УДК 336.6
ББК 65.05

# ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ КОНЦЕПЦИИ «ЗАТРАТЫ-ВЫПУСК» ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ

**Романов Б. А.**[1]
(*Московский авиационный институт*
(*Национальный исследовательский университет*), *Москва*)

*Анализируются возможности использования модели В. Леонтьева «затраты-выпуск» для описания взаимодействия группы предприятий. Анализ показывает, что непосредственное применение этой модели невозможно ввиду практической невозможности реализации в модели В. Леонтьева многопродуктового подхода. Предлагается обобщение этой модели для реализации многопродуктового подхода. Это обобщение реализовано в виде представления реального предприятия как совокупности условных предприятий, каждое из которых выпускает один продукт. Совокупность условных предприятий, выпускающее количество продуктов, равное количеству условных предприятий, моделирует реальное предприятие, выпускающее такое же количество продуктов.*

Ключевые слова: производственные затраты, выпуск продукции, модель «затраты-выпуск», коэффициенты прямых затрат.

[1] *Борис Александрович Романов, доцент, кандидат технических наук* (*boris094@mail.ru*).

## 1. Введение

Модель В. Леонтьева «затраты-выпуск» [5] используется достаточно широко за рубежом при анализе экономики государства, например при определении взаимного влияния отраслей и секторов [14]. Основой этой модели являются таблицы «затраты-выпуск» (межотраслевой баланс). В СССР межотраслевые балансы разрабатывались, начиная с 1959 года, регулярно: за 1966, 1972, 1977, 1982, 1987 годы и с достаточно подробной продуктовой детализацией.

В постсоветское время эти исследования были практически свернуты. Последние таблицы относятся к 2003 году и опубликованы в 2013 г. Они включают: таблицу ресурсов товаров и услуг по 24 их видам, таблицы использования товаров и услуг; симметричную таблицу «затраты-выпуск», а также вспомогательные таблицы (матрицы) транспортных и торговых наценок, налогов и субсидий на продукты [7].

Насколько далека Россия от мирового уровня разработок межотраслевого баланса показывают следующие примеры. Годовые таблицы «затраты-выпуск» для США по 65 видам продуктов за 1998–2009 годы находятся в открытом доступе на сайте Бюро экономического анализа США. Годовые таблицы разрабатываются на основе базовых таблиц, которые составляются в более широкой номенклатуре продуктов, последние базовые таблицы разработаны за 2002 год по 495 продуктам. Разработка таблиц «затраты-выпуск» является обязательным элементом статистической базы для стран – членов Евросоюза [7].

Правительство России 14 февраля 2009 года выпустило распоряжение N 201-р, которое предписывало Росстату «в целях формирования официальной статистической информации о межотраслевых связях и структурных пропорциях экономики Российской Федерации, а также повышения качества статистических и прогнозных расчетов макроэкономических показателей» разработать базовые таблицы «затраты-выпуск» за 2011 год и в 2015 году представить их в Правительство Российской Федерации и осуществлять разработку базовых таблиц «затраты-выпуск» на регулярной основе 1 раз в 5 лет.

Однако это событие не вызвало заметной реакции в научной среде, хотя оно заслуживает внимания и ученых-экономистов, и управленцев, занимающихся проблемами развития экономики и ее модернизации, и бизнесменов [7]. Еще менее известно использование концепции «затраты-выпуск» В. Леонтьева для моделирования взаимосвязи группы предприятий.

В СССР такие модели не были развиты в силу планового характера советской экономики, требующей директивного выполнения предприятиями указаний Госплана СССР. В постсоветское время эти модели практически не развивались по причине коренных рыночных экономических преобразований в значительной степени разрушивших индустриальную базу.

В настоящее время, когда рыночные отношения в России в основном сформированы, наступает время возобновления использования моделей «затраты-выпуск» В. Леонтьева. Этому свидетельством является приведенное выше распоряжение Правительства России. В последнее время появились работы по использованию модели «затраты-выпуск» В. Леонтьева. Так, в выполненной в 1998-2013 гг. работе [10] используются таблицы «затраты-выпуск» России за 2003 г., опубликованные в 2013 г.

В отношении использования концепции «затраты-выпуск» для моделирования деятельности предприятий в Российской научной литературе есть лишь упоминание о возможности такого использования. В [13] приводится описание простейшей динамической однопродуктовой модели В. Леонтьева для одного предприятия, в которой рассматриваются взаимосвязанные показатели, такие как валовой продукт, конечный продукт, трудовые ресурсы, производственные фонды, капитальные вложения, потребление и т.д. Однако модели, отражающие взаимную связь группы предприятий на основе модели В. Леонтьева, ни теоретически, ни практически в России не развиты. Автор данной статьи не встречал подобных работ также и в зарубежной литературе.

В данной статье рассматриваются некоторые вопросы применения концепции и понятий модели В. Леонтьева – межотраслевого баланса (МОБ) для описания взаимодействия группы предприятий, совместно производящих продукцию.

Прежде всего следует отметить, что структура и форма взаимодействия группы предприятий отличается от взаимодействия и структуры отраслей государства в модели МОБ. Для того чтобы понять различия, рассмотрим сначала концепцию, структуру и основные понятия модели МОБ.

## *2. Концепция, понятия и структура модели МОБ*

Изложение концепции, понятий и структуры МОБ выполним на основе книги [12]. Метод межотраслевых связей исследует взаимоотношения, возникающие в процессе производства, поэтому главная задача межотраслевого баланса – определить потоки товаров и услуг, движущихся от одного сектора (отрасли) к другой. Основной принцип МОБ состоит в разделении потребляемой продукции на промежуточную и конечную.

Разделение продукции на промежуточную и конечную ведет к появлению четырех видов операций, которые показываются в четырех квадрантах таблицы МОБ. Обычное содержание квадрантов таблицы МОБ следующее. В квадранте I содержатся данные о произведенных товарах и оказанных услугах, включая инвестиции, частное и государственное потребление, а также экспорт и импорт (в зависимости от цели исследования этот состав может меняться).

Квадрант II содержит основную часть межотраслевых счетов и показывает количество продукта $i$, потребляемого в отрасли $j$. Квадрант III показывает добавленную стоимость, возникающую в отраслях (секторах). Добавленная стоимость может быть разложена на составляющие: зарплату, страхование, налоги, прибыль и др. В квадранте IV представлены суммы по строкам квадранта I. Первое уравнение – по строкам таблицы МОБ – можно записать в виде:

$$Z_i = M_i + X_i = \sum_j X_{ij} + Y_i = W_i + Y_i, \quad i = 1,\dots,n,$$

где $Z_i$ – общее предложение продукта $i$; $X_i$ – общее производство продукта $i$; $M_i$ – импорт продукта $i$; $X_{ij}$ – количество продукта $i$, потребленного в отрасли $j$ (спрос); $Y_i$ – конечный продукт $i$; $W_i = \sum_j X_{ij}$ – общее промежуточное потребление продукта $i$.

Конечный продукт $Y_i$ включает инвестиции $I_i$, частное потребление $C_i$, государственное потребление $G_i$, экспорт $E_i$ и импорт $M_i$:

$$Y_i = I_i + C_i + G_i + E_i - M_i .$$

Второе уравнение – по столбцам таблицы МОБ – записывается в виде:

$$X_j = \sum_i X_{ij} + V_j = U_j + V_j ,$$

где $U_j = \sum_i X_{ij}$ – общее потребление сектором $j$ продукции, приобретаемой в других отраслях; $V_j = X_j - \sum_i X_{ij}$ – добавленная стоимость в отрасли (секторе) $j$.

В модели «затраты-выпуск» В. Леонтьева устанавливаются следующие предположения:

1) данный продукт производится только в одном секторе (отрасли);
2) в каждой отрасли производится только один продукт;
3) величина каждого вида затрат в любой отрасли полностью определяется уровнем выпуска в этой отрасли.

Эти предположения позволяют написать уравнение для спроса $X_{ij}$, например в виде линейной неоднородной функции:

$$X_{ij} = \overline{X}_{ij} + \alpha_{ij} X_j .$$

Параметр $\alpha_{ij}$ называется коэффициентом прямых затрат. Постоянная $\overline{X}_{ij}$ включает все постоянные элементы затрат, которые не зависят от уровня производства. Если эти элементы отсутствуют, то функция затрат принимает вид однородной линейной функции:

$$X_{ij} = \alpha_{ij} X_j .$$

Теперь рассмотрим, какие элементы целесообразно включить в модель МОБ, описывающую взаимодействие группы предприятий, а какие можно исключить. Если под отраслью понимать отдельное предприятие и принять указанные выше предположения В. Леонтьева, то уравнения по строкам – данные в квадрантах I и II – можно использовать для описания взаимодействия группы предприятий с тем различием, которое относится к структуре конечного продукта для предприятий.

При исключении из модели МОБ для описания группы взаимодействующих предприятий квадрантов III и IV никаких существенных потерь для адекватности такой модели не происходит. Это не означает, что следует совсем отказаться от расчета добавленной стоимости и суммарных значений переменных квадранта I. Однако это можно сделать в отдельных блоках вычислений, не привлекая основные уравнения. При этом основные уравнения не перегружаются дополнительными переменными и имеют достаточно простой вид.

Основная проблема использования МОБ для описания взаимодействия предприятий заключается в том, чтобы можно было моделировать выпуск каждым предприятием нескольких продуктов. В период интенсивного развития метода межотраслевого баланса (50-е – 70-е годы XX века) рассматривались оптимизационные задачи МОБ, в которых требовалось выбрать оптимальную структуру производства продуктов между различными производственными способами [1]. Для задач такого типа доказаны теоремы, получившие название теорем о замещении. Одна из теорем формулируется так: производятся все продукты и каждый продукт производится только одним способом. Во второй теореме утверждается, что базис оптимального плана, и, следовательно, выбор «лучших» способов производства остается постоянным при любых изменениях положительного вектора конечного спроса.

Проблема моделирования выпуска нескольких продуктов для группы взаимодействующих предприятий на основе использования модели «затраты-выпуск» в настоящее время еще не решена. Автор данной статьи предлагает свой подход для ее решения.

Ядром модели «затраты-выпуск» является система уравнений, связывающих производство и распределение продукции в отраслях. Баланс затрат и выпуска продукции выполняется в любой замкнутой экономической системе. Группу взаимодействующих предприятий можно рассматривать как замкнутую экономическую систему, поскольку никакие дополнительные субъекты для ее функционирования не требуются.

Для группы предприятий, выпускающих продукцию с использованием продукции, поставляемой другими предприятиями, также должен выполняться баланс производства (выпуска) и затрат продукции. Однако модели «затраты-выпуск» в основном развиты для однопродуктового представления, когда одна отрасль выпускает один продукт. В то же время в межотраслевых моделях имеются некоторые подходы, которые учитывают производство отраслью нескольких продуктов.

При разработке системы балансовых уравнений затрат и производства продукции группой взаимодействующих предприятий принципиально требуется использовать многопродуктовый подход, т.е. описать производство каждым предприятием нескольких продуктов. При построении микроэкономической модели группы взаимодействующих предприятий целесообразно использовать опыт разработки многопродуктовых модификаций межотраслевых моделей «затраты-выпуск». Рассмотрим эти подходы в целях анализа возможности использования для описания взаимодействия группы промышленных предприятий.

## *3. Анализ модели «затраты-выпуск»*

В классической модели «затраты-выпуск» В. Леонтьева понятия продукт, технологический вариант производства и организационная форма деятельности тождественны, т.е. принято однопродуктовое представление. В связи с этим структура производственного процесса отражается в форме квадратной матрицы $(I-A)$ и каждой организационной форме деятельности соответствует один продукт, производимый одним технологическим способом ($I$ – единичная диагональная матрица, $A$ – матрица коэффициентов прямых затрат продуктов размерности равной количеству отраслей модели).

При использовании модели «затраты-выпуск» для описания взаимодействующей группы предприятий необходимо отказаться от тождественности этих понятий и трансформировать модель из однопродуктовой в многопродуктовую. Трансформацию классической модели «затраты-выпуск» можно реализовать в рамках балансовой модели «затраты-выпуск» или в рамках оптимизационной модели «затраты-выпуск» [8]. В последнем случае в результате оптимизации определяются лучшие продукты в соответствии с принятыми критериями и технологические варианты их производства. При описании взаимодействия группы предприятий, совместно производящих продукты, не требуется выбирать лучшие виды продуктов или технологические способов их производства, тем более исключать их. Поэтому остается рассмотреть трансформацию однопродуктовой модели «затраты-выпуск» в многопродуктовую в рамках балансовой модели.

## 4. *Многопродуктовые модификации модели «затраты-выпуск»*

Система балансовых уравнений модели «затраты-выпуск» В. Леонтьева записывается в виде

$$x = Ax + y\,,$$

где $x = (x_1, \ldots, x_N)$ – вектор валового выпуска продукции отраслей; $y = (y_1, \ldots, y_N)$ – вектор выпуска конечной продукции отраслей; $N$ – число отраслей.

Многопродуктовые модификации модели «затраты-выпуск» В. Леонтьева можно представить тремя способами. В первом способе несколько продуктов, выпускаемых предприятием наряду с основным продуктом, рассматриваются как сопряженные продукты [8]. Затраты на выпуск сопряженных продуктов обычно выделяются из затрат на основной продукт и переносятся в позиции соответствующих сопряженных продуктов. В этом случае соответствующие коэффициенты прямых затрат матрицы $(I - A)$ будут положительными, что интерпретируется как отрицательные затраты.

Решение балансовой системы уравнений «затраты-выпуск» записывается в виде

$$x = (I - A)^{-1} y,$$

где $B = (I - A)^{-1}$ – обратная матрица к матрице $(I - A)$.

В рассматриваемом способе модификации модели «затраты-выпуск» матрица $B$ будет содержать отрицательные элементы, соответствующие положительным коэффициентам матрицы $(I - A)$. В этом случае в решении систем уравнений модели «затраты-выпуск» могут быть отрицательные валовые выпуски, не отражающие реальности. Поэтому такой подход трансформации однопродуктовой модели «затраты-выпуск» в многопродуктовую с целью описания производства продукции группой предприятий неприемлем.

Во втором способе модификации однопродуктовой модели в многопродуктовую для каждого предприятия вводится своя матрица коэффициентов прямых затрат. Подобная модель была разработана в Научно-исследовательском экономическом институте Госплана СССР [9]. Эта модель имеет вид:

$$x - \sum_{l=1}^{m} A^l W^l x = y,$$

где $A^l$ – матрица коэффициентов прямых затрат $\alpha_{ij}^{l}$ на предприятии $l$; $W^l$ – диагональная матрица удельных весов выпуска продуктов $w_j^l$ предприятием $l$; $w_j^l$ – удельный вес выпуска продукта $j$ предприятием $l$ в общем объеме выпуска продукта $j$ всеми предприятиями (задается экзогенно).

При использовании этой модели для описания совместного производства продукции группой предприятий потребуется экзогенно задавать матрицу $W^l$, что также неприемлемо, поскольку нет оснований для установления жесткой связи выпуска продуктов на разных предприятиях при описании их совместного производства.

Третий способ модификации однопродуктовой модели в многопродуктовую основывается на введении прямоугольной матрицы затрат [8]. Эта модель записывается в виде двух систем уравнений. Первая из них описывает распределение продукции:

$$\overline{A}q + y = x,$$

где $\overline{A}$ – матрица ($n \times m$) коэффициентов прямых затрат $\overline{\alpha}_{il}$ продукта $i = (1, \ldots, n)$ на производство единицы валовой продукции предприятия $l$ ($l = 1, \ldots, m$); $q$ – вектор валового выпуска продукции предприятий ($m \times 1$).

Вторая система характеризует структуру валовой продукции предприятий при выпуске ими нескольких видов продуктов:

$$\overline{W}x = q,$$

где $\overline{W}$ – диагональная матрица ($m \times n$) коэффициентов $w_j^l$, характеризующих удельный вес производства продукта $i$ на предприятии $l$ в общем объеме производства продукта $i$.

Необходимость задания экзогенной матрицы $\overline{W}$, как и в предыдущем способе, приводит к неприемлемости и этой модели для описания совместного производства продукции группой предприятий.

## 5. *Многопродуктовая модификация модели «затраты-выпуск» общего вида*

Рассмотрим наиболее общую по структуре матрицы затрат многопродуктовую модификацию модели «затраты-выпуск» [2], которую запишем в виде:

$$x_i - \sum_{l=1}^{m} \sum_{j \in Q(l)} a_{ij}^l w_j^l x_j = y_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$x_j^l = w_j^l x_j; \quad \sum_{i=1}^{m} w_j^l = 1,$$

где $Q^{(l)}$ – множество номеров продуктов, производимым предприятием $l$.

Подставив величину $x_j = \dfrac{x_j^l}{w_j^l}$ в балансовое уравнение и умножив на $w_j^l$ левую часть, а на $w_i^l$ – правую часть и обозначая $w_i^l y_i$ как $y_i^l$, получаем:

$$x_j^l - \sum_{l=1}^{m} \sum_{j \in Q^{(l)}} a_{ij}^l x_j^l = y_i^l \,.$$

Полученное посредством преобразований балансовое уравнение формально идентично однопродуктовой модели «затраты-выпуск». Идентичность по существу будет только в том случае, если удельный вес выпускаемых на предприятии конечных продуктов будет равен удельному весу промежуточных продуктов, затрачиваемых при производстве конечных продуктов на предприятии. В реальности данное условие для описания совместного производства продукции группой предприятий практически никогда не будет выполняться.

Поэтому такая модель не может быть применима для описания совместного производства продукции несколькими предприятиями, каждое из которых выпускает несколько продуктов. Обобщением модели В. Леонтьева можно считать только ту модель, которая при агрегировании приводится к модели В. Леонтьева. Рассматриваемая модель не может быть агрегирована в классическую однопродуктовую модель «затраты-выпуск» и поэтому не является ее обобщением.

## 6. Модель «затраты-выпуск» для группы взаимодействующих предприятий

Поскольку существующие многопродуктовые модификации модели «затраты-выпуск» неприемлемы, то попытаемся построить модель, пригодную для наших целей. Суть построения такой модели заключается в дезагрегации модели «затраты-выпуск» В. Леонтьева от уровня отраслей до уровня предприятий. Проблема дезагреции модели состоит в разработке коэффициентов прямых материальных затрат на основе переписей производства продукции на предприятиях. В некоторых странах мира, в частности в Японии, еще в 70-е годы XX века проводилась работа по составлению таблиц коэффициентов прямых затрат почти до уровня предприятия. Поэтому мировой опыт разработки коэффициентов прямых затрат почти на уровне предприятий существует.

Однако для моделирования совместного производства и распределения продукции группой взаимодействующих предприятий даже до такого уровня дезагрегирования недостаточно. Для адекватного описания взаимодействия предприятий надо дезагрегировать производство до уровня производственной линии предприятия, выпускающей один продукт. В этом случае реальное предприятие, выпускающее несколько продуктов, можно представить как совокупность условных предприятий – производственных линий, каждая из которых выпускает один продукт. Вообще говоря, этот продукт может представлять собой агрегат продуктов, в случае, если дальнейшее дезагрегирование, определяемое целями моделирования, не целесообразно.

Проблему дезагрегирования модели «затраты-выпуск» В. Леонтьева до той степени, в которой ее можно использовать для описания совместного производства продукции группой предприятий, можно решить посредством введения понятия комбинации предприятие-продукт. Тогда одинаковым по названию продуктам, выпускаемым на разных предприятиях можно приписать разные индексы. Используя понятие комбинации предприятие-продукт или условного предприятия, и на основе данных о потреблении и выпуске этих продуктов на предприятиях, можно построить матрицу коэффициентов прямых материальных затрат комбинаций предприятие-продукт, совместно производящих продукцию.

Теоретически проблема разработки матрицы коэффициентов прямых затрат для экономики государства в виде комбинации предприятие-продукт не представляет сложности, но требует большого объема работы. Более важным и принципиально трудным является разработка такого состава номенклатуры комбинаций предприятие-продукт, которая, с одной стороны, будет достаточна для микроописания производства продукции на предприятиях, а с другой стороны, не будет настолько подробной, чтобы приводить к ее постоянному изменению ввиду изменения структуры выпуска продукции предприятием.

Конкретный алгоритм разработки матрицы коэффициентов прямых затрат в предлагаемой модели состоит из следующих шагов. Пусть каждое предприятие может выпускать несколько видов продукции из заданного множества $M_R$. Искомую матрицу коэффициентов затрат по предприятиям-продуктам можно построить, связав способ производства и выпускаемые продукты на предприятиях. В этом случае получаем множество комбинаций предприятие-продукт, которое служит основой для разработки матрицы коэффициентов прямых затрат.

При этом одинаковые продукты, выпускаемые на разных предприятиях, будут учитываться как различные. Каждому реальному предприятию может соответствовать несколько таких комбинаций по числу выпускаемых продуктов. Под множеством $M_N$. будем понимать общее количество этих комбинаций. В этом случае в качестве элементов матрицы коэффициентов прямых затрат $\left\|\alpha_{ij}\right\|$ будем понимать не затраты продукта $i$ для производства продукта $j$, как в классической межотраслевой модели «затраты-выпуск», а затраты комбинации предприятие-продукт $i$ для производства комбинации предприятие-продукт $j$. Эта матрица квадратная, что весьма удобно для выполнения вычислительных процедур.

Такую матрицу можно получить следующим способом. Составим матрицу $l \times r$ элементов, где $l$ – индекс предприятия, а $r$ – индекс продукта $l$, $l \in M_P$, $r \in M_R$. Если предприятие $l$ производит продукт $r$, то значением элемента этой матрицы будет 1, в противном случае 0. Далее выберем элементы этой матрицы со значением 1 слева направо и сверху вниз. Последовательность этих элементов будет представлять собой все имеющиеся комбинации предприятие-продукт. Затем построим квадратную матрицу размерности, равной количеству этих комбинаций, значениями которой будут коэффициенты прямых затрат комбинации предприятие-продукт по выпуску других комбинаций предприятие-продукт. Обозначим эту матрицу $\left\|a_{l_r m_r}\right\|$, индексы которой $l_r$ и $m_r$ представляют собой комбинацию предприятие-продукт. Обозначив $l_r = I$, а $m_r = j$, эту матрицу можно переписать в виде $\left\|\alpha_{ij}\right\|$, где индексы $i$ и $j$ обозначают комбинацию предприятие-продукт ($i, j = 1, \ldots, q$), где $q$ – количество комбинаций предприятие-продукт).

## 7. Способы вычисления коэффициентов прямых затрат

В модели «затраты-выпуск» В. Леонтьева важной проблемой является формулировка функции зависимости коэффициентов прямых затрат от объемов валового производства продукции. В ранее разработанных межотраслевых моделях «затраты-выпуск» в качестве такой функции обычно принимается линейная однородная функция от объема производства продуктов:

$$x_{ij} = \alpha_{ij} x_j \,,$$

где $x_{ij}$ – объем затрат продукта $i$ на продукт $j$.

Параметр этой функции – коэффициент прямых затрат $\alpha_{ij}$ – остается неизменным при всевозможных изменениях объема выпуска $x_j$. Разрабатывались межотраслевые модели «затраты-выпуск» с нелинейной зависимостью функций затрат на производство от объема выпуска продукции, например вида [3]:

$$x_{ij} = \alpha_{ij} x_j^2 + \beta_{ij} x_j + \gamma_{ij} \,,$$

где $\alpha_{ij}$ – параметр, учитывающий изменение удельного расхода продукта $i$ на продукт $j$ при увеличении производства продукта $j$; $\beta_{ij}$ – параметр, учитывающий удельный расход продукта $i$ пропорционально производству продукта $j$ (его содержание аналогично содержанию коэффициента прямых затрат $\alpha_{ij}$); $\gamma_{ij}$ – параметр, характеризующий условно-постоянные расходы продукта $i$ на продукт $j$.

В этом случае модель «затраты-выпуск» становится значительно сложнее и, кроме того, нелинейную зависимость затрат продукта $i$ на продукт $j$ на опыте получить довольно сложно. Для упрощения предлагалась линейная неоднородная функция, учитывающая условно-постоянные расходы [8]:

$$x_{ij} = \bar{x}_{ij} + d_{ij} \,,$$

где $\bar{x}_{ij}$ – величина затрат продукта $i$ на продукт $j$, прямо пропорционально зависящая от объема выпуска продукта $j$ (прямые технологические затраты); $d_{ij}$ – величина затрат продукта $i$, не зависящая прямо пропорционально от объема выпуска продукта $j$ (условно-постоянные расходы).

Вводя коэффициент прямых затрат, соответствующий прямым технологическим затратам, величину $x_{ij}$ можно записать так:

$$x_{ij} = \bar{a}_{ij} x_{ij} + d_{ij}, \text{ где } \bar{a}_{ij} = \frac{\bar{x}_{ij}}{x_j}.$$

Можно далее упростить модель, используя линейную однородную функцию затрат $x_{ij} = \alpha_{ij} x_j$, но при этом учесть условно-постоянные расходы, рассчитывая коэффициенты прямых затрат как функцию объемов производства продукта $x_j$ по формуле:

$$a_{ij} = \bar{a}_{ij} + \frac{d_{ij}}{x_j}.$$

## 8. Проблемы агрегирования модели «затраты-выпуск»

Исходя из матрицы коэффициентов прямых затрат, разработанной на основе концепции предприятие-продукт, посредством агрегирования можно в принципе получить матрицу коэффициентов затрат модели «затраты-выпуск» В. Леонтьева сначала для уровня предприятий, а затем и для отраслей экономики государства.

Проблемы агрегирования модели «затраты-выпуск» рассматривались в [9]. В этой работе доказано, что модель «затраты-выпуск» сохраняется при агрегировании в случае выполнения определенных требований. Агрегирование модели $x = Ax + y$ сводится к представлению векторов $x$ и $y$ в виде наборов векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$. В вектор $x_s$ входит множество $n_s$ компонент вектора $x$, которые образуют $s$-й агрегат. Аналогично устроен вектор $y_s$.

Агрегаты образуются по правилу скалярного произведения заданного вектора $e = (e_1, \ldots, e_n)$ и векторов $x_s$ и $y_s$.

Тогда уравнение $x = Ax + y$ можно переписать в виде системы уравнений

$$x_s = \sum_{r=1}^{n} A_{sr} x_r + y_s, \quad r = 1, \ldots, n,$$

где $A_{sr}$ – блок матрицы $A$, составленный из элементов на пересечении строк $i \in n_S$ и столбцов $j \in n_S$.

Эту систему уравнений можно переписать в виде

$$x_s = \sum_{r=1}^{n}(e_s A_{sr}, x_r) + y_s, \; s = 1,...,n \cdot$$

Из последней системы уравнений следует, что агрегированная система «затраты-выпуск» будет тождественной первоначальной системе при выполнении условия

$$e_s A_{sr} = \alpha_{sr} e_r, \; s, r = 1,...,n \cdot$$

Иными словами, должны быть одинаковыми агрегированные в пределах одного агрегата затраты $\frac{1}{e_j}\sum_{i \in n_s} e_i \alpha_{ij}$ на выпуск $j$-го продукта, $j \in n_r$, который дает единичный вклад в выпуск $r$-го агрегата. Это довольно жесткие условия. Эти условия можно смягчить, если считать, что каждый продукт может выпускаться несколькими технологиями [15].

Важнейшим условием практического применения модели «затраты-выпуск» В. Леонтьева является постоянство коэффициентов прямых затрат как функции времени. Матрицу коэффициентов прямых затрат можно использовать для прогнозных расчетов до тех пор, пока не произойдут структурные сдвиги в выпуске продукции. В случае описания экономики государства с помощью модели «затраты-выпуск» необходимо учитывать эти структурные изменения. Однако при этом возникают вопросы: какие изменения считать структурными сдвигами и какие из них приведут к изменению отдельных элементов матрицы коэффициентов прямых затрат, а какие к изменению размерности этой матрицы. Подходы к решению этих проблем для экономики государства изложены в [9].

В данной статье целью использования модели «затраты-выпуск» является моделирование взаимодействия группы предприятий, совместно реализующих производственные проекты. При этом предполагается, что при реализации этих проектов коэффициенты прямых затрат не изменяются. Эти коэффициенты вычисляются на основе прогноза выпуска продукции предприятиями в соответствии с содержанием исследуемого производственного проекта.

С учетом этого условия, концепцию представления продукта в виде комбинации предприятие-продукт можно считать обобщением модели «затраты-выпуск» В. Леонтьева в рамках исследования реализации производственных проектов. Многопродуктовая модель «затраты-выпуск» на основе концепции предприятие-продукт может быть сведена к классической модели В. Леонтьева посредством соответствующего агрегирования. Разработка матрицы коэффициентов прямых затрат на основе концепции предприятие-продукт в рамках реализации производственного проекта для группы взаимодействующих предприятий является вполне решаемой задачей, что подтверждается многочисленными работами в области межотраслевых балансов экономики государств.

## 9. Пример использования модели «затраты-выпуск» для группы взаимодействующих предприятий

Рассмотрим пример использования предложенной модели «затраты-выпуск» для анализа производства продукции группой взаимосвязанных предприятий. Пусть требуется определить максимальный объем производства конечной продукции ряда предприятий с учетом ограничений на производственные мощности предприятий. Тогда балансовую систему уравнений производства и распределения продукции предприятий можно записать в следующем виде:

(1) $x = Ax + y$,

где $x$ – вектор валового выпуска производственной линии комбинации предприятие-продукт; $A$ – матрица коэффициентов прямых затрат комбинаций предприятие-продукт; $y$ – вектор выпуска конечной продукции комбинаций предприятие-продукт.

Ограничение на производственные мощности производственных линий комбинаций предприятие-продукт запишем в виде векторного неравенства:

(2) $x < p$,

где $p$ – вектор мощностей производственных линий комбинаций предприятие-продукт.

Кроме того, примем не очень ограничивающее общность задачи требование, что выпуск конечной продукции $y$ удовлетворяет соотношению

(3) $y = qa$,

где $q$ – вектор долей выпуска комбинаций предприятие-продукт в общем объеме выпуска конечной продукции всех предприятий; $a$ – скаляр, представляющий собой общий объем производства конечной продукции.

Скаляр $a$ вычисляется как скалярное произведение вектора $e$ на вектор $y$ по формуле

(4) $a = ey$.

Введем в задачу требование максимизации общего объема производства конечной продукции:

(5) $a \to max$.

Оптимизационная задача формулируется в следующем виде: найти максимум величины $a$ при условиях (1)–(4). В этой задаче все векторы являются векторами-столбцами. Размерности векторов и матрицы $A$ равны количеству комбинаций предприятие-продукт в задаче. Каждое предприятие выпускает несколько продуктов. Поэтому общее количество условных предприятий, каждое из которых представляет собой несколько комбинаций предприятие-продукт, равно сумме продуктов, выпускаемых предприятиями.

Эта оптимизационная задача представляет собой классическую задачу линейного программирования, которую можно решить стандартными методами или используя пакеты прикладных программ. Однако условие (3) позволяет решить эту задачу значительно проще. В [4, 6] доказано, что решение можно получить в виде

(6) $\max a = \min a_i$, $i = 1,\dots, n$,

где $a_i = \dfrac{p_i}{[Bq]_i}$, $n$ – сумма выпускаемых продуктов.

В примере рассматривается группа взаимодействующих предприятий, обеспечивающих производство автомобилей, в которую входят предприятия, выпускающие количество комбинаций предприятие-продукт, указанное в скобках:

1. Автосборочное предприятие (4).
2. Предприятие по производству приборов (3).
3. Предприятие по производству двигателей (5).
4. Предприятие по производству проката (3).
5. Предприятие по производству резинотехнических изделий (4).
6. Предприятия по электроснабжению, водоснабжению и газоснабжению (1).

Для обеспечения расчетов информацией собираются данные об автосборочном предприятии и смежных предприятиях, выполняющих поставки материалов, запасных частей и комплектующих узлов и деталей. В число этих данных входят:

- производственные мощности предприятий;
- объемы поставок продуктов смежных предприятий на сборочное предприятие;
- затраты продуктов смежных предприятий, приходящиеся на один рубль валовой продукции, выпускаемой сборочным автопредприятием.

Для краткости в приводимых ниже таблицах комбинации предприятие-продукт, участвующие в реализации производственного проекта обозначаются порядковыми номерами предприятий из указанного выше перечня с добавлением через дефис номера продукта, выпускаемого на этом предприятии. Данные о производстве продуктов приводятся в стоимостных единицах (рублях). Все приведенные ниже данные условные и разработаны автором данной статьи. Положим, что требуется найти максимум конечной продукции только автосборочного предприятия, выпускающего 4 модели автомобилей. Тогда вектор $q$ состоит из нулей кроме элементов, соответствующих этим моделям, выпускаемых автосборочным предприятием, которые равны соответственно 0,4, 0,3, 0,2 и 0,1. Сумма компонентов вектора $q$ равна 1. В этом случае формула (6) принимает вид

$$a_i = \frac{p_i}{\sum_j b_{ij} q_j},$$

где $j$ = 1-1, 1-2, 1-3, 1-4, $b_{ij}$ – элементы матрицы $B$.

Коэффициенты прямых материальных затрат комбинаций предприятие-продукт представлены в таблице 1.

Матрица $B$, обратная к матрице $I - A$, приведена в таблице 2. Производственные мощности комбинаций предприятие-продукт – в таблице 3.

Исходя из этих данных по формуле (6) был рассчитан максимальный объем производства автомобилей. В таблице 4 представлены результаты расчетов значений величин $a_i$, $i$ = 1, …, 20.

Из таблицы 4 видно, что максимальный общий объем выпуска автомобилей $\max a = \min a_i$, $i$ = 1, …, 20, в стоимостном выражении равен 375 млн руб. Выпуск четырех моделей 1-1, 1-2, 1-3, 1-4 в стоимостном выражении составляет соответственно 150 млн руб., 112,5 млн руб., 75 млн руб., 37,5 млн. руб.

*Таблица 1. Коэффициенты прямых затрат* (*матрица* $A$)

| | 1-1 | 1-2 | 1-3 | 1-4 | 2-1 | 2-2 | 2-3 | 3-1 | 3-2 | 3-3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1-1 | | | | | | | | | | |
| 1-2 | | | | | | | | | | |
| 1-3 | | | | | | | | | | |
| 1-4 | | | | | | | | | | |
| 2-1 | 0,031 | 0,029 | 0,028 | 0,032 | | 0,012 | 0,017 | 0,012 | 0,013 | 0,014 |
| 2-2 | 0,082 | 0,079 | 0,068 | 0,091 | 0,013 | | 0,015 | 0,17 | 0,019 | 0,021 |
| 2-3 | 0,041 | 0,038 | 0,032 | 0,039 | 0,014 | 0,023 | | 0,028 | 0,012 | 0,019 |
| 3-1 | 0,063 | 0,059 | 0,044 | 0,057 | 0,022 | 0,031 | 0,015 | | 0,018 | 0,021 |
| 3-2 | 0,013 | 0,014 | 0,012 | 0,017 | | | | | | |
| 3-3 | 0,014 | 0,012 | 0,015 | 0,013 | | | | | | |
| 3-4 | 0,091 | 0,089 | 0,076 | 0,081 | | | | | | |
| 3-5 | 0,082 | 0,073 | 0,074 | 0,068 | | | | | | |
| 4-1 | 0,041 | 0,039 | 0,045 | 0,047 | | | | 0,032 | 0,039 | 0,028 |
| 4-2 | 0,031 | 0,029 | 0,037 | 0,041 | | | | 0,027 | 0,029 | 0,018 |
| 4-3 | 0,029 | 0,021 | 0,017 | 0,025 | | | | 0,017 | 0,012 | 0,021 |
| 5-1 | 0,013 | 0,017 | 0,009 | 0,015 | 0,021 | 0,028 | 0,025 | | | |
| 5-2 | 0,017 | 0,019 | 0,021 | 0,016 | 0,031 | 0,029 | 0,027 | | | |
| 5-3 | 0,011 | 0,017 | 0,015 | 0,013 | 0,014 | 0,016 | 0,018 | | | |
| 5-4 | 0,018 | 0,021 | 0,022 | 0,016 | 0,023 | 0,025 | 0,012 | 0,011 | 0,013 | 0,014 |
| 6-1 | 0,019 | 0,017 | 0,012 | 0,013 | 0,015 | 0,021 | 0,019 | 0,026 | 0,021 | 0,015 |

*Таблица 1* (*продолжение*)

| | 3-4 | 3-5 | 4-1 | 4-2 | 4-3 | 5-1 | 5-2 | 5-3 | 5-1 | 6-1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1-1 | | | | | | | | | | |
| 1-2 | | | | | | | | | | |
| 1-3 | | | | | | | | | | |
| 1-4 | | | | | | | | | | |
| 2-1 | 0,015 | 0,015 | 0,011 | 0,018 | 0,013 | 0,017 | 0,016 | 0,015 | 0,014 | 0,010 |
| 2-2 | 0,013 | 0,016 | 0,012 | 0,022 | 0,017 | 0,015 | 0,027 | 0,013 | 0,019 | 0,012 |
| 2-3 | 0,017 | 0,024 | 0,023 | 0,031 | 0,037 | 0,018 | 0,025 | 0,027 | 0,021 | 0,017 |
| 3-1 | 0,015 | 0,018 | 0,021 | 0,016 | 0,022 | 0,023 | 0,014 | 0,018 | 0,013 | 0,015 |
| 3-2 | | | | | | | | | | |
| 3-3 | | | | | | | | | | |
| 3-4 | | | | | | | | | | |
| 3-5 | | | | | | | | | | |
| 4-1 | 0,034 | 0,037 | | 0,021 | 0,032 | 0,037 | 0,029 | 0,026 | 0,022 | 0,024 |
| 4-2 | 0,023 | 0,021 | 0,022 | | 0,028 | 0,023 | 0,021 | 0,018 | 0,019 | 0,017 |
| 4-3 | 0,017 | 0,011 | 0,017 | 0,029 | | 0,014 | 0,015 | 0,027 | 0,018 | 0,027 |
| 5-1 | | | | | | | | | | |
| 5-2 | | | | | | | | | | |
| 5-3 | | | | | | | | | | |
| 5-4 | 0,012 | 0,017 | 0,013 | 0,015 | 0,018 | 0,017 | 0,012 | 0,019 | | 0,014 |
| 6-1 | 0,014 | 0,011 | 0,018 | 0,025 | 0,013 | 0,028 | 0,017 | 0,013 | 0,022 | |

*Таблица 2. Матрица B*

| | 1-1 | 1-2 | 1-3 | 1-4 | 2-1 | 2-2 | 2-3 | 3-1 | 3-2 | 3-3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1-1 | 1 | | | | | | | | | |
| 1-2 | | 1 | | | | | | | | |
| 1-3 | | | 1 | | | | | | | |
| 1-4 | | | | 1 | | | | | | |
| 2-1 | 0,040 | 0,038 | 0,036 | 0,041 | 1,003 | 0,015 | 0,019 | 0,015 | 0,016 | 0,017 |
| 2-2 | 0,092 | 0,089 | 0,077 | 0,101 | 0,016 | 1,004 | 0,018 | 0,020 | 0,022 | 0,024 |
| 2-3 | 0,056 | 0,052 | 0,045 | 0,054 | 0,018 | 0,027 | 1,004 | 0,032 | 0,017 | 0,024 |
| 3-1 | 0,076 | 0,071 | 0,055 | 0,070 | 0,025 | 0,034 | 0,018 | 1,004 | 0,031 | 0,035 |
| 3-2 | 0,013 | 0,014 | 0,012 | 0,017 | | | | | 1 | |
| 3-3 | 0,014 | 0,012 | 0,015 | 0,013 | | | | | | 1 |
| 3-4 | 0,091 | 0,089 | 0,076 | 0,081 | | | | | | |
| 3-5 | 0,082 | 0,073 | 0,074 | 0,068 | | | | | | |
| 4-1 | 0,056 | 0,053 | 0,058 | 0,061 | 0,004 | 0,005 | 0,004 | 0,035 | 0,042 | 0,031 |
| 4-2 | 0,042 | 0,040 | 0,047 | 0,051 | 0,003 | 0,004 | 0,003 | 0,029 | 0,032 | 0,021 |
| 4-3 | 0,038 | 0,030 | 0,025 | 0,034 | 0,003 | 0,020 | 0,015 | 0,024 | 0,019 | 0,014 |
| 5-1 | 0,018 | 0,022 | 0,013 | 0,020 | 0,022 | 0,029 | 0,026 | 0,002 | 0,001 | 0,002 |
| 5-2 | 0,022 | 0,024 | 0,026 | 0,022 | 0,032 | 0,030 | 0,028 | 0,002 | 0,002 | 0,002 |
| 5-3 | 0,014 | 0,020 | 0,018 | 0,016 | 0,015 | 0,017 | 0,019 | 0,001 | 0,001 | 0,001 |
| 5-4 | 0,029 | 0,031 | 0,032 | 0,027 | 0,025 | 0,028 | 0,015 | 0,014 | 0,016 | 0.017 |
| 6-1 | 0,031 | 0,029 | 0,023 | 0,026 | 0,018 | 0,025 | 0,022 | 0,029 | 0,025 | 0,019 |

*Таблица 2* (*продолжение*)

| | 3-4 | 3-5 | 4-1 | 4-2 | 4-3 | 5-1 | 5-2 | 5-3 | 5-4 | 6-1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1-1 | | | | | | | | | | |
| 1-2 | | | | | | | | | | |
| 1-3 | | | | | | | | | | |
| 1-4 | | | | | | | | | | |
| 2-1 | 0,017 | 0,017 | 0,013 | 0,020 | 0,016 | 0,020 | 0,019 | 0,018 | 0,016 | 0,012 |
| 2-2 | 0,016 | 0,019 | 0,014 | 0,025 | 0,020 | 0,018 | 0,030 | 0,016 | 0,021 | 0,014 |
| 2-3 | 0,021 | 0,028 | 0,026 | 0,035 | 0,041 | 0,023 | 0,029 | 0,031 | 0,025 | 0,021 |
| 3-1 | 0,018 | 0,021 | 0,024 | 0,020 | 0,025 | 0,027 | 0,018 | 0,022 | 0,016 | 0,018 |
| 3-2 | | | | | | | | | | |
| 3-3 | | | | | | | | | | |
| 3-4 | 1 | | | | | | | | | |
| 3-5 | | 1 | | | | | | | | |
| 4-1 | 0,037 | 0,040 | 1,003 | 0,024 | 0,035 | 0,040 | 0,032 | 0,029 | 0,024 | 0,026 |
| 4-2 | 0,026 | 0,024 | 0,024 | 1,003 | 0,030 | 0,026 | 0,023 | 0,021 | 0,021 | 0,019 |
| 4-3 | 0,019 | 0,014 | 0,019 | 0,031 | 1,003 | 0,017 | 0,017 | 0,029 | 0,020 | 0,029 |
| 5-1 | 0,001 | 0,002 | 0,001 | 0,002 | 0,002 | 1,001 | 0,002 | 0,002 | 0.002 | 0,001 |
| 5-2 | 0,002 | 0,002 | 0,002 | 0,002 | 0,002 | 0,002 | 1,002 | 0,002 | 0,002 | 0,001 |
| 5-3 | 0,001 | 0,001 | 0,001 | 0,001 | 0,001 | 0,001 | 0,001 | 1,001 | 0,001 | 0.001 |
| 5-4 | 0,015 | 0,020 | 0,015 | 0,018 | 0,021 | 0,020 | 0,015 | 0,022 | 1,003 | 0,016 |
| 6-1 | 0,017 | 0,015 | 0,021 | 0,028 | 0,017 | 0,032 | 0,021 | 0,017 | 0,025 | 1,003 |

*Таблица 3. Мощности производственных линий комбинаций предприятие-продукт, млн руб.*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1-1 | 1-2 | 1-3 | 1-4 | 2-1 | 2-2 | 2-3 | 3-1 | 3-2 | 3-3 |
| 150 | 200 | 180 | 120 | 350 | 420 | 480 | 410 | 900 | 950 |
| 3-4 | 3-5 | 4-1 | 4-2 | 4-3 | 5-1 | 5-2 | 5-3 | 5-1 | 6-1 |
| 850 | 830 | 1200 | 1300 | 1500 | 1700 | 400 | 450 | 520 | 470 |

*Таблица 4. Значения величин $a_i$ млн руб.*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1-1 | 1-2 | 1-3 | 1-4 | 2-1 | 2-2 | 2-3 | 3-1 | 3-2 | 3-3 |
| 375 | 666 | 900 | 1200 | 21212 | 24137 | 18461 | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |
| 3-4 | 3-5 | 4-1 | 4-2 | 4-3 | 5-1 | 5-2 | 5-3 | 5-1 | 6-1 |
| $\infty$ | $\infty$ | 21428 | 30023 | 47318 | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | 16785 |

## *10. Заключение*

В статье сформулирована обобщенная модель «затраты-выпуск» В. Леонтьева для описания взаимодействия группы предприятий, совместно выпускающих продукцию. Посредством агрегирования эту модель можно привести к классической межотраслевой модели «затраты-выпуск» В. Леонтьева. Обобщенная модель используется в качестве ядра оптимизационных и имитационных моделей, предназначенных для исследования инвестиционных производственных проектов, выполняемых группой предприятий [11]. Приведен пример расчета максимального объема производства четырех моделей автомобилей.

## *Литература*

1. ГРАНБЕРГ А.Г. *Математические модели социалистической экономики*. – М.: Экономика, 1978. – 351 с.
2. КЛОЦВОГ Ф.Н., НОВИЧКОВ В.А. *Экспериментальные расчеты упрощенной динамической модели межотраслевого баланса* // В кн.: «Проблемы моделирования народного хозяйства. Ч. I». – Новосибирск, 1970. – С. 4–14.
3. КОССОВ В.В. *Межотраслевой баланс.* – М.: Экономика, 1965. – 231 с.
4. ЛАВРОВСКИЙ Б.Л. *Исследование свойств вероятностной модели межотраслевого баланса производственных мощностей* // В кн.: «Оптимизационные и балансовые модели народного хозяйства». – Новосибирск: Наука, 1977. – 251 с.
5. ЛЕОНТЬЕВ В.В. *Избранные произведения в 3-х томах*. – М.: ЗАО «Издательство «Экономика», 2006.
6. МАСАКОВ В.М. *Некоторые свойства моделей межотраслевого баланса производственных мощностей простейшего типа* // В сб.: «Проблемы моделирования народного хозяйства. Ч. 3». – Новосибирск, ИЭ и ОПП, 1973. – 264 с.
7. МИХЕЕВА Н.Н. *Таблицы «затраты-выпуск»: новые возможности экономического анализа* // Вопросы экономики. – 2011. – №7. – С. 140–148.

8. *Моделирование народно-хозяйственных процессов* / Под ред. Дадаяна В.С. – М.: Экономика, 1973. – 479 с.
9. ПЕТРОВ А.А., ПОСПЕЛОВ И.Г., ШАНАНИН А.А. *Опыт математического моделирования экономики.* – М.: Энергоатомиздат, 1996. – 544 с.
10. ПОЗАМАНТИР Э.И. *Вычислимое общее равновесие экономики и транспорта. Транспорт в динамическом межотраслевом балансе*. – М.: «ПОЛИ ПРИНТ СЕРВИС», 2014. – 280 с.
11. РОМАНОВ Б.А. *Комплекс оптимизационных и имитационных моделей для исследования реализации предприятиями инвестиционных производственных проектов*. – М.: РИОР: Academus: ИНФРА-М, 2015. – 292 с.
12. ЧЕНЕРИ Х, КЛАРК П. *Экономика межотраслевых связей.* – М.: Изд-во иностранной литературы, 1962. – 384 с.
13. ШИРЯЕВ В.И., БАЕВ И.А., ШИРЯЕВ Е.В. *Управление фирмой. Моделирование, анализ, управление.* – М.: Изд-во ЛКИ/URSS, 2007.
14. DIETZENBACHER E. et al. *Input-Output Analysis: The next 25 Years* // Economic System Research / Eds.: Lenzen M., Los B. – Abington, UK: Taylor & Francis, December, 2013. – Vol. 25(4). – P. 369–389.
15. HATANAKA M. *Note on Consolidation within a Leontief System* // Econometrica. – 1952. – Vol. 20, No. 2. – P. 301–303.

# ABOUT USE OF "INPUT-OUTPUT" MODEL FOR INTERCONNECTED ENTERPRISES

**Boris Romanov**, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow (boris094@mail.ru).

*Abstract: In this article, possibilities of use of the "input-output" V. Leontief' model for the description of interaction of group of the enterprises are analyzed. The analysis shows that direct application of this model is impossible in view of practical impossibility of realization in V. Leontief's model of the multiproduct approach. Generalization of this model that implements the multiproduct approach is offered. This generalization is performed in such way as to represent the real enterprise as a set of abstract enterprises, each producing only one kind of one product. This set of abstract enterprises, outputting the number of products equal to the number of the abstract enterprises, models the real enterprise outputting the same quantity of products. This generalized model is used as a core of optimization and imitation models, designed to research investment in industrial projects, carried out by groups of enterprises. An example of computing maximum output of producing 4 models of automobiles is given.*

Keywords: industrial expenses, output, "input-output" model, factors of a factor cost.

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Р.М. Нижегородцевым.*

*Поступила в редакцию 16.10.2015.*
*Опубликована 31.07.2017.*