значений Z_i. Объект x полностью характеризуется его векторной оценкой $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$, так что сравнение объектов по полезности или вредности сводится к сопоставлению их векторных оценок. Множество всех векторных оценок (область значений векторного критерия) есть $Z = Z_1 \times Z_2 \times \ldots \times Z_m$.

На множестве Z задано отношение нестрогого порядка R_*, которое является квазипорядком (оно рефлексивно и транзитивно). Это отношение имеет смысл нестрогого превосходства в полезности или же вредности: запись yR_*z означает, что векторная оценка не менее полезна (не менее предпочтительна) или же не менее вредна (не более предпочтительна), чем векторная оценка z. Отношение R_* считается полным: для любых векторных оценок $y, z \in Z$ верно yR_*z или zR_*y. Это отношение порождает на Z отношения строгого превосходства P_* и безразличия I_* следующим образом: yP_*z верно, когда верно yR_*z и неверно zR_*y, а yI_*z верно, когда верны оба соотношения yR_*z и zR_*y. Отношение I_* есть отношение эквивалентности (оно рефлексивно, транзитивно и симметрично). Оно разбивает множество Z на классы эквивалентности (классы безразличия), состоящие из эквивалентных (связанных отношением I_*) векторных оценок. Далее множество классов эквивалентности будем обозначать буквой A. На множестве A отношение P_* порождает отношение строгого предпочтения – строгий линейный порядок P – следующим образом: для разных классов $a, b \in A$ верно aPb, когда для любых векторных оценок y из a и z из b верно yP_*z.

Будем считать, что множество A конечно и содержит $n \geq 3$ элементов. Теперь для введенного множества A с определенным на нем отношением P можно использовать введенные выше понятия реперной функции и реперных оценок. Конкретизация введенных конструкций для нескольких типов многокритериальных задач рассматривается ниже. При этом будем полагать, что все критерии имеют общую область определения – конечное множество Z_0, так что областью значений векторного критерия является множество Z_0^m.

Пусть критерии имеют равную важность, причем уменьшение значений одних критериев не компенсируется увеличением значений других критериев (точные определения см. в [7]). В этом случае возникает семейство отношений предпочтения, названных в [7, 9] симметрически-лексикографическими, или SL-отношениями. Такие отношения используются для описания предпочтений в различных задачах оптимизации и принятия решений (см., например, [8, 12, 18, 19]).

Далее будем рассматривать случай, когда область значений критериев – множество Z_0 – состоит из первых q натуральных чисел: $Z_0 = \{1, 2, \ldots, q\}$, $q \geq 2$. Этот случай реализуется, например, когда шкала критериев q-балльная. Он возникает и после нумерации словесных оценок в порядке возрастания их полезности или вредности.

4. Реперные функции при лексиминном отношении превосходства в полезности

Будем полагать, что отношение превосходства на Z имеет смысл отношения предпочтения, или превосходства в полезности, и использовать в роли представляющей реперную функцию полезности u^r. Будем считать также, что большие значения критериев предпочтительнее меньших.

Здесь будем рассматривать случай, когда уменьшение меньших значений одних критериев не компенсируется увеличением больших значений других критериев. Соответствующее SL-отношение известно под названием лексиминного. Примеры использования лексиминного отношения в прикладных задачах можно найти в [1, 4, 5, 16].

Пусть $y_{\uparrow} = (y_{(1)}, y_{(2)}, \ldots, y_{(m)})$ – вектор, полученный из вектора $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ упорядочением его компонент по неубыванию: $y_{(1)} \le y_{(2)} \le \ldots \le y_{(m)}$. Например, $(5, 1, 1, 4)\uparrow = (1, 1, 4, 5)$ и $y_{(3)} = 4$. Лексиминное отношение нестрогого предпочтения – полный квазипорядок R_*^u – определяется так: $yR_*^u z$ верно, если выполнено одно из следующих $m + 1$ условий: 1) $y_{(1)} > z_{(1)}$; 2) $y_{(1)} = z_{(1)}$, $y_{(2)} > z_{(2)}$; …; m) $y_{(i)} = z_{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, m - 1$, $y_{(m)} > z_{(m)}$; $m + 1$) $y_{(i)} = z_{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Соотношение $yP_*^u z$ верно, если выполнено одно указанных условий, кроме последнего, а $yI_*^u z$ верно, если выполнено условие $m + 1$, т.е. если $y_{\uparrow} = z_{\uparrow}$. Поэтому, например, при $m = 3$ один из классов эквивалентности I_*^u составляют векторные оценки (2, 1, 1), (1, 2, 1) и (1, 1, 2). Каждый такой класс, содержащий векторную оценку y, можно представлять вектором $y_{\uparrow}$. Для упорядоченного множества классов эквивалентности I_*^u используем обозначение $Z_{\uparrow}^u$: это упорядочение задается отношением P^u, которое порождается отношением P_*^u.

Обозначим количество оценок $k \in Z_0$ в векторной оценке y через $e_k(y)$; понятно, что $\sum_{k=1}^{q} e_k(y) = m$. Пусть $e^k(y) = e_1(y) + e_2(y) + \ldots + e_k(y)$. Количество классов эквивалентности t^u – число элементов множества $Z_{\uparrow}^u$ – определяется по формуле [16]:

(1) $$t^u = (m + q - 1)!/[m!\,(q - 1)!].$$

Для иллюстрации в таблице 1 перечислены и занумерованы элементы множества $Z_{\uparrow}^u$ при $m = 3$ и $q = 5$; число этих элементов $t^u = 7!/(3!\,4!) = 35$.

Функция перечисления u^e в рассматриваемом случае задается формулой [2]:

(2) $$u^e(y) = \sum_{k=1}^{q-2} C_{m-e^k(y)+q-k-1}^{q-k} + e_q(y) + 1,$$

где C_m^k – биномиальные коэффициенты: согласно определению, $C_m^k = m!/[k!(m-k)!]$ при $m \geq k$ и $C_m^k = 0$ при $m < k$. Так, $u^e(1,3,4) = C^{5-1}_{3-1+5-1-1} + C^{5-2}_{3-1+5-2-1} + C^{5-3}_{3-2+5-3-1} + 0 + 1 = 11$. Для $m = 3$ и $q = 5$ значения функции перечисления u^e равны номерам элементов $y_\uparrow$ множества $Z_\uparrow^u$, указанным в таблице 1.

Таблица 1. Элементы $y_\uparrow$ множества $Z_\uparrow^u$, их порядковые номера и значения реперной функции u^r при $m = 3$, $q = 5$

№	$y_\uparrow$	u^r	№	$y_\uparrow$	u^r	№	$y_\uparrow$	u^r	№	$y_\uparrow$	u^r
1	(1,1,1)	1	2	(1,1,2)	$1\frac{1}{15}$	3	(1,1,3)	$1\frac{2}{15}$	4	(1,1,4)	$1\frac{3}{15}$
5	(1,1,5)	$1\frac{4}{15}$	6	(1,2,2)	$1\frac{5}{15}$	7	(1,2,3)	$1\frac{6}{15}$	8	(1,2,4)	$1\frac{7}{15}$
9	(1,2,5)	$1\frac{8}{15}$	10	(1,3,3)	$1\frac{9}{15}$	11	(1,3,4)	$1\frac{10}{15}$	12	(1,3,5)	$1\frac{11}{15}$
13	(1,4,4)	$1\frac{12}{15}$	14	(1,4,5)	$1\frac{13}{15}$	15	(1,5,5)	$1\frac{14}{15}$	16	(2,2,2)	2
17	(2,2,3)	$2\frac{1}{10}$	18	(2,2,4)	$2\frac{2}{10}$	19	(2,2,5)	$2\frac{3}{10}$	20	(2,3,3)	$2\frac{4}{10}$
21	(2,3,4)	$2\frac{5}{10}$	22	(2,3,5)	$2\frac{6}{10}$	23	(2,4,4)	$2\frac{7}{10}$	24	(2,4,5)	$2\frac{8}{10}$
25	(2,5,5)	$2\frac{9}{10}$	26	(3,3,3)	3	27	(3,3,4)	$3\frac{1}{6}$	28	(3,3,5)	$3\frac{2}{6}$
29	(3,4,4)	$3\frac{3}{6}$	30	(3,4,5)	$3\frac{4}{6}$	31	(3,5,5)	$3\frac{5}{6}$	32	(4,4,4)	4
33	(4,4,5)	$4\frac{1}{3}$	34	(4,5,5)	$4\frac{2}{3}$	35	(5,5,5)	5			

Среди всех векторных оценок естественно выделяются в качестве реперных оценки вида $y^j = (j, j, \ldots, j)$. Например, если успеваемость школьников оценивается в пятибалльной шкале, то векторные оценки $y^1 = (1, 1, \ldots, 1)$, $y^2 = (2, 2, \ldots, 2)$, $y^3 = (3, 3, \ldots, 3)$, $y^4 = (4, 4, \ldots, 4)$, $y^5 = (5, 5, \ldots, 5)$ можно характеризовать словесными оценками «очень плохо», «плохо», «посредственно», «хорошо», «отлично» и поставить им в соответствие значения реперной функции полезности 1, 2, 3, 4 и 5. Чтобы рассчитать значения реперной функции u^r для векторных оценок, лежащих между соседними реперными оценками, нужно знать их количество. При наличии соответствующих таблиц это сделать очень просто. Так, при $m = 3$ и $q = 5$ из таблицы 1 видно, что между y^1 и y^2 находится 14 векторных оценок, между y^2 и y^3 – 9, между y^3 и y^4 – 5 и между y^4 и y^5 – 2 векторные оценки. Значения реперной функции полезности u^r приведены в таблице 1.

Число элементов t_j^u, находящихся в упорядоченном множестве $Z_{\uparrow}^u$ между соседними реперными элементами y^j и y^{j+1}, равно $u^r(j + 1, j + 1, \ldots, j + 1) - u^r(j, j, \ldots, j) - 1$. Используя (2), нетрудно получить следующую расчетную формулу:

(3) $t_j^u = C_{m+q-j-1}^{q-j} - 1,\ j = 1, 2, \ldots, q-1$.

Согласно (3), при $m = 3$ и $q = 5$ имеем: $t_1^u = 14$, $t_2^u = 9$, $t_3^u = 5$, $t_2^u = 2$, и поэтому знаменатели $t_j^u + 1$ дробных частей значений реперной функции полезности u^r равны соответственно 15, 10, 6 и 3 (см. таблицу 1).

Обозначим через y^μ векторную оценку, составленную из m чисел, равных минимальной компоненте y_- векторной оценки y. Для значений функции $u^r(y)$ можно записать следующую формулу, имеющую смысл смешанной дроби:

(4) $u^r(y) = y_- \dfrac{u^e(y) - u^e(y^\mu)}{t_j^u + 1}$.

Например, для $y = (2, 5, 4)$ имеем $y_- = 2$, $y^\mu = (2, 2, 2)$ и, согласно (2) и (3) (см. также таблицу 1), $u^e(y) = 24$, $u^e(y^\mu) = 16$, $t_2^u = 9$. Поэтому, согласно (4), $u^r(y) = 2\tfrac{8}{10}$.

5. Реперные функции при лексимаксном отношении превосходства во вредности

Будем полагать, что отношение превосходства на Z имеет смысл отношения превосходства во вредности, и использовать в роли представляющей реперную функцию вредности h^r. Будем считать также, что бóльшие значения критериев отражают бóльшую вредность. Примем, что уменьшение бóльших значений одних критериев не компенсируются уменьшением меньших значений других критериев. Соответствующее SL-отношение известно под названием лексимаксного.

Пусть $y_{\downarrow} = (y_{[1]}, y_{[2]}, \ldots, y_{[m]})$ – вектор, полученный из вектора $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ упорядочением его компонент по не возрастанию: $y_{[1]} \geq y_{[2]} \geq \ldots \geq y_{[m]}$. Например, $(5, 1, 1, 4)_{\downarrow} = (5, 4, 1, 1)$ и $y_{[2]} = 4$. Лексимаксное отношение нестрогого превосходства во вредности – полный квазипорядок R_*^h – определяется так: $yR_*^h z$ верно, если выполнено одно из следующих $m + 1$ условий: 1) $y_{[1]} > z_{[1]}$; 2) $y_{[1]} = z_{[1]}$, $y_{[2]} > z_{[2]}$; …; m) $y_{[i]} = z_{[i]}$, $i = 1, 2, \ldots, m - 1$, $y_{(m)} > z_{(m)}$; $m + 1$) $y_{[i]} = z_{[i]}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Соотношение $yP_*^h z$ верно, если выполнено одно из указанных условий, кроме последнего, а $yI_*^h z$ верно, если выполнено условие $m + 1$, т.е. если $y_{\downarrow} = z_{\downarrow}$. Поэтому, например, при $m = 3$ один из классов эквивалентности составляют векторные оценки (2, 1, 1), (1, 2, 1) и (1, 1, 2). Для упорядоченного множества классов эквивалентности I_*^h используем обозначение $Z_{\uparrow}^h$: это упорядочение задается отношением P^h, которое порождается отношением P_*^h. Поскольку, как нетрудно убедиться, отношения эквивалентности I_*^u и I_*^h равны, то и для лексимаксного отношения число классов эквивалентности $t^h = t^u$ можно рассчитать по формуле (1).

Для иллюстрации в таблице 2 перечислены элементы $y_{\downarrow}$ множества $Z_{\uparrow}^h$ при $m = 3$ и $q = 5$ и указаны соответствующие значения реперной функции вредности h^r; число этих элементов, согласно (1), $t^h = t^u = 7!/(3!\,4!) = 35$.

Примерами многокритериальных задач, в которых превосходство во вредности можно описывать при помощи лексимаксного отношения, могут служить задачи, в которых опасность (скажем, радиационная) обстановки оценивается словесными оценками «безопасно», «низкая степень опасности», «средняя степень опасности», «высокая степень опасности» и «катастрофическая степень опасности» с соответствующими числовыми оценками 1, 2, 3, 4 и 5. Если система состоит из m равных по значимости подсистем, то опасность обстановки можно характеризовать вектором $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, где y_i – числовая оценка опасности для i-й подсистемы.

Таблица 2. Элементы множества $Z_{\uparrow}^{h}$, их порядковые номера и значения реперной функции h^r при m = 3, q = 5

№	$y_{\uparrow}$	h^r	№	$y_{\uparrow}$	h^r	№	$y_{\uparrow}$	h^r	№	$y_{\uparrow}$	h^r
1	(1, 1, 1)	1	2	(2, 1, 1)	$1\frac{1}{3}$	3	(2, 2, 1)	$1\frac{2}{3}$	4	(2, 2, 2)	2
5	(3, 1, 1)	$2\frac{1}{6}$	6	(3, 2, 1)	$2\frac{2}{6}$	7	(3, 2, 2)	$2\frac{3}{6}$	8	(3, 3, 1)	$2\frac{4}{6}$
9	(3, 3, 2)	$2\frac{5}{6}$	10	(3, 3, 3)	3	11	(4, 1, 1)	$3\frac{1}{10}$	12	(4, 2, 1)	$3\frac{2}{10}$
13	(4, 2, 2)	$3\frac{3}{10}$	14	(4, 3, 1)	$3\frac{4}{10}$	15	(4, 3, 2)	$3\frac{5}{10}$	16	(4, 3, 3)	$3\frac{6}{10}$
17	(4, 4, 1)	$2\frac{7}{10}$	18	(4, 4, 2)	$3\frac{8}{10}$	19	(4, 4, 3)	$3\frac{9}{10}$	20	(4, 4, 4)	4
21	(5, 1, 1)	$4\frac{1}{15}$	22	(5, 2, 1)	$4\frac{2}{15}$	23	(5, 2, 2)	$4\frac{3}{15}$	24	(5, 3, 1)	$4\frac{4}{15}$
25	(5, 3, 2)	$4\frac{5}{15}$	26	(5, 3, 3)	$4\frac{6}{15}$	27	(5, 4, 1)	$4\frac{7}{15}$	28	(5, 4, 2)	$4\frac{8}{15}$
29	(5, 4, 3)	$4\frac{9}{15}$	30	(5, 4, 4)	$4\frac{10}{15}$	31	(5, 5, 1)	$4\frac{11}{15}$	32	(5, 5, 2)	$4\frac{12}{15}$
33	(5, 5, 3)	$4\frac{13}{15}$	34	(5, 5, 4)	$4\frac{14}{15}$	35	(5, 5, 5)	5			

Пусть $\vec{y}$ – векторная оценка, полученная из векторной оценки y заменой ее координат y_i на $\vec{y}_i = q - y_i + 1$. Легко видеть, что из вектора $y_{\downarrow}$ указанным образом сразу получается вектор $\vec{y}_{\uparrow}$.

Если верно $y_{\downarrow} P^h z_{\downarrow}$, то верно и $\vec{y}_{\uparrow} P^u \vec{z}_{\uparrow}$; справедливо и обратное утверждение. Следовательно, упорядочения (одного и того же) множества классов эквивалентности (их число равно $t^h = t^u$) порядками P^h и P^u взаимно обратны. Поэтому

(5) $\quad h^e(y) = t^h - u^e(\vec{y}) + 1, \quad h^r(y) = q - u^r(\vec{y}) + 1.$

Например, при m = 3, q = 5 имеем (см. таблицы 1 и 2) t^h = 35 и

$$h^e(5,3,2) = 35 - u^e(1,3,4) + 1 = 35 - 11 + 1 = 25,$$

$$h^r(5,3,2) = 5 - u^r(1,3,4) + 1 = 5 - 1\tfrac{10}{15} + 1 = 4\tfrac{5}{15}.$$

Расчеты по формулам (5) можно производить с использованием формул (2) и (4).

6. Реперные функции в задачах с критериями разной важности

Рассмотрим теперь случай, когда в многокритериальной задаче критерии f_i имеют разную важность (значимость, весомость), причем для величин их важности β_i известны соотношения $\beta_1 : \beta_2 : \ldots : \beta_m$ (точные определения понятий, связанных с количественной важностью критериев, см. в [10, 11, 13, 18]). Полагая, что все числа β_i рациональные, несложно указать натуральные числа n_i, для которых верны соотношения:

$\beta_1 : \beta_2 : \ldots : \beta_m = n_1 : n_2 : \ldots : n_m$.

Теперь, используя предложенный в [10, 11, 18] прием «клонирования», заменим каждую векторную оценку y расширенной векторной оценкой $\hat{y}$, которая формируется следующим образом: вначале ставится n_1 раз компонента y_1, затем n_2 раз компонента y_2, и т.д. Например, при $m = 3$, $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, $n_3 = 4$ для $y = (5, 2, 3)$ получим $\hat{y} = (5, 5, 2, 3, 3, 3, 3)$. Векторные оценки вида $\hat{y}$ можно рассматривать как векторы значений равноважных критериев (числом $n_1 + n_2 + \ldots + n_m$), при помощи которых оцениваются объекты из множества X. Поэтому далее можно применять все полученные выше результаты для случая равноважных критериев.

Рассмотрим простой пример. Пусть $m = 2$, $q = 5$, $n_1 = 2$, $n_2 = 1$. Тогда каждой векторной оценке $y = (y_1, y_2)$ будет соответствовать расширенная векторная оценка $\hat{y} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3) = (y_1, y_1, y_2)$. Следовательно, значения реперных функций полезности $u^r(y)$ и вредности $h^r(y)$ задаются таблицами 1 и 2 для $u^r(\hat{y})$ и $h^r(\hat{y})$ соответственно. Например, если $y = (2, 4)$, то $\hat{y} = (2, 2, 4)$, $\hat{y}_\uparrow = (2, 2, 4)$, $\hat{y}_\downarrow = (4, 2, 2)$, и поэтому $u^r(\hat{y}) = 2\tfrac{2}{10}$ и $h^r(\hat{y}) = 3\tfrac{3}{10}$.

Прием «клонирования» в прикладной задаче с лексиминным отношением предпочтения был использован в [4] для построения функции перечисления.

7. Реперные функции в задачах с иерархической критериальной структурой

Для задач, в которых критерии образуют иерархию, причем все критерии нижнего уровня имеют общую шкалу, можно применять развитый выше подход, если для формирования реперных функций полезности или вредности для значений критериев некоторого уровня использовать значения реперных функций для критериев нижележащего уровня. Для пояснения и иллюстрации рассмотрим пример небольшой размерности.

Пусть некоторая система состоит из двух равноважных по вредности (например, опасности) подсистем, причем первая подсистема состоит из двух равноважных агрегатов, а вторая – из трех равноважных агрегатов. Уровень вредности каждого i-го агрегата оценивается «своим» критерием второго (нижнего) уровня f_i^2, причем область значений каждого из этих пяти критериев $Z_0 = \{1, 2\}$. Критериальная структура для рассматриваемой задачи представлена на рис. 1. Уровень вредности подсистем оценивается соответствующими критериями первого уровня f_1^1 и f_2^1. Уровень вредности системы в целом характеризуется критерием нулевого (верхнего) уровня f^0.

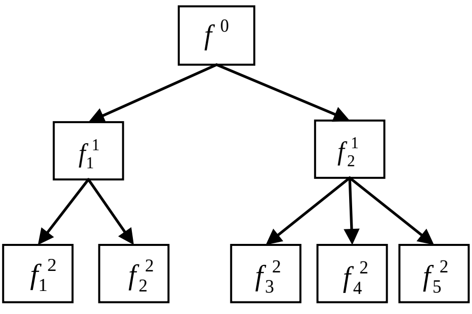

Рис. 1. Критериальная структура

В таблицах 3 и 4 представлены возможные значения векторных оценок состояний подсистем и соответствующие значения реперных функций первого уровня $h_1^{1^r}$ и $h_2^{1^r}$. В таблице 5 представлены возможные значения векторных оценок состояний системы, компонентами которых являются реперные функции первого уровня, и значения реперной функции нулевого (верхнего уровня) h^r.

Таблица 3. Векторные оценки состояний первой подсистемы и значения реперной функции $h_1^{1^r}$

y_1^2	y_2^2	$(y_1^2, y_2^2)_\downarrow$	$h_1^{1^r}$	y_1^2	y_2^2	$(y_1^2, y_2^2)_\downarrow$	$h_1^{1^r}$
1	1	(1,1)	1	2	1	(2,1)	$1\frac{1}{2}$
1	2	(2,1)	$1\frac{1}{2}$	2	2	(2,2)	2

Таблица 4. Векторные оценки состояний второй подсистемы и значения реперной функции $h_2^{1^r}$

y_3^2	y_4^2	y_5^2	$(y_3^2, y_4^2, y_5^2)_\uparrow$	$h_2^{1^r}$	y_3^2	y_4^2	y_5^2	$(y_3^2, y_4^2, y_5^2)_\uparrow$	$h_2^{1^r}$
1	1	1	(1, 1, 1)	1	1	1	2	(2, 1, 1)	$1\frac{1}{3}$
1	2	1	(2, 1, 1)	$1\frac{1}{3}$	2	1	1	(2, 1, 1)	$1\frac{1}{3}$
1	2	2	(2, 2, 1)	$1\frac{2}{3}$	2	1	2	(2, 2, 1)	$1\frac{2}{3}$
2	2	1	(2, 2, 1)	$1\frac{2}{3}$	2	2	2	(2, 2, 2)	2

Таблица 5. Векторные оценки состояний системы и значения реперной функции h^r

$h_1^{1^r}$	$h_2^{1^r}$	$(h_1^{1^r}, h_2^{1^r})_\downarrow$	h^r	$h_1^{1^r}$	$h_2^{1^r}$	$(h_1^{1^r}, h_2^{1^r})_\downarrow$	h^r	$h_1^{1^r}$	$h_2^{1^r}$	$(h_1^{1^r}, h_2^{1^r})_\downarrow$	h^r
1	1	(1,1)	1	1	$1\frac{1}{3}$	$(1\frac{1}{3},1)$	$1\frac{1}{11}$	$1\frac{1}{2}$	1	$(1\frac{1}{2},1)$	$1\frac{2}{11}$
$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{3}$	$(1\frac{1}{2},1\frac{1}{3})$	$1\frac{3}{11}$	1	$1\frac{2}{3}$	$(1\frac{2}{3},1)$	$1\frac{4}{11}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{2}{3}$	$(1\frac{2}{3},1\frac{1}{2})$	$1\frac{5}{11}$
1	2	(2,1)	$1\frac{6}{11}$	2	1	(2,1)	$1\frac{7}{11}$	2	$1\frac{1}{3}$	$(2,1\frac{1}{3})$	$1\frac{8}{11}$
$1\frac{1}{2}$	2	$(2,1\frac{1}{2})$	$1\frac{9}{11}$	2	$1\frac{2}{3}$	$(2,1\frac{2}{3})$	$1\frac{7}{11}$	2	2	(2,2)	2

В случае критериев разной важности следует применить ранее описанный прием «клонирования» соответствующих координат векторных оценок.

8. Заключение

Реперные функции являются наглядным средством представления объектов в упорядоченных множествах, если некоторые из объектов выделяются как реперные своими характерными свойствами или оценками. Для случаев, когда упорядочение векторных оценок в многокритериальных задах осуществляется отношениями лексимакса или лексимина, значения реперных функций могут быть рассчитаны аналитически.

Литература

1. АЛЕСКЕРОВ Ф.Т., КАТАЕВА Е.С., ПИСЛЯКОВ В.В., ЯКУБА В.И. *Оценка вклада научных работников методом порогового агрегирования* // Управление большими системами: сборник трудов. – 2013. – №44. – С. 172–189.
2. КАЛЯГИН В.А., ЧИСТЯКОВ В.В. *Модель некомпенсаторного агрегирования с произвольным набором оценок* // Доклады РАН. – 2008. – Т. 421 – С. 607–610.
3. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами*. – М.: МПСИ, 2005. – 584 с.
4. ГОНЧАРОВ А.А., ЧИСТЯКОВ В.В. *Агрегирование предпочтений без учета компенсаций и рейтингование*. Препринт WP7/2010/04. – М.: Изд. Дом ГУ ВШЭ, 2010. – 40 с.
5. ГОНЧАРОВ А.А., ЧИСТЯКОВ В.В. *Рейтингования без компенсаций и их применение* // Проблемы управления. – 2012. – №2. – С. 45–52.
6. ОРЛОВ А.И. *Менеджмент* / Учебник. – М.: Изумруд, 2003. – 298 с.
7. ПОДИНОВСКИЙ В.В. *Многокритериальные задачи с однородными равноценными критериями* // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1975. – № 2. – С. 330–344.
8. ПОДИНОВСКИЙ В.В. *Принцип гарантированного результата для частичных отношений предпочтения* // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1979. – №6. – С. 1436–1450.

9. ПОДИНОВСКИЙ В.В. *Симметрически-лексикографические задачи оптимизации и антагонистические игры* // Автоматика и вычислительная техника. – 1981. – №5. – С. 55–60.
10. ПОДИНОВСКИЙ В.В. *Количественные оценки важности критериев в многокритериальной оптимизации* // Научно-техническая информация. Серия 2. Информационные процессы и системы. – 1999. – №5. – С. 22–25.
11. ПОДИНОВСКИЙ В.В. *Количественная важность критериев* // Автоматика и телемеханика. – 2000. – №5. – С. 110–123.
12. ПОДИНОВСКИЙ В.В. *Задача оценивания коэффициентов важности как симметрически-лексикографическая задача оптимизации* // Автоматика и телемеханика. – 2003. – №3. – С. 150–162.
13. ПОДИНОВСКИЙ В.В. *Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений* / Учебное пособие. – М.: Физматлит, 2007. – 64 с.
14. ПОДИНОВСКИЙ В.В., ПОТАПОВ М.А. *Метод взвешенной суммы критериев в анализе многокритериальных решений: pro et contra*//Бизнес-информатика.–2013.–№3.–С. 41–48.
15. ПФАНЦАГЛЬ И. *Теория измерений*.–М.: Мир, 1976.–248 с.
16. ALESKEROV F.T., CHISTYAKOV V.V. *The threshold decision making effectuated by the enumerating preference function* // Int. J. of Information Technology and Decision Making. – 2013. – Vol. 12, No. 6. – P. 1201–1222.
17. PODINOVSKI V.V. *The quantitative importance of criteria for MCDA* // J. of Multi-Criteria Decision Analysis. – 2002. – Vol. 11. – P. 1–15.
18. PODINOVSKI V.V. *Interval articulation of superiority and precise elicitation of priorities* // European J. of Operational Research. – 2007. – Vol. 180. – P. 406 – 417.
19. SEN A.K. *Collective choice and social welfare*. – San Francisco: Holden Day, 1970. –255 p.

REPER FUNCTIONS

Vladislav Podinovski, National Research University Higher School of Economics, Moscow, Doctor habilitatus, professor (podinovski@mail.ru).

Abstract: *After discussing the notion of utility and utility function, we introduce a concept of reper value function. It enumerates all the elements of the finite ordered set so that for those elements, which can play the role of reference levels (of preference, quality, efficiency, or, conversely, harm, danger, etc.) and to be characterized by meaningful estimates (e.g., verbal assessments "excellent", "good", etc.) the appropriate numerical scores (e.g., 5, 4, etc.) will be assigned. We give several examples of such functions representing practical interest. They are associated with leximin and leximax relations that are used for modeling of preferences in multicriteria problems with criteria of equal importance, when the decrease in the low values of some criteria are not compensated by an increase in the larger values of other criteria. We show how to build the reference functions when the criteria have different importance, and also when criterial structure is hierarchical.*

Keywords: ordered set, enumeration function, utility (value) function, leximin, leximax, rating.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Ф.Т. Алескеровым.

Поступила в редакцию 03.02.2017.
Опубликована 31.07.2017.