

УДК 33
ББК 65

ОПТИМАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ ИЗДЕРЖЕК ПРЕДОТВРАЩЕНИЯ ПРОМЫШЛЕННЫХ РИСКОВ ФИРМЫ

Ростова Е. П.¹, Гераськин М. И.²

(Самарский национальный исследовательский
университет им. академика С.П. Королёва, Самара)

Рассмотрена задача определения функции издержек фирмы на предотвращение промышленных рисков (добровольных рисков издержек), оптимальной по критерию общих издержек. Для степенной функции производственных издержек и экспоненциально убывающей функции промышленного ущерба определен вид функции добровольных рисков издержек. Проанализировано влияние параметров функции промышленного ущерба на область существования решения задачи максимизации прибыли фирмы при оптимальной функции добровольных рисков издержек.

Ключевые слова: промышленный риск, промышленный ущерб, издержки, оптимизация, риск-менеджмент.

1. Введение

Промышленные риски, трактуемые как возникающие в коммерческой деятельности промышленных фирм, всесторонне рассматривались в экономической теории. Иерархия задач управления промышленными рисками охватывает различные уровни рисков: от рисков, связанных с выходом фирм на мировой рынок (risk of globalization) [42] и рисков воздействия ком-

¹ Елена Павловна Ростова, кандидат экономических наук, доцент (el_rostova@mail.ru).

² Михаил Иванович Гераськин, доктор экономических наук, профессор, заведующий кафедрой математических методов в экономике (innovation@ssau.ru).

мерческой деятельности фирм на региональные экономические системы [45, 47, 48] до рисков, обусловленных невыполнением отдельных технологических операций. В контексте дальнейшего анализа будут рассматриваться риски на уровне фирмы. В этом аспекте сопоставлялись традиционный реактивный экологический менеджмент и активный риск-менеджмент предприятия (ERM)¹ [51] как варианты поведения руководства фирмы в условиях неопределенности. Анализировалось влияние периодичности ремонта оборудования и организационной среды (organizational environment) фирмы на промышленный ущерб [39]: анализ риска проводился в рамках моделей UML² [38] и MADS³, затем моделировался риск-менеджмент в целях обеспечения безопасности персонала от вероятных промышленных угроз. Эффективность применения системы ERM исследована на материалах девяти фирм различных отраслей промышленности [36]. Исследовались риски возникновения разрывов в цепях поставок товаров и ресурсов как в рамках технологического процесса внутри фирмы [50], так и в цепях внешних поставок [45]. Исследования моделей принятия решений в условиях неопределенности [46] обосновали применимость системного подхода к моделированию сложных задач анализа рисков несовершенства технического обслуживания промышленного оборудования на основе модели UML и метода MOSAR⁴ [41]. Отметим, что если в конце XX века необходимость управления промышленными рисками фирм требовала доказательства [36, 37], то сейчас актуальность этой проблемы не вызывает сомнений.

Среди отечественных исследователей вопросов риска в экономике спектр интересов довольно широк: от международных аспектов до отдельно взятых фирм. Рассматриваются меж-

¹ *Enterprise Risk Management (англ.) – риск-менеджмент предприятия.*

² *Unified Modeling Language (англ.) – унифицированный язык моделирования.*

³ *Analysis Method of Dysfunctional Systems (англ.) – метод анализа дисфункциональных систем.*

⁴ *Method Organized for a Systemic Analysis of Risk (англ.) – метод системного анализа риска.*

дународные финансовые риски [8], риски операций с ценными бумагами на международном рынке [2], логистические риски [18, 26]. Ряд авторов исследуют риски регионального уровня [35]. Например, Шелков А.Б. значительное внимание в своих работах уделяет проблемам региональной безопасности и ее анализу с помощью сценарного подхода [23, 34, 43]. Риски на промышленных предприятиях анализируются с учетом человеческого фактора [1], с помощью деловых игр [6] и механизмов штрафов [15], с точки зрения внедрения инноваций [3, 16]. В целом показано, что производственная деятельность в любой сфере экономики в той или иной степени связана с неопределенностью и риском [37, 51].

Следует отдельно отметить ряд работ отечественных ученых, посвященных вопросам промышленного или производственного риска. Р.М. Качалов в своих работах [19-24] детально рассматривает вопросы управления рисками на различных уровнях, в том числе на региональном и отдельного предприятия. В соавторстве с Ю.А. Слепцовой [21-23] анализ риска социально-экономических систем рассматривается через призму декомпозиции и структурирования экономического пространства предприятия. Рассмотрено выделение «подцелей деятельности» подсистем и выявление присущих им факторов риска [18]. О.Н. Гримашевич уделяет в своих работах [10-15] значительное внимание промышленным рискам и рассматривает все этапы управления данным риском от идентификации до разработки программы управления рисками. О.П. Черникова предлагает использовать операционный рычаг, учитывающий изменение факторов (объема продаж, цены, удельных переменных затрат, суммы постоянных затрат), влияющих на прибыль предприятия, а также на производственный риск предприятия [25]. Затраты в данной статье рассматриваются в целом без выделения затрат на управление риском.

В дальнейшем промышленный риск трактуется как некоторый техногенный фактор вероятностного характера, приводящий к потере активов фирмы¹ [27, 33, 49]. Следовательно, про-

¹ *Коммерческие риски, приводящие к потере доходов, в данной статье не рассматриваются.*

мышленный риск, в отличие от коммерческого, приводит к дополнительным издержкам фирмы (далее «*рисковым издержкам*»), но не приводит к снижению доходов. С учетом вероятностной природы фактора риска будем считать мерой риска математическое ожидание ущерба от фактора риска как некоторого случайного события (аварии, инцидента, остановки оборудования, сбоя производственного процесса и т.д.), измеряемое в денежных единицах издержек фирмы; степень риска представляет собой вероятность этого события.

Рисковые издержки фирмы (ущерб) декомпозируются на два компонента [40]: 1) непредвиденные расходы, обусловленные указанными событиями, в том числе штрафы за превышение размера ущерба окружающей среде над существующими нормами; 2) планируемые расходы, обусловленные необходимостью предотвращения рискованной ситуации или снижения риска ее возникновения.

Кроме того, классифицируем ущерб от риска на внутренний и внешний по отношению к фирме. *Внутренний ущерб* фирмы от фактора риска включает в себя утраченные активы, а также расходы на ликвидацию последствий и восстановительные работы. Размер возможного внутреннего ущерба, очевидно, пропорционален объему производства фирмы, с ростом которого увеличиваются производственные мощности фирмы (производственные площади, оборудование, персонал), т.е. растет объем активов, которые могут потенциально пострадать. Поэтому снижение возможного внутреннего ущерба может быть достигнуто за счет дополнительных расходов на мероприятия по снижению риска, которые в дальнейшем будем называть *добровольными рисковыми издержками* (ДРИ). Структура ДРИ включает в себя расходы на мероприятия по обучению персонала, установке более нового и совершенного оборудования, установке очистных сооружений, систем контроля и сигнализации и пр. *Внешний ущерб* фирмы, называемый далее *обязательными рисковыми издержками*, примем равным сумме штрафов, налагаемых на фирму за превышение уровня ущерба окружающей среде над установленными государством нормами. Таким образом, общие издержки промышленной фирмы, наряду с затратами на производство продукции, также включают в себя добро-

вольные и обязательные рисковые издержки и внутренний ущерб.

Выбор величины ДРИ предопределен следующими противоречивыми факторами. С одной стороны, снижение этих издержек приводит к сокращению общих издержек фирмы, что способствует росту прибыли и дальнейшему расширению производства; однако при этом могут возрасти внутренний ущерб и обязательные рисковые издержки, что, наоборот, повышает общие издержки. С другой стороны, увеличение ДРИ приводит к снижению внутреннего ущерба и обязательных рисковых издержек, однако общие издержки фирмы могут вследствие этого возрасти. В дальнейшем рассматривается модель фирмы без учета обязательных рисковых издержек.

Таким образом, актуальной задачей управления промышленными рисками является выбор функции ДРИ фирмы, оптимальной по критерию общих издержек фирмы. При оптимальной функции ДРИ решение основной задачи фирмы, заключающейся в оптимизации объема производства по критерию прибыли, представляет собой модель управления фирмой с учетом промышленных рисков. Эта проблема является предметом данной статьи.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу определения неотрицательной вещественной ограниченной сверху функции ДРИ фирмы, минимизирующей функцию общих издержек фирмы:

$$(1) \quad f^*(Q) = \arg \min_{f(\bullet) \in A_f} C_{\Sigma}(Q, f(\bullet)),$$

$$A_f = \{f(\bullet) \in R^+ : f(\bullet) \leq f^{\max}, f^{\max} \in (0, C_{\Sigma})\},$$

$$(2) \quad C_{\Sigma}(Q, f) = C(Q) + f(Q) + X(Q, f), C_{\Sigma}(\bullet) \leq^{\max},$$

где Q – объём производства; $C_{\Sigma}(Q, f)$ – функция общих издержек фирмы; $C(Q)$ – функция издержек на производство продукции; $f(Q)$ – функция ДРИ; $X(Q, f)$ – функция внутреннего ущерба; f^{\max} – максимально возможная сумма ДРИ; C^{\max} – максимально возможная сумма общих издержек исходя из производственной

мощности фирмы; символом « $*$ » обозначены оптимальные значения.

Основную задачу фирмы сформулируем как задачу выбора ограниченного сверх объема производства, максимизирующего прибыль с учетом оптимальной по (1) функции ДРИ:

$$(3) \quad Q^* = \arg \max_{Q \in A_Q} \Pi(Q, f^*(Q)),$$
$$A_Q = \{Q \in R^+ : Q \leq Q^{\max}, Q^{\max} > 0\},$$

$$(4) \quad \Pi(Q, f) = R(Q) - C_{\Sigma}(Q, f^*(Q)),$$

$$(5) \quad R(Q) = p Q,$$

где Π , R – прибыль и доход фирмы; p – цена продукции; Q^{\max} – максимально возможный объем производства с учетом производственной мощности фирмы.

Следует отметить математические модели оптимального управления промышленной безопасностью [4], разработанные для регионального уровня и для отдельного предприятия. Решение задачи происходит в два этапа: на первом этапе определяется стратегия повышения уровня промышленной безопасности на региональном уровне, на втором этапе – определяется уровень промышленной безопасности каждого предприятия региона, сумма которых равна полученному на предыдущем шаге региональному уровню. Для решения задачи применяются аддитивно-мультипликативные модели, использующие показатели затрат на достижение и поддержание определенного уровня промышленной безопасности и показатели уровня промышленной безопасности.

Также в [7] рассмотрены математические модели механизмов снижения рисков возникновения чрезвычайных ситуаций, применяемые для решения задач управления экологической безопасностью. Проанализированы как уровень безопасности, так и уровень риска, представлены различные механизмы управления риском, произведена оценка их экономической эффективности.

Поскольку вопросы управления рисками тесно связаны со сферой страхования, математические модели, используемые для анализа снижения ущерба от непредвиденных ситуаций, встречаются при моделировании механизмов страхования. Например, с точки зрения теоретико-игрового моделирования при решении

задач определения страховых тарифов, взаимного и смешанного страхования [5].

Введем следующие предположения, определяющие границы применимости моделей (1), (3).

1. Гипотеза совершенной конкуренции на рынке товаров фирмы: цена товара для фирмы является экзогенной переменной, т.е. фирма не влияет на рыночную цену:

$$p'_Q = 0.$$

2. Гипотеза убывающей отдачи от расширения масштаба производства соответствует относительно крупной фирме:

$$C''_Q(Q) > 0.$$

3. Гипотеза влияния параметров управления на внутренний ущерб: с увеличением объема производства растут производственные фонды, что приводит к росту возможного ущерба от фактора риска; с увеличением ДРИ снижается внутренний ущерб; функция внутреннего ущерба ограничена сверху вследствие особенностей технологии и ограниченности объема производства:

$$X'_Q(Q, f) > 0, X'_f(Q, f) < 0, X(Q, f) \in [0, X^{max}], X^{max} > 0,$$

где X^{max} – максимально возможный внутренний ущерб.

Функция производственных издержек и функция ущерба, удовлетворяющие гипотезам 2,3, имеют вид

$$(6) C(Q) = BQ^\beta, \beta \in (1, \beta^{max}], \beta^{max} \in (1, 2], B > 0, [28, 29],$$

$$(7) X(Q, f) = \chi(Q)e^{-\zeta f}, \zeta \in (0, \zeta^{max}], \zeta^{max} \in (0, 1], \chi(Q)'_Q \geq 0.$$

Будем называть функцию $X(Q, f)$ функцией ожидаемого внутреннего ущерба, в которой функция $\chi(Q)$ есть детерминированный компонент («функция ущерба»), а множитель $e^{-\zeta f}$ – плотность экспоненциального распределения вероятности значений f как случайной величины затрат на возмещение потерь от рискованных ситуаций в том случае, если бы систематические затраты на предупреждение риска не осуществлялись. Показательное распределение в приложении к моделированию социально-экономических показателей чаще всего используется в теории надежности. Величина ζ описывает время ожидания при техническом обслуживании, срок службы оборудования. Требование гипотезы 3 ($X'_Q(Q, f) > 0$) обусловлено увеличением ожидаемого ущерба при наступлении неблагоприятного события

в связи с увеличением стоимости имущества, подверженного данному риску [17, 30, 32]. Другими словами, это функция плотности вероятности наступления рискованных ситуаций, измеренных в стоимостном выражении.

Рассмотрим задачу оптимального управления: найти пару $\langle f^*(\cdot), Q^* \rangle$, оптимальную по критериям (1), (3) на соответствующих допустимых множествах для функций издержек и ущерба вида (6), (7).

3. Результаты

На первом этапе определим функцию ДРИ $f^*(\cdot)$ по условию (1) в виде следующего утверждения, доказательство которого приведено в приложении.

Утверждение 1. Для непрерывно дифференцируемых функций $C(\cdot)$, $f(\cdot)$ и функции $X(\cdot)$ вида (7) функция

$$(8) \quad f^*(Q) = \frac{1}{\xi} \ln[\xi \chi(Q)]$$

является решением задачи (1) $\forall Q \in A_Q$ при $\xi \chi(Q) \geq 1$ и $\chi'' \chi - \chi'^2 > 0$.

Логарифмическая функция от объема выпуска фирмы (8) минимизирует общие издержки фирмы при экспоненциально убывающей функции промышленного ущерба.

На втором этапе определим объем производства, при котором прибыль фирмы будет максимальной с учетом функции (8).

Утверждение 2. Для непрерывно дифференцируемых функций $C(\cdot)$, $f(\cdot)$, $\chi(\cdot)$ уравнение

$$(9) \quad p = B\beta Q^{\beta-1} + \frac{\chi'_Q}{\xi \chi(Q)} + \chi'_Q e^{-\xi f}$$

является решением задачи (3), если выполняется

$$(10) \quad B\beta(\beta-1)Q^{\beta-2} - \frac{\chi''_Q}{\xi \chi(Q)^2} < 0 \quad \text{для } Q \in A_Q.$$

Таким образом, при Q^* , удовлетворяющем (9) и (10), функция прибыли (1) будет иметь максимальное значение.

Исследуем влияние вида функции $\chi(\cdot)$ на границы области допустимых значений параметров функций издержек B , β , ξ ,

в пределах которых уравнение (9) имеет неотрицательное решение. Рассмотрим степенную и экспоненциальную функции $\chi(\cdot)$:

$$\chi(Q) = Q^n, \quad \chi(Q) = e^Q.$$

Утверждение 3. Для функции $\chi(Q)$ вида $\chi(Q) = Q^n$ утверждение 2 имеет силу, если выполняются условия:

$$(11) \quad Q < \beta \sqrt{\frac{2n}{B\beta(\beta-1)\xi}} \quad \text{при } n \geq 2 \text{ для } Q \in A_Q,$$

$$(12) \quad Q < \beta \sqrt{\frac{n^2}{B\beta(\beta-1)\xi}} \quad \text{при } n < 2 \text{ для } Q \in A_Q.$$

Нетрудно заметить, что при $n < 2$, наиболее строгим из двух неравенств является второе, а при $n \geq 2$ нижнюю границу задает первое неравенство.

Утверждение 4. Для функции $\chi(Q)$ вида $\chi(Q) = e^Q$ утверждение 2 имеет силу, если выполняется условие:

$$(13) \quad Q < \beta^{-2} \sqrt{\frac{P}{2B\beta(\beta-1)}} \quad \text{для } Q \in A_Q.$$

4. Анализ результатов моделирования

Рассмотрим некоторые возможные виды нелинейной функции ущерба, удовлетворяющие гипотезе роста ущерба с увеличением масштаба производства, такой, чтобы в эти виды, как частный случай, входила линейная функция. Рассмотрим два варианта функции $\chi(Q)$ – степенную и экспоненциальную. Если $\chi(Q) = Q^n$, тогда в силу (8)

$$(8') \quad f^*(Q) = \frac{1}{\xi} \ln(\xi Q^n) = \frac{\ln \xi}{\xi} + \frac{n}{\xi} \ln Q.$$

Получили функцию вида $f^*(Q) = K_1 + K_2 \ln(Q)$, где K_1 и K_2 – константы.

Рассмотрим влияние параметра ξ на вид функции (8'). В силу (7), ξ может принимать значения из диапазона $(0, 1]$.

$$f^*(Q) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \left(\frac{\ln \xi}{\xi} + \frac{n}{\xi} \ln Q \right) = \infty,$$

$$f^*(Q) \Big|_{\xi=1} = n \ln Q.$$

То есть с уменьшением параметра ζ функция (8') неограниченно возрастает, а при увеличении параметра ζ до значений, близких к 1, функция (8') принимает вид логарифмической функции. В данном случае значение объема производства $Q \geq 1$.

Рассмотрим $\chi(Q) = e^Q$, тогда в силу (8)

$$(8'') \quad f^*(Q) = \frac{1}{\xi} \ln(\xi e^Q) = \frac{\ln \xi}{\xi} + \frac{Q}{\xi}.$$

Получили линейную функцию вида $f^*(Q) = K_1 + K_2 Q$, где K_1 и K_2 – константы.

При бесконечно малом значении параметра ζ получаем:

$$f^*(Q) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \left(\frac{\ln \xi}{\xi} + \frac{Q}{\xi} \right) = \infty,$$

$$f^*(Q)|_{\xi=1} = Q.$$

Как и в случае (8'), при уменьшении ζ , функция (8'') бесконечно возрастает, а при ζ , близком к 1, принимает вид линейной функции, а именно, биссектрисы угла первой четверти. Выбор в качестве функции $\chi(Q)$ степенной функции накладывает некоторые ограничения на возможные значения объема производства, в то время как экспоненциальная функция $\chi(Q)$ позволяет использовать в качестве значения Q любое действительное число.

Рассмотрим моделирование оптимальных механизмов (8), (9) на примере реальной промышленной фирмы (Самарского подшипникового завода) при различных значениях параметров объекта управления p, B, β, ζ .

В результате моделирования были получены значения, представленные в таблицах 1 и 2. Для функции $\chi(Q) = Q^3$ при всех значениях параметров β и ζ , удовлетворяющих (6) и (7) соответственно, задача (1) не имеет решения при достаточно малых значениях цены p и параметра B (модель 1). То есть при низкой рыночной цене и малом коэффициенте функции производственных издержек фирма выпускает настолько низкий объем продукции, что не имеет дохода, достаточного для совершения ДРИ. С увеличением цены доход фирмы возрастает, и в результате решения (9) получаем два возможных значения Q^* , из которых только $Q^* < 1$ удовлетворяет (10) и (11) (модель 2). Об этом говорилось выше при обсуждении утверждения 3. При

более высоких значениях параметра B производственные издержки фирмы становятся больше, поэтому задача (1) не имеет решения (модели 3-5) при более высоких уровнях внутреннего ущерба и ДРИ. То есть производственные издержки настолько высоки, что доход, получаемый фирмой, не покрывает расходов на управление рисками.

Таблица 1. Результаты моделирования для $\chi(Q) = Q^3$

№ модели	p	B	ξ	β	Q^*
1	1	1	(0; 1]	(1; 2]	$Q^* \notin R$
2	100	1	0,7	1,2	$Q^*_1 = 0,08$ $Q^*_2 = 4018775720$
3	100	[80; $+\infty$)	0,7	1,2	$Q^* \notin R$
4	1000	1000	0,7	1,2	$Q^*_1 = 0,018$ $Q^*_2 = 0,3557$
5	1000	(1257; $+\infty$)	0,7	1,2	$Q^* \notin R$

Таблица 2. Результаты моделирования для $\chi(Q) = e^Q$

№ модели	p	B	ξ	β	Q^*
6	(0; 2)	1	(0; 1]	2	$Q^* < 0$
7	10	1	1	1,3	8
8	10	1	1	(1,8; 2]	
9	10	[6; $+\infty$)	0,7	1,2	
10	100	3	0,7	1,2	$14,306 \cdot 10^6$

Для функции $\chi(Q) = e^Q$ при малых значениях цены p (модель 6) задача (1) не имеет решения по причине, описанной выше для модели 1. С увеличением цены задача (1) имеет решение, что говорит о возросшем доходе, который позволяет осуществлять ДРИ (модель 7). Увеличение параметров β и B ведет к возрастанию производственных издержек, что также не оставляет фирме дохода для совершения ДРИ, поэтому задача (1) не имеет решения (модели 8, 9). Модель 10 иллюстрирует соотношение параметров состояния, при которых цена достаточно

высока, чтобы принести фирме доход, способный покрыть расходы на управление рисками.

Графическая иллюстрация результатов моделирования позволяет наглядно показать исследуемые функции.

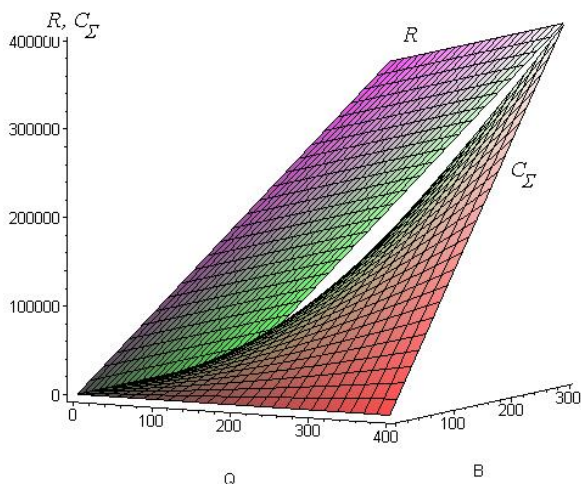


Рис. 1. Зависимость дохода и общих затрат от объема производства и параметра B

На графике (рис. 1) видно, что с увеличением параметра B при возрастающем объеме производства увеличиваются общие затраты. Причем дальнейшее их увеличение ведет к превышению дохода. Таким образом, увеличение общих издержек при постоянной цене не является целесообразным.

Изменение параметра ξ незначительно влияет на значения дохода и общих издержек (рис. 2). Его изменение практически не отражается на графиках функций.

Увеличение параметра β совместно с возрастающим объемом производства приводит к стремительно возрастающим общим издержкам. На графике (рис. 3) видна линия, в каждой точке которой выполняется равенство дохода и общих издержек. Таким образом, фирма может определить границы для

объема производства и параметра β , при которых фирма работает с прибылью.

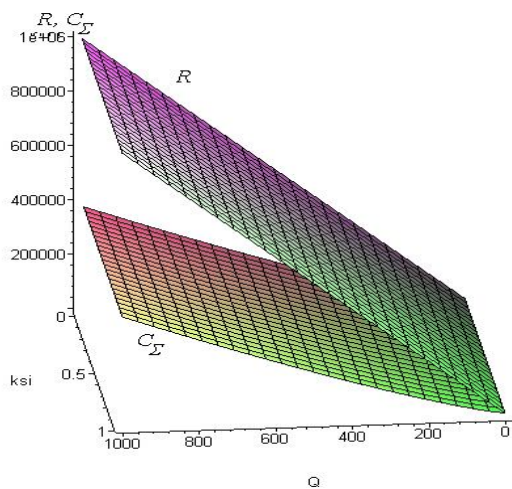


Рис. 2. Зависимость дохода и общих издержек от объема производства и параметра ζ

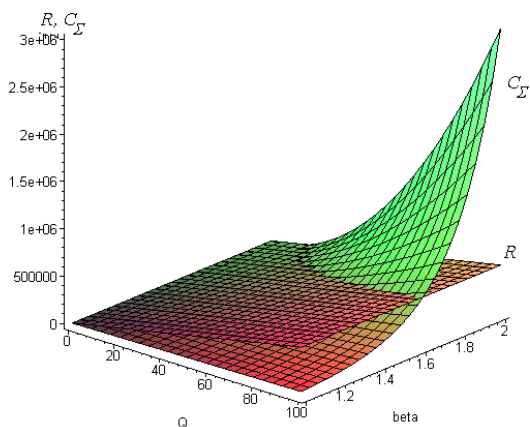


Рис. 3. Зависимость дохода и общих издержек от объема производства и параметра β

5. Выводы

Рассмотрена проблема управления издержками фирмы с учетом промышленного ущерба от непредвиденных производственных ситуаций. Классификация вероятных в этих ситуациях издержек фирмы (рисковых издержек) на добровольные и обязательные позволила выделить задачу оптимизации ДРИ как самостоятельный компонент общей задачи управления издержками фирмы, которая, в свою очередь, является компонентом задачи максимизации прибыли фирмы.

Оптимальная по критерию общих издержек функция ДРИ определена для степенной функции производственных издержек и экспоненциально убывающей функции промышленного ущерба. Оптимальная функция ДРИ представляет собой логарифмическую зависимость от некоторой монотонной функции объема выпуска фирмы. Следовательно, с ростом объема производства рациональная стратегия управления промышленными рисками фирмы заключается в плавном увеличении издержек на предотвращение рискованных ситуаций. Также следует отметить, что данное увеличение целесообразно производить до определенных границ, как показано на рис. 1-3.

Анализ влияния параметров функции издержек и функции промышленного ущерба на область существования решения задачи максимизации прибыли фирмы при оптимальной функции ДРИ позволил сделать следующие выводы. Низкая рыночная цена на товар фирмы приводит к низкому доходу, что в совокупности с высокими значениями параметров функции издержек, во-первых, не позволяет фирме осуществлять ДРИ; во-вторых, вследствие высоких уровней оптимального выпуска при этом значительны размеры внутреннего ущерба. При достаточно высокой рыночной цене, наоборот, показано существование максимизирующей прибыль стратегии (выпуска) фирмы, имеющей возможность осуществлять ДРИ, т.е. наличие дохода фирмы, достаточного для проведения мероприятий по снижению риска. Таким образом, полученная модель позволяет для каждого конкретного случая, описывающего производственный процесс предприятия, установить границы рыночной цены и параметров функции издержек, при которых управление про-

мышленным риском является критическим для существования фирмы.

6. Приложение

Доказательство утверждения 1. Решим задачу (1) методом подстановки в целевую функцию $C_{\Sigma}(Q, f)$ функции $X(Q, f)$. Целевая функция непрерывно дифференцируема и функция $X(Q, f) = \chi(Q) e^{-\xi f}$ непрерывно дифференцируема с частными производными, не равными нулю одновременно (уравнение $X(Q, f) - \chi(Q) e^{-\xi f} = 0$ задает гладкую кривую).

Запишем полученную в результате подстановки функцию

$$C_{\Sigma}(Q, f) = C(Q) + f + \chi(Q) e^{-\xi f}$$

и продифференцируем её

$$(14) \quad C_{\Sigma}(Q, f)'_f = 1 - \xi \chi(Q) e^{-\xi f} = 0.$$

Решив (14), получим функцию ДРИ при условии минимизации общих издержек:

$$f^*(Q) = \frac{1}{\xi} \ln(\xi \chi(Q)).$$

Проверим выполнение достаточного условия минимума функции $C_{\Sigma}(Q, f)$ при $f = f^*$. Для этого определим знак

$$\Delta = \begin{vmatrix} C''_{\Sigma QQ} & C''_{\Sigma Qf} \\ C''_{\Sigma Qf} & C''_{\Sigma ff} \end{vmatrix} \text{ при } f = f^*.$$

$$\begin{aligned} \Delta|_{f=f^*} &= \begin{vmatrix} C''_{\Sigma QQ} & C''_{\Sigma Qf} \\ C''_{\Sigma Qf} & C''_{\Sigma ff} \end{vmatrix} \Big|_{f=f^*} = \begin{vmatrix} V\beta(\beta-1)Q^{\beta-2} + \frac{\chi''}{\xi\chi} & -\frac{\chi'}{\chi} \\ -\frac{\chi'}{\chi} & \xi \end{vmatrix} = \\ &= V\beta(\beta-1)\xi Q^{\beta-2} + \frac{\chi''}{\chi} - \left(\frac{\chi'}{\chi}\right)^2. \end{aligned}$$

Так как $V\beta(\beta-1)\xi Q^{\beta-2} > 0$ в силу (6) и $\frac{\chi''}{\chi} - \left(\frac{\chi'}{\chi}\right)^2 > 0$ по

условию утверждения 1, то $\Delta|_{f=f^*} > 0$.

Данное условие действительно $\forall Q \in A_Q$. Тогда функция $f^*(Q)$ в случае $\xi\chi(Q) \geq 1$ является решением задачи $\min_{f \in A_f} C_\Sigma(X, f)$. ■

Доказательство утверждения 2. Определим значение объема производства Q^* , при котором целевая функция достигает максимального значения. Для этого найдем частную производную (4) по Q :

$$P'_Q(Q, f) = R'_Q(Q) - C'_\Sigma(Q, f) = 0,$$

$$R'_Q(Q) = C'_\Sigma(Q, f).$$

То есть прибыль будет максимальной, если темп роста издержек будет равен темпу роста дохода, т.е. рыночной цене.

$$p = C(Q)'_Q + f^*(Q)'_Q + X(Q, f^*)'_Q,$$

$$p = B\beta Q^{\beta-1} + \frac{\chi'_Q}{\xi\chi(Q)} + \chi'_Q e^{-\xi f}.$$

С учетом $f = f^*$ по (8), получим:

$$p = B\beta Q^{\beta-1} + \frac{2\chi'_Q}{\xi\chi(Q)}.$$

Проверим выполнение достаточного условия максимума функции $\Pi(Q, f)$:

$$\Pi''_{QQ}(Q, f) = R''_{QQ}(Q) - C''_{\Sigma QQ}(Q, f) < 0.$$

$$\Pi''_{QQ}(Q, f) = B\beta(\beta-1)Q^{\beta-2} + \frac{\chi''_{QQ}\xi\chi(Q) - \xi\chi'^2_Q}{(\xi\chi(Q))^2} - \chi''_{QQ}e^{-\xi f}.$$

$$\Pi''_{QQ}(Q, f) = B\beta(\beta-1)Q^{\beta-2} + \frac{\chi''_{QQ}}{\xi\chi(Q)} - \frac{\chi'^2_Q}{\xi\chi(Q)^2} - \chi''_{QQ}e^{-\xi f}.$$

С учетом (8) получим:

$$\Pi''_{QQ}(Q, f) = B\beta(\beta-1)Q^{\beta-2} - \frac{\chi'^2_Q}{\xi\chi(Q)^2}.$$

Достаточное условие максимума функции действует при Q , удовлетворяющих (10):

$$B\beta(\beta-1)Q^{\beta-2} - \frac{\chi'^2_Q}{\xi\chi(Q)^2} < 0. \blacksquare$$

Доказательство утверждения 3. Если $\chi(Q) = Q^n$, тогда (9) примет вид

$$p = B\beta Q^{\beta-1} + 2 \frac{nQ^{n-1}}{\xi Q^n}.$$

Преобразуем полученное уравнение

$$p = \frac{B\beta Q^\beta}{Q} + 2 \frac{n}{\xi Q},$$

$$p = \frac{\xi B\beta Q^\beta + 2n}{\xi Q}.$$

Рассмотрим решение полученного уравнения графическим способом как отыскание точки пересечения горизонтальной прямой $y_1 = p$ с графиком функции $y_2 = \frac{\xi B\beta Q^\beta + 2n}{\xi Q}$. Исследуем функцию y_2 :

$$\lim_{Q \rightarrow 0} \frac{\xi B\beta Q^\beta + 2n}{\xi Q} = \infty.$$

Графики y_1 и y_2 будут иметь точку пересечения, если y_2 будет убывать, т.е. должно выполняться условие $y_2' < 0$:

$$y_2' = B\beta(\beta-1)Q^{\beta-2} - 2 \frac{n}{\xi Q^2} < 0.$$

После преобразования, получим:

$$\frac{\xi B\beta(\beta-1)Q^\beta - 2n}{\xi Q^2} < 0$$

или в силу (6), (7)

$$\xi B\beta(\beta-1)Q^\beta < 2n,$$

$$Q^\beta < \frac{2n}{\xi B\beta(\beta-1)}.$$

Поскольку с учетом (6), (7) $\frac{2n}{\xi B\beta(\beta-1)} > 0$, то можно записать:

$$0 < Q < \sqrt[\beta]{\frac{2n}{\xi B \beta (\beta - 1)}}.$$

Получили условие существования решения уравнения (9).
Рассмотрим далее условие (10) для $\chi(Q) = Q^n$:

$$V\beta(\beta - 1)Q^{\beta-2} - \frac{n^2 Q^{2n-2}}{\xi Q^{2n}} < 0.$$

Преобразуем:

$$\frac{\xi B \beta (\beta - 1) Q^\beta - n^2}{\xi Q^2} < 0.$$

или

$$\xi B \beta (\beta - 1) Q^\beta - n^2 < 0,$$

$$Q^\beta < \frac{n^2}{\xi B \beta (\beta - 1)},$$

$$0 < Q < \sqrt[\beta]{\frac{n^2}{\xi B \beta (\beta - 1)}}.$$

Таким образом, для функции $\chi(Q) = Q^n$ утверждение 2 имеет силу, если выполняются два условия

$$\begin{cases} Q < \sqrt[\beta]{\frac{2n}{\xi B \beta (\beta - 1)}} & \text{при } n \geq 2, \\ Q < \sqrt[\beta]{\frac{n^2}{\xi B \beta (\beta - 1)}} & \text{при } n < 2. \end{cases}$$

Доказательство утверждения 4. Для $\chi(Q) = e^Q$ уравнение (9) принимает вид

$$p = V\beta Q^{\beta-1} + \frac{2}{\xi}.$$

Рассмотрим опять решение данного уравнения с помощью графического метода. Пусть $y_1 = p$ задает горизонтальную прямую и $y_2 = V\beta Q^{\beta-1} + \frac{2}{\xi}$. Точка пересечения графиков функций y_1 и y_2 соответствует решению (9). Проанализируем функцию y_2 :

$$y_2|_{Q=0} = \frac{2}{\xi}.$$

Определим характер монотонности функции y_2 .

$$y_2' = V\beta(\beta-1)Q^{\beta-2} \geq 0 \quad \forall Q \in A_Q.$$

То есть функция y_2 возрастает при $\forall Q \in A_Q$. Значит, если $y_2(0) > p$, то графики функций y_1 и y_2 не пересекаются и (9) не имеет решения. Если $y_2(0) \leq p$, т.е. выполняется условие $\frac{2}{\xi} \leq p$,

тогда графики функций y_1 и y_2 пересекаются в единственной точке, которая является решением (9).

Рассмотрим далее условие (10) применительно к функции $\chi(Q) = e^Q$:

$$V\beta(\beta-1)Q^{\beta-2} - \frac{1}{\xi} < 0$$

или

$$V\beta(\beta-1)Q^{\beta-2} < \frac{1}{\xi}.$$

Объединим условие существования решения уравнения (9) и (10):

$$2V\beta(\beta-1)Q^{\beta-2} < \frac{2}{\xi} \leq p. \blacksquare$$

Литература

1. АБРАМОВА Н.А., КОВРИГА С.В., МАКАРЕНКО Д.И. *Принципы управления качеством проектирования сложных программно-технических комплексов с учетом оценки рисков ошибок человека* // Надежность. – 2014. – №2(49). – С. 73–80.
2. АНОХИН А.А., КАКАЛОВА Е.С. *Управление рисками в операциях на международном рынке ценных бумаг* // Математика. Информатика. Естествознание в экономике и обществе (МИЕСЭКО–2015) труды Всероссийской научной конференции: в 2-х томах. – 2015. – С. 48–52.
3. БАТЬКОВСКИЙ А.М., БАТЬКОВСКИЙ М.А., БОЖКО В.П., КАЛАЧИХИН П.А. и др. *Управление рисками инновационного развития базовых высокотехнологичных отраслей.* – М.: Тезарус, 2015. – 332 с.
4. БУРКОВ В.Н., ГРИЩЕНКО А.Ф., КУЛИК О.С. *Задачи оптимального управления промышленной безопасностью.* – М.: ИПУ РАН. – 2000. – 70 с.
5. БУРКОВ В.Н., ЗАЛОЖНЕВ А.Ю., КУЛИК О.С., НОВИКОВ Д.А. *Механизмы страхования в социально-экономических системах.* – М.: ИПУ РАН, 2001. – 109 с.
6. БУРКОВА И.В., ПОЛОВИНКИНА А.И., СИДОРОВ Е.А., АКАМСИНА Н.В. *Деловые игры как метод исследования систем управления производственными рисками* // Экономика и менеджмент систем управления. – 2016. – Том 19, №1. – С. 87–93.
7. БУРКОВ В.Н., ЩЕПКИН А.В. *Экологическая безопасность.* – М.: ИПУ РАН, 2003. – 92 с.
8. ВЕРЕМЕЕВА О.В. *Институциональные предпосылки управления международными финансовыми рисками* // Федерализм. – 2015. – №3. – С. 141–150.
9. ГРИМАШЕВИЧ О.Н. *Идентификация рисков промышленных предприятий* // Наука и общество. – 2015. – №2(21). – С. 4–9.

10. ГРИМАШЕВИЧ О.Н. *Методологические основы исследования рискообразующих факторов промышленных предприятий* // Вестник Саратовского государственного социально-экономического университета. – 2012. – №1(40). – С. 68–72.
11. ГРИМАШЕВИЧ О.Н. *Оценка качества системы управления рисками промышленных предприятий* // В сб.: Современный взгляд на проблемы качества и управления конкурентоспособностью в условиях внешних вызовов. Материалы международной (очно-заочной) научно-практической конференции / Под ред. А.В. Гугелева, Н.С. Яшина, И.П. Степановой, П.В. Старцева. – 2015. – С. 89–92.
12. ГРИМАШЕВИЧ О.Н. *Понятие риска применительно к качеству продукции промышленного предприятия* // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Экономика и управление. – 2013. – №17. – С. 164–172.
13. ГРИМАШЕВИЧ О.Н. *Разработка программы управления рисками промышленных предприятий* // Наука и общество. – 2013. – №3(12). – С. 45–49.
14. ГРИМАШЕВИЧ О.Н. *Система управления рисками промышленного предприятия: методология и практика*. – Саратов: КУБиК, 2012.
15. ДИНОВА Н.И., ЩЕПКИН А.В. *Управление деятельностью предприятий механизмом штрафов* // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014, 16–19 июля 2014 г., Москва. – С. 5643–5647.
16. ДРОНОВА Ю.В. *Вероятностная оценка рисков инноваций в условиях неопределенности* // Экономика и управление: проблемы, решения. – 2016. – №1. – С. 69–72.
17. ЕРМАСОВ С.В., ЕРМАСОВА Н.Б. *Страхование*: учебник. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшее образование. 2008. – 613 с.

18. ЗАВЬЯЛОВА О.В. *Международные перспективы управления таможенными рисками цепей поставки на территории Евразийского экономического союза* // Сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции «Таможенные чтения – 2015. Евразийский экономический союз в условиях глобализации: вызовы, риски, тенденции», 23–27 ноября 2015 г., Санкт-Петербург / Под общ. ред. С.Н. Гамидуллаева. – 2015. – С. 51–60.
19. КАЧАЛОВ Р.М. *Моделирование феномена экономического риска как объекта управления* // Сборник научных трудов XVIII Международной научно-практической конференции «Системный анализ в проектировании и управлении», 1–3 июля 2014 г., Санкт-Петербург. – 2014. – С. 151–154.
20. КАЧАЛОВ Р.М. *Операционная концепция управления экономическим риском в системном пространстве* // В кн.: Управление рисками в экономике: проблемы и решения / Под ред. С.Г. Опарина. – СПб: ФГАОУВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого», 2015. – С. 9–31.
21. КАЧАЛОВ Р.М., СЛЕПЦОВА Ю.А. *Идентификация факторов риска на основе декомпозиции экономического пространства предприятия* // Вестник Челябинского государственного университета. – 2016. – №14(396). – С. 86–94.
22. КАЧАЛОВ Р.М., СЛЕПЦОВА Ю.А. *Качество управления предприятием и феномен экономического риска* // Управленческие науки в современном мире. – 2016. – Т. 2, №2. – С. 15–19.
23. КАЧАЛОВ Р.М., СЛЕПЦОВА Ю.А. *Цели и факторы риска в задаче управления социально-экономической системой* // Сборник трудов IV Международной научно-практической конференции-биеннале «Системный анализ в экономике – 2016», 9–11 ноября 2016 г., Москва / Под ред. Г.Б. Клейнера, С.Е. Щепетовой. – 2016. – С. 118–122.
24. КАЧАЛОВ Р.М., СТАВЧИКОВ А.И. *Управление экономическим риском инновационного развития предприятия* // Вестник РАЕН. – 2015. – №2. – С. 44–48.

25. КУЛЬБА В.В., ЧЕРНОВ И.В., ШЕЛКОВ А.Б. *Управление региональной безопасностью* // Материалы Восьмой международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем» (MLSD'2015), 29 сентября – 01 октября 2015 г., Москва / Под общ. ред. С.Н. Васильева, А.Д. Цвиркуна. – 2015. – С. 150–152.
26. ЛЕВКИН Г.Г., ТЫРНОВА Е.А. *Управление логистическими рисками при организации доставки грузов в международном сообщении* // Инновационная экономика и общество. – 2015. – №4(10). – С. 75–80.
27. СМИТ А. *Исследование о природе и причинах богатства народов*. – М.: Эксмо, 2007. – 960 с.
28. УОЛТЕРС А.А. *Производственные функции и функции затрат* // Вехи экономической мысли. Т.2 Теория фирмы / Под ред. В.М. Гальперина. – СПб: Экономическая школа, 1999. – 534 с.
29. ХЕЙ Д., МОРРИС Д. *Теория организации промышленности*. В 2 т. / Пер. с англ. под ред. А.Г. Слуцкого. – Санкт-Петербург: Экономическая школа, 1999. – Т. 1. – 384с., Т. 2. – 592 с.
30. ХОХЛОВ Н.В. *Управление риском: Учеб. пособие для вузов*. – М.: Изд-во «Юнити-Дана», 2001. – 239 с.
31. ЧЕРНИКОВА О.П. *Методика расчета показателей операционного рычага для управления производственным риском промышленного предприятия* // Science Time. – 2015. – №8(20). – С. 239–245.
32. ШАХОВ В.В. *Страхование: Учебник для вузов*. – М.: ЮНИТИ, 2003. – 311 с.
33. ШУМПЕТЕР Й. *История экономического анализа*. Т. 2. –, СПб: Экономическая школа, 2004.
34. ШУЛЬЦ В.Л., КУЛЬБА В.В., ШЕЛКОВ А.Б., ЧЕРНОВ И.В. *Сценарий анализа в управлении региональной безопасностью* // Вопросы безопасности. – 2016. – №3. – С. 41–79.
35. ЩЕПКИН А.В., ГОЛЕВ С.А. *Управление уровнем риска в регионе механизмом штрафа* // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014, 16–19 июля 2014 г., Москва. – 2014. – С. 5682–5689.

36. ARENA M., ARNABOLDI M., AZZONE J. *Is enterprise risk management real?* // J. of Risk Research. – 2011. – Vol. 14. – P. 779–797.
37. BERKELEY D., HUMPHREYS P.C., THOMAS R.D. *Project risk action management* // Construction Management and Economics. – 1991. – Vol. 9. – P. 3–17.
38. BOULOIZ H., TKIOUAT M., GARBOLINO E., BENDAHA T. *Contribution to risk management in industrial maintenance* // Proc. of IEEE International Conference on Industrial Engineering and Systems Management – 2013,(IEEE IESM–2013), October 28–30, 2013, Rabat, Morocco. – Article number 6761470.
39. BOULOIZ H., GARBOLINO E., TKIOUAT M. *Contribution of UML model to risk analysis of an industrial system* // Reliability, Risk and Safety: Back to the Future. – 2010. – P. 127–134.
40. CROPLEY C.H. *The case for truly integrated cost and schedule risk analysis* // Handbook of Research on Leveraging Risk and Uncertainties for Effective Project Management, 29 November 2016. – 2016. – P. 76–108.
41. GALLAB M., TKIOUAT M., BOULOIZ H., GARBOLINO E. *Model for developing a database for risk analysis* // Proc. of IEEE International Conference on Industrial Engineering and Systems Management – 2015, (IEEE IESM–2015), October 21–23, 2015, Seville, Spain. – P. 833–841.
42. Hanson D., White R. *Regimes of risk management in corporate annual reports: a case study of one globalizing Australian company* // J. of Risk Research. – 2004. – Vol. 7. – P. 445–460.
43. KULBA V., SHELKOV A., CHERNOV I., ZAIKIN O. *Scenario analysis in the management of regional security and social stability* // Intelligent systems reference library. – 2016. – Vol. 98. – P. 249–268.
44. Oehmen J., ZIEGENBEIN A., ALARD R. SCHÖNSLEBEN P. *System-oriented supply chain risk management* // Production Planning & Control The Management of Operations. – 2009. – Vol. 20. – P. 343–361.
45. PAZDNIKOVA N.P., SHIPITSYNA S.Y. *Stress analysis in managing the region's budget risks, Risk factors for the regional economic growth* // Economy of Region. – 2014 – Vol. 3(39). – P. 208–217.

46. De ROCQUIGNY E. *Modelling Under Risk and Uncertainty: An Introduction to Statistical // Phenomenological and Computational Methods.* – 2012. – No 1. – 434 p.
47. SAPIRO E.S., MIROLJUBOVA T.V. *Risk factors for the regional economic growth // Economy of Region.* – 2008. – Vol. 1. – P. 39–49.
48. SHORIKOV A.F. *Dynamic model of minimax control over economic security state of the region in the presence of risks // Economy of Region.* – 2012. – Vol. 2(30). – P. 258–266.
49. STUART MILL J. *Essays on economics and society. Collected works of John Stuart Mill.* – Toronto: University of Toronto Press, 1967. – 404 p.
50. THUN J.-H., DRÜKE M., HOENIG D. *Managing uncertainty – an empirical analysis of supply chain risk management in small and medium-sized enterprises // Int. J. of Production Research.* – 2011. – Vol. 49. – P. 5511–5525.
51. VARCHOLOVÁ T. *Active enterprise risk management // Ekonomicky casopis.* – 2003. – Vol. 51. – P. 997–1010.

THE OPTIMAL COST FUNCTION OF THE FIRM TO PREVENT INDUSTRIAL RISKS

Elena Rostova, Samara National Research University, Samara, Cand.Sc., assistant professor (el_rostova@mail.ru).

Mihail Geraskin, Samara National Research University, Samara, Doctor of Science, professor (innovation@ssau.ru).

Abstract: The problem of determining the cost function of the firm to prevent industrial risks (voluntary risk costs), the optimal by the criterion of total costs. For the exponential function of production costs and exponentially decreasing functions of the industrial damage is determined as a function of voluntary risk costs. The analysis of influence of parameters of the function of industrial damage to the area of existence of the solution of the profit maximization problem of the firm under optimal functions of voluntary risk costs. Produced by testing the theoretical results on numerical examples, provides a graphic illustration of simulation results. Analyzed the impact of the market price of commodities, production costs of firms in the voluntary risk costs. The resulting model allows for each case, describing the production process of the enterprise, to establish the boundaries of market prices and parameters of the cost function, in which the management of industrial risk is critical for the existence of the company.

Keywords: industrial risk, industrial damages, costs, optimization, risk management.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А.Г. Чхартишвили.*

*Поступила в редакцию 08.06.2017.
Опубликована 30.11.2017.*